Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Lerl

K metodice goniometrických funkcí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D18--D22

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120816`

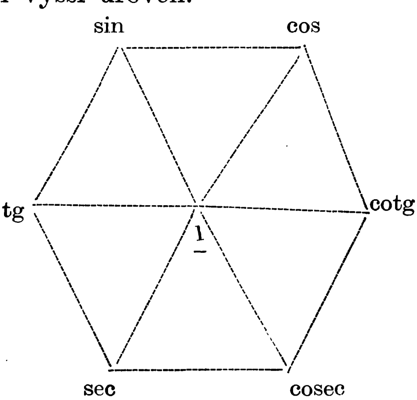
K metodice goniometrických rovnic.

Karel Lerl, Místek.

I. Z řešení rovnic nejobtížnější se zdají žákům rovnice transcendentní, z nichž na prvém místě jsou rovnice goniometrické. Kromě obvyklé úpravy, přistupují zde další nesnáze, jako vztahy mezi funkcemi goniometrickými jednak při uvádění na touž funkci a týž argument, jednak při ocenění platnosti výsledků. Doporučuje se proto, aby učitel sám podle nějaké větší sbírky příklady si urovnal od nejjednoduššího až k těžším úlohám, po případě k systémům rovnic, které obzvláště skýtají žákům neobyčejných potíží. Ve svém pracovním programu by učitel vždy udal určitou rovnici, která by měla býti vzorem pro celou skupinu, v níž by nějaká novinka přistoupila a starší by se opakovalo. Tím by se mnohem zvětšil pracovní efekt a účinek by byl znatelný i v trigonometrii. Tam sice vystačíme kromě několika poznatků z planimetrie s dvěma větami, sinovou a cosinovou, avšak postupu řešení lze dáti různé formy:

1. Buďto se držíme stereotypních postupů, či
2. postup dodržujeme přesně podle konstruktivního řešení, či posléze
3. na úlohu pohlížíme jako na soustavu rovnic.

Je dobře probírati všechny tři druhy řešení, aby se pak nalezla pro ten nebo onen příklad cesta nejvhodnější, prakticky nejcennější. Konstruktivní řešení poskytuje dobré opakování látky a mimo to i předem počet případů a řešení atd. Stejně poslední případ postupu dává úloze zcela jinou tvářnost a rozborem i vyšší úroveň.



Při úpravě a řešení goniometrických rovnic nutno znáti toliko průběh a periodicitu funkcí, vztahy mezi funkcemi téhož argumentu, převody funkcí o jednoduchém argumentu na násobný a naopak. Pro vztahy mezi funkcemi je vhodné též uvésti dosti známou mnemotechnickou pomůcku ze starých cvičebnic: Vrcholy pravidelného šestiúhelníka a střed jsou popsány tak, jak je vyznačeno na obrázku, při čemž 1, sec, cosec jsou podtrženy. Platí věty:

a) Součin funkcí úhlu na úhlopříčce rovná se 1. (Funkce převratné.)

b) Čtverec veličiny podtržené rovná se součtu čtverců veličin stojících nad ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $1 + \mathrm{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \ldots$).

c) Každá funkce rovná se součinu obou sousedních ($\mathrm{tg}\, \alpha = \sin \alpha \,.\, \sec \alpha$, $\mathrm{cosec}\, \alpha = \sec \alpha \,.\, \mathrm{cotg}\, \alpha, \ldots$).

c') Podíl dvou sousedních funkcí je roven funkci předcházející $\left(\dfrac{\mathrm{cotg}\, \alpha}{\mathrm{cosec}\, \alpha} = \cos \alpha, \ldots\right)$.

Zběžné hledání funkcí a jich logaritmů v tabulkách je přirozeným požadavkem při řešení goniometrických rovnic.

II. Postup při probírání goniometrických rovnic. Je zřejmo, že při řešení hledíme toliko k výsledkům reálným. Nejdříve udejme vždy řešení elementární, t. j. v intervalu (0,360°) či (0,180°) a pak obecné; při tomto dbejme toho, aby perioda byla vyjádřena v téže míře jako je řešení elementární. Mnohé rovnice lze řešiti mnoha způsoby; dlužno si proto některých takových rovnic všimnouti a podati srovnání různých způsobů řešení. Doporučují se i úlohy, kde místo čísel zvláštních vyskytují se funkce s konstantními úhly; tyto úlohy jednak skýtají opakování vztahů mezi funkcemi goniometrickými, jednak jejich řešení je často mnohem kratší než řešení numerické. Při úpravě goniometrických rovnic — jako ostatně při úpravě každé rovnice — nutno dbáti, aby upravená rovnice byla shodnou s rovnicí danou. Při některých typech je vhodné i řešení grafické. Jednotlivé typy goniometrických rovnic bylo by probírati asi v tomto pořadí:

1. Rovnice tvaru $a\, f(nx + \alpha) + b = 0$, kde $f(x)$ značí goniometrickou funkci a $\left|\dfrac{b}{a}\right|$ hoví jistým podmínkám podle toho, jaká je funkce $f(x)$. Čísla a, b udejme někdy též víceciferná, aby bylo cvičeno logaritmování a řešení vyznačujme v jednotkové kružnici.

2. Rovnice, v nichž se vyskytují toliko reciproké funkce a to v různých mocninách. Rovnice ty vedou k vyšším rovnicím o téže neznámé.

3. Rovnice, v nichž se vyskytují dvě sousední funkce (v šestiúhelníku) a všechny členy jsou téhož stupně; rovnice ty pouhým dělením přejdou v rovnice o jedné neznámé.

4. Rovnice, v nichž lze použíti vět o čtvercích funkcí, avšak bez užívání odmocnin (na př. $a \sin^2 x + b \cos x = c$).

5. Rovnice, v nichž se vyskytují toliko čtverce funkcí (některé mohou vésti k pouhým identitám nebo ke sporu).

6. Rovnice, v nichž užijeme všech vět z naší mnemotechnické pomůcky, vyhneme se však odmocninám. Vyskytne-li se pak na př. více funkcí, hledíme je nahraditi $\sin x$ a $\cos x$.

7. Rovnice tvaru

$$a\, f_1(x) + b\, f_2(x) = c,$$

pokud nejsou zahrnuty v předcházejícím. Sem patří na př. rovnice $a \sin x + b \cos x = c$. V učebnicích bývá jí věnováno více místa; poskytuje též několik postupů řešení.

a) První co žáky napadne, je nahraditi $\sin x$ nebo $\cos x$ kofunkcí, $b \cos x = c - a \sin x$, umocniti dvěma a zavésti $\sin x$. Tím získá se kvadratická rovnice s řešením

$$\sin x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Ježto jsme umocňovali dvěma, získáme o kořen více a nutno provésti zkoušku, která je pro žáky vždy jaksi trapnou a připravuje nás zbytečně o čas.

b) Podobně dělením na př. $\cos x$ přejde rovnice ve tvar $a \operatorname{tg} x + b = \dfrac{c}{\cos x}$. Umocněním pak dostáváme tvar $(a^2 - c^2) \operatorname{tg}^2 x + 2ab \operatorname{tg} x + b^2 - c^2 = 0$, který skýtá řešení

$$\operatorname{tg} x = \frac{-ab \pm c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - c^2},$$

jež nutí nás k výpočtu $\sin x$ a $\cos x$, poněvadž je opětně zkouška žádoucí.

c) Existují ovšem lepší cesty, které skýtají kořeny s menšími potížemi. Užitím známých vzorců

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x},$$

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$$

přejde daná rovnice ve tvar

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}x - \frac{2a}{b + c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x - \frac{b - c}{b + c} = 0;$$

pak

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

Tento výsledek sice skýtá také dvě hodnoty pro $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, avšak při předešlém postupu ke dvěma hodnotám $\operatorname{tg} x$ v intervalu $(0{,}360°)$ příslušely čtyři hodnoty $\sin x$, kdežto zde musíme hledati toliko $0 \leq \frac{1}{2}x < 180°$. Dostaneme proto jen jedno x a tedy pro $\sin x$ obdržíme dvě správná řešení.

d) Jiný postup v našich učebnicích běžný, je zavedení pomocného úhlu, jenž je vhodný pro logaritmování, ačkoliv bývá často přeceňován. Spočívá v tom, že každé reálné číslo může býti vyjádřeno některou vhodnou goniometrickou funkcí podle toho, nachází-li se v intervalu $(-1, 1)$, $(-\infty, \infty)$ anebo v témž intervalu s vyloučením $(-1, 1)$. Jsou-li dána dvě reálná čísla a, b, lze určiti reálné číslo m tak, že $a = m \cos \varphi$, $b = m \sin \varphi$. Dělením dostáváme $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, a pak $m = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}$. Lze ovšem též užíti $m = \sqrt{a^2 + b^2}$. Užijeme-li této substituce v naší rovnici, je

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{m};$$

vypočteme-li $\operatorname{tg} \varphi$, jest pak

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a} = \frac{c \sin \varphi}{b},$$

což je tvar vhodný pro výpočet logaritmický.

e) Názorné jest též grafické řešení (v podstatě geometrické). V pravoúhlé soustavě souřadnic sestrojme kružnici $\xi^2 + \eta^2 = c^2$ a bodem $M (b, a)$ stanovme k ní tečny. Úhel, který příslušná normála tvoří s osou X, je žádaný úhel x, neboť normální rovnice sestrojené tečny zní

$$\xi \cos x + \eta \sin x - c = 0.$$

Poněvadž pak tečna jde bodem $M (b, a)$, je $a \sin x + b \cos x = c$. Z grafického řešení lze poznati nejen, ve kterých kvadrantech x leží, ale i počet řešení v případech, že bod M leží vně, uvnitř nebo na kružnici.

8. Zvláštní pozornost nutno věnovati též rovnicím, při nichž lze zopakovati nejnutnější věty o rozkladu mnohočlenů a to tím spíše, že tento rozklad je pro další typy nanejvýše důležitý (na př. $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1$).

9. Rovnice, v nichž užijeme vyjádření pro $f(x + \alpha)$ či $f(2x)$ nebo naopak; vedou k jednoduché rovnici.

10. Rovnice pro zavádění úhlu dvojnásobného; při tom je nutno pro $2x$ stanoviti všechny hodnoty v $(0, 360°)$, je-li stanoviti pro x hodnoty v $(0, 180°)$.

11. Rovnice, v nichž lze jednou nebo vícekráte užíti teorémů adičních.

12. Typy rovnic, v nichž lze toliko funkce $f(nx)$ převésti na funkce o jednoduchém argumentu.

13. Vhodnými kombinacemi úprav postupně pak lze řešiti rovnice, jež se zdají na pohled velmi obtížnými a nepatřily by mezi některé typy z předcházejících.

III. U soustav goniometrických rovnic nelze pro jejich rozmanitost vytknouti nějaké zvláštní typy. Úprava soustav poskytuje mnoho potíží. Snažíme se, abychom rovnicím dali tvar co nejjednodušší, jako činíme u algebraických rovnic. K tomu přistupuje tu při úpravě snaha po téže funkci a jednotném argumentu při téže neznámé, po případě po nejmenším počtu goniometrických funkcí vůbec. Nejběžnější typy jsou $f(x) \pm f(x) = k$, $x \pm y = \varkappa$, při nichž užíváme adičních teorémů s pomocí druhé rovnice. Jiný typ i v geometrii hojně se vyskytující je $f(x) : f(y) : f(z) = a : b : c$, $x + y + z = \varrho$. Zde je vhodné použíti neurčitého koeficientu úměrnosti μ, $f(x) = \mu a$, $f(y) = \mu b$, $f(z) = \mu c$, který stanovíme z rovnice $f(x + y) = f(\varrho - z)$. Zajímavé jsou z nich ty úlohy, kde volíme $\varrho = 180^\circ$ a udáme nějaký další prvek z trojúhelníka. — V systémech, v nichž se vyskytuje více funkcí, vyjadřujeme tyto často pomocí sin a cos a tyto pak jednotně tangentou polovičního úhlu, jindy tangentou celého argumentu, vyskytnou-li se toliko čtverce těchto funkcí. V mnohých případech upravujeme zase strany rovnic na výrazy schopné k logaritmování. Zvláště jsou-li neznámé vázány rovnicí $x + y + z = \varrho$ (nebo 180°), lze při úpravách docíliti jednoduchých systémů. Užíváme-li systémů majících význam geometrický, plyne z toho mnohonásobný užitek.

Rozkladný elektroměrný přístroj.

F. Boček a **V. Michal**, Praha.

Pod tímto názvem vyšel z dílen Fysmy nový přístroj, který pro svoji mnohostrannou používatelnost mohl by býti dobře nazván universálním, a to bez obvyklé stinné stránky t. zv. universálních přístrojů. Má totiž jen málo součástí, které by při větším počtu mohly znamenati spíše nepříjemné zatížení než výhodu.

Tento přístroj ulehčuje znamenitě důkladné prostudování všech měřicích přístrojů, jež jsou založeny na působení pevného magnetického pole na pohyblivý proudovodič, i povšechných zákonů elektrického proudu a galvanometrie. Především osvětluje se jím jasně závislost tažné síly a jejího směru na magnetickém poli a proudu, vyjádřená vzorcem $P = khil$ a pravidlem levé ruky. Ve vzorci značí h intensitu magnetického pole, i proud a l délku těch částí proudovodiče, které jsou k magnetické intensitě kolmé. V tomto případě má přístroj funkci t. zv. proudových vah. V jiné sestavě dovoluje nám měřiti proud jako ampér- resp. miliampérmetr, v další jako voltmetr a konečně v poslední jako wattmetr. V celku tudíž můžeme jej upotřebiti po malých změnách jako čtyř různých měřicích přístrojů příp. při demonstracích jako jednoduchého proudového indikátoru. Při všech těchto značných možnostech bylo pamatováno na to, aby konstrukce byla co možno průhledná a tak solidní, aby odolala i hrub-