Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vladimír Ryšavý

Metodika funkčního myšlení

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D187--D194

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120804

pilot	0,35 m²	0,60 m²	0,35 m²	střed 0,43 m²
vrtule	0,05 m²	0,60 m²	0,30 m²	„ 0,32 m²
karter	0,60 m²	0,20 m²	0,50 m²	„ 0,43 m²
chladič	0,08 m²	0,56 m²	0,08 m²	„ 0,24 m²
lano	0,39 m²	0,00 m²	0,39 m²	„ 0,26 m²

Celková ohrožená plocha letounu tedy činí: $0{,}43 + 0{,}32 + 0{,}43 + 0{,}24 + 6 \,.\, 0{,}26 \doteq 3\,\mathrm{m}^2$ (lan je celkem 6, 4 ke kormidlu výškovému, 2 ke kormidlu směrovému). Průměty *celého letounu* do tří rovin k sobě kolmých buďtež f_1, f_2, f_2. Pak hledaná pravděpodobnost je $p = 3/\frac{1}{3}\,(f_1 + f_2 + f_3)$.

7. Jaká je pravděpodobnost přeseknutí lana řízení letounu střepinou, která letí svojí podélnou osou a) kolmo, b) rovnoběžně k lanu a zároveň kolmo k jedné z průměten (vyjma nárysnu, viz př. 6!)?

Účinné střepiny granátu mají tvar podlouhlých, ostrohranných kousků, které lze vepsati do obdélníku $h > s$. Délku lana označme l, průměr jeho d. Pak *ohrožená plocha* má velikost a) $l\,(h - d)$, b) $l\,(s - d)$. Označíme-li příslušnou projekci letounu f, je a) $p_1 = l\dfrac{h-d}{f}$, b) $p_2 = l\dfrac{s-d}{f}$.

8. Střepiny letí *mezi* krajními polohami, uvedenými v příkladě 7. Proveďte z tohoto hlediska číselný výpočet, je-li $l = 12$ m, $d = 0{,}5$ cm, $h = 6$ cm, $s = 1{,}5$ cm!

$l\,(h - d) = 0{,}66\,\mathrm{m}^2$, $l\,(s - d) = 0{,}12\,\mathrm{m}^2$: za *průměrnou ohroženou plochu* vezmeme střed těchto hodnot, $0{,}39\,\mathrm{m}^2$. Pak $p \doteq 4/10f$.

Metodika funkčního myšlení.

Dr. **Vladimír Ryšavý**, Praha.

Uznává se jednomyslně, že se má na střední škole pěstovati pojem funkce při každé příležitosti. Žáci se vskutku seznámí s funkčními závislostmi, ale s různou důkladností podle toho, jak toho žádá praktické užití, hlavně v geometrii. Není tedy divu, že na př. vlastnosti funkcí goniometrických jsou probírány podrobně. Nepoměrně chudší je znalost závislostí jednodušších, které se vyskytují ve fysice, jako úměrnost (hlavně složená), závislost kvadratická, logaritmická a exponenciální. Je sice pravda, že se v algebře o těchto funkcích také vykládá, ale často se počítá mechanicky, nemyslí se vůbec funkčně a podstatné vlastnosti funkcí zůstávají nepovšimnuty. O funkci exponenciální na př. vědí žáci obyčejně jen to, že nezávisle proměnná x je v exponentu a umějí trochu řešiti exponenciální rovnice. Středoškolská matematika se vůbec často spokojuje mechanisováním výkonů, dosazováním, sestavováním určovacích rovnic a jejich řešením. Skutečného myšlení funkčního skoro není a pěstuje se málo, ač se o tom dost mluví, hlavně v osnovách. Učebnice podávají jen zcela primitivní základy povahy formální kromě diagramů, které aspoň částečně dávají názor o *průběhu* funkcí.

Chceme proto načrtnouti, jak je třeba nauku o funkcích věcně i metodicky doplniti a prohloubiti, se zvláštním zřetelem k potřebám fysiky praktické. Neboť snad jen zde je žák nucen všímati si souvislosti dvou *řad* hodnot, které představují skutečný *průběh* dvou veličin proměnných. Pro žáka je tu v prvé řadě neznámou *zákon*, tedy *vlastnosti funkce* dané tabelárně, nikoliv snad jednotlivá hodnota, jako při řešení rovnic!

Proti obvyklé matematice „statické" naráží tu žák na zcela jinou matematiku proměnných, na matematiku celých *řad* hodnot, na matematiku *změn*. A tu jsme teprve u funkčního myšlení v pravém slova smyslu. S tohoto hlediska si budeme všímat jednotlivých druhů funkcí a doplníme jen to, co se dosud opomíjelo nebo co nebylo dosti zdůrazněno.

I. Funkce lineární. Zde jsou vztahy tak jednoduché, že zdánlivě není co dodati. Ale přece něco! Zaznamenány byly teploty T vody v baňce stejnoměrně zahřívané kahanem a příslušné doby t:

t	0	10	20	30	..... sec
T	18,5	19,6	20,7	21,8	... stupňů
ΔT	1,1	1,1	1,1	..	

a) Jak tu závisí teplota na době? Diagram prozradí hned závislost lineární. Jak ji poznáme *bez* diagramu jen z obou řad hodnot? Podle stálosti prvých diferencí, roste-li ovšem neodvisle proměnná t stále o totéž Δt. Za 1 sec $\Delta T = 0{,}11$, tudíž

$$T = 0{,}11t + 18{,}5$$

je *analytické* vyjádření hledané závislosti.

Žák potom dokáže již sám, že naopak ze vztahu

$$y = kx + q$$

plyne nutně

$$\Delta y = k \,.\, \Delta x,$$

a tedy pro stejná Δx i stejná Δy.

b) Jak však poznáme lineární závislost aritmeticky, nejsou-li hodnoty nezávisle proměnné ekvidistantní? Na to dává odpověď $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$; tento poměr je při lineární funkci konstantní. Teď teprve — když ho potřebuje prakticky — je žák upozorněn na důležitost tohoto poměru.

c) Z toho plyne — a je třeba to říci výslovně vzhledem k dalšímu — že při ekvidistantních hodnotách nezávisle proměnné x tvoří příslušné hodnoty funkce aritmetickou řadu prvého stupně o diferenci k, je-li $\Delta x = 1$. Naopak, ze vztahu $\Delta y = k \,.\, \Delta x$ plyne lineární závislost

$$y = y_0 + \Sigma \Delta y = y_0 + k \,.\, \Sigma \Delta x = kx + q.$$

Žák tu poznává, že funkce může být určena též vztahem mezi přírůstky Δx a Δy. (Zakrytě je tu vlastně definována diferenciální rovnicí.) Všechno je třeba sledovati na diagramu a řešiti vhodné příklady i na přímou úměrnost, která je pouze zvláštním případem.

Odstavce *a*), b) lze uvésti již ve tř. IV., odst. c) a opakování obou dřívějších ve tř. VI. hned u řady aritmetické. Na reálce poskytuje fysika již v této třídě příklady: pohyb rovnoměrný, závislost délky drátu na napětí, závislost délky tyče na teplotě, redukce barometrického tlaku, závislost objemu kapaliny nebo napětí plynu na teplotě a pod.

II. Funkce kvadratická. Její tvar analytický a diagramy probírají se dosti obšírně ve tř. V. (na př. Aritmetika Bydžovský-Teplý-Vyčichlo, § 50), ale jen s hlediska řešení kvadratických rovnic. Položme si však otázku nejdůležitější, jak poznáme z tabulky nebo z diagramu, že funkce je kvadratická. Nepřímou odpověď na to dává již fysika ve tř. IV. při pohybu rovnoměrně zrychleném (na př. Ryšavý, Fysika, odst. 133), kde bylo záměrně použito poprvé metody, vedoucí ke zkoumání kvadratické závislosti $s = s_1 \,.\, t^2$. Tabulka obsahuje:

počet jednotek času t..........	0	1	2	3	4
dráhy za čas t	0	10	40	90	160 cm
dráhy za jednotky času........		10	30	50	70
přírůstky těchto drah			20	20	20

Je patrno, že druhé diference dráhy jsou stálé. Je to typická vlastnost funkce kvadratické?

a) Budiž tedy obecně

$$y = ax^2 + bx + c$$

a zvolme $\Delta x = 1$. Pak vyplyne

$$\Delta y = 2ax + b + a \;\ldots\text{. (lineárně závislé na } x)$$

a odtud

$$\Delta^2 y = 2a \qquad \ldots\text{. konstantní.}$$

Totéž platí pro jakékoliv *stálé* Δx. — Platí také opak, že funkce se stálými druhými diferencemi je kvadratická, neboť z $\Delta^2 y = 2a$ vyplývá (viz I, c), že Δy je lineární funkcí $\Delta y = 2ax + b$ a $y = y_0 +$

$+\sum_{1}^{x} \Delta y_i = y_0 + bx + ax^2$ podle součtu aritmetické řady 1. stupně.

Máme tudíž *dvě kriteria* pro funkci kvadratickou: *pro ekvidistantní hodnoty neodvisle proměnné tvoří prvé diference řadu aritmetickou, nebo druhé diference jsou stálé.*

b) Fysika ve třídě VI. (resp. VII. na gymnasiích) jde hlouběji (na př. Herolt-Ryšavý I, § 7,10; Devorecký-Šmok I, 3—5). Při pohybu rovnoměrně zrychleném potřebuje i $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = 2s_1 t$, která je lineární funkcí času. A při pohybu rovnoměrně zpožděném dokazuje, že z $v = \frac{ds}{dt} = c - at$ plyne naopak $s = ct - \frac{a}{2}t^2$ jako funkce kvadratická. Totéž lze dokázati obecně a máme tak třetí kriterium funkce kvadratické, kriterium infinitesimální: *derivace je lineární funkcí proměnné.*

Tato metoda výkladu má ještě jinou dobrou stránku, neboť ukazuje, jak fysika vede často k rozřešení problémů matematických. Ku procvičení vyloženého jsou však vhodné i příklady ryze geometrické, jako rozhodnouti, zda čára daná tabulkou

x	3	4	5	6	7 ....
y	1,5	3	5,5	9	13,5 ....

je parabolou a nalézti její rovnici.

Funkce stupně vyššího lze vynechati, protože pro ně nemáme ve fysice použití. Ale cesta by byla podobná. Leccos dovedou žáci sami, jak vidno na př. z Výroční zprávy reálky v Praze XII, 1936-37.

Je však z výkladu patrno, že začátek diferenciálního počtu, aspoň *pojem* derivace patří již do tř. V. nebo nejpozději na začátek tř. VI.*)

III. Funkce exponenciální. a) První příležitost, kde by se mělo ve tř. VI. mluviti o funkci exponenciální, je při řadě geometrické. Nejprve upozorníme, že obecný člen řady $a_1 q^k$ jest exponenciální funkcí indexu k. Naopak *hodnoty exponenciální funkce* $y = y_0 \,.\, a^x$ pro *ekvidistantní hodnoty argumentu* $x = k \,.\, d$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *tvoří řadu geometrickou se stálým kvocientem* $q = a^d$! Jak je tato zdánlivě samozřejmá poznámka důležitá, vysvítá z této úlohy:

Jak závisí na sobě veličiny x a y, pro které jsme na př. fysikálním měřením obdrželi tabulku

*) Reformní komise uvažovala důkladně o zavedení pojmu derivace již ve tř. VI., avšak z vážných důvodů od toho upustila. (Pozn. redakce.)

x	0	1	2	3	4	5 ....
y	2	2,4	2,88	3,46	4,15	4,98 .... ?

Diagram na milimetrovém papíře ukazuje zakřivení; závislost není lineární. Je snad kvadratická? Prvé diference musily by stoupati lineárně; avšak diference

$$0{,}40 \quad 0{,}48 \quad 0{,}58 \quad 0{,}69 \quad 0{,}83$$

stoupají o

$$0{,}08 \quad 0{,}10 \quad 0{,}11 \quad 0{,}14,$$

tedy nepravidelně, proto závislost není ani kvadratická. Zkoušejme podíly $y_k : y_{k-1}$! Jsou stále $q = 1{,}2$. Je tudíž závislost vyjádřena analyticky vztahem $y = 2 \,.\, 1{,}2^x$.

Ale ani tento postup nemůže myslícího žáka uspokojiti, neboť je to vlastně tápání s nejistým výsledkem. Koho pak napadne tvořit právě podíly sousedních hodnot funkce, a což kdyby byly známy pro neekvidistantní hodnoty argumentu?

b) Použijeme jiné základní vlastnosti exponenciální funkce:

$$\log y = x \,.\, \log a + \log y_0.$$

Její logaritmus je lineární funkcí exponentu. Stačí tedy vnésti hodnoty tabulky na papír pologaritmický, jehož svislá osa je dělena logaritmicky ($\log y$), a diagram f naší funkce musí býti přímka. Odtud i z napsané rovnice logaritmické vyplývá: *pro ekvidistantní argumenty tvoří logaritmy funkce expon. řadu aritmetickou.* Hodnoty y_0 a $\log a$ lze buď vyčísti z diagramu, nebo vypočísti

$$\log a = \frac{\log y_k - \log y_0}{k},$$

což je přesnější.

Pro fysiku je důležitější případ funkce $y = y_0 \,.\, a^{-x}$ pro $a > 1$, který ovšem přechází v prvý $y = y_0 \,.\, b^x$ pro $b = \frac{1}{a} < 1$. Přes to je vhodné vyšetřovati tuto závislost zvlášť. Popudem může býti fysikální měření útlumu kyvadla nebo klesání teploty rovnoměrně zahřátého tělesa. Dostaneme opět tabulku a diagramy na papíře obyčejném i pologaritmickém. Druhý diagram je přímka $\log y = - x \,.\, \log a + \log y_0$ a prozrazuje tudíž závislost exponenciální. — Jiný příklad (z praktika) je nalézti zákon, jak klesá s dobou t napětí kondensátoru, který se vybíjí provázkem do země (proudem neustáleným).

Obdržíme vztah

$$E = E_0 \,.\, a^{-t},$$

a dále

$$\log a = \frac{\log E_0 - \log E}{t}.$$

c) Jiná příležitost k výkladu o funkci exponenciální je složené úrokování se základními vzorci $K = K_0 r^n$ a $K_0 = K \, . \, r^{-n}$. Dáme znázorniti na diagramu úrokování jednoduché, pro zřetelnost při $p = 50$, t. j. funkci $y = y_0 + \frac{1}{2} y_0 \, . \, x$ (pro $y_0 = 1$) a do téhož diagramu funkci $y = 1{,}5^x$ pro $x = 1, 2, \ldots$, postupující schodovitě po křivce exponenciální. Základní vztah $K = K_0 (1 + i)^t$ vznikl z úvahy, že *přírůstek jistiny (úrok) za jedno období úrokovací* u $(= \Delta K) = iK$ *je přímo úměrný okamžité hodnotě jistiny* K. Proto

$$K_t = K_{t-1}(1 + i) = K_{t-1} \, . \, r.$$

Zkrátíme-li období úrokovací na n-tinu roku, změní se jen r na $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = \varrho$ a základní vztah zůstává exponenciální ve tvaru

$$K = K_0 \varrho^t.$$

Délka připisovacího (úrokovacího) období nemá tedy vliv na podstatu funkce, nýbrž jen na číselnou hodnotu kvocientu ϱ, který poněkud roste s rostoucím počtem n období za rok. (Několik vhodných příkladů.) Schůdky diagramu jsou kratší. Závislost zůstane tedy exponenciální i pro nekonečně krátká období, čili při tak zvaném s p o j i t é m v z r ů s t u. Schůdky diagramu se staly nekonečně malými, křivka je hladká, spojitá, $\varrho = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$. Existence této limity plyne z povahy vzrůstu a jako „přírodní" důkaz je možno uvésti spojitý vzrůst stromů. Ve tř. VII. (na gymnasiích VIII.) je výpočet této limity vhodným příkladem Newtonovy binomické řady, kde se odvodí, že

$$\varrho = e^i = e^{\frac{p}{100}}.$$

Výraz pro spojité úrokování je pak $K = K_0 e^{\frac{p}{100} t}$ a obecně pro spojitý vzrůst:

$$y = y_0 e^{\lambda t}.$$

A nyní přicházíme k i n f i n i t e s i m á l n í vlastnosti exponenciální funkce. Spojité úrokování spočívá v tom, že připisuje jednoduchý úrok za každý diferenciál roku, tedy

$$\mathrm{d}K = \frac{p}{100} K \, . \, \mathrm{d}t.$$

Odtud změnou označení pro funkci $y = y_0 e^{\lambda t}$ plyne

$$\mathrm{d}y = \lambda \, . \, y \, . \, \mathrm{d}t.$$

Diferenciál exponenciální funkce je přímo úměrný hodnotě funkce, právě tak jako úrok z jistiny za sebe menší dobu je při spojitém úrokování přímo úměrný okamžité hodnotě jistiny.

Tento názorný výklad značně napomáhá pochopení odvozeného diferenciálního vztahu a usnadňuje jeho praktické užití. Metodická cena celého postupu se objeví, uvážíme-li, že jsme odvodili diferenciál exponenciální funkce bez výpočtu nesnadné limity $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$, jen užitím pojmu úroku a že současně známe integrál diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \lambda \, . \, \mathrm{d}t \text{ ve tvaru } y = y_0 e^{\lambda t}.$$

Ale nejen to. Máme také hned výraz pro spojitě ubývající veličinu

$$y = y_0 \, . \, e^{-\lambda t} \text{ a } \mathrm{d}y = - \lambda \, . \, y \, . \, \mathrm{d}t,$$

a dále vzorce:

$$\begin{aligned} y &= e^x, & \mathrm{d}y &= e^x \, . \, \mathrm{d}x \\ x &= \lg y, & \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}y}{y} \\ y &= a^x, & \mathrm{d}y &= a^x \, . \lg a \, . \, \mathrm{d}x \\ x &= \log_a y, & \mathrm{d}x &= \log_a e \, . \, \frac{\mathrm{d}y}{y} \end{aligned}$$

a ovšem zas nazpět integrály napsaných diferenciálů.

Nyní lze řešiti mnoho zajímavých příkladů: o spojitém vzrůstu dříví v lese, o pádu tělesa v odporujícím prostředí, ubývá-li zrychlení přímo úměrně s rychlostí, důkaz o ubývání tlaku do výše, útlum kyvadla nebo kmitů, rozpadání radioaktivních prvků (Val. Tab. 33, 10. vyd.), absorpce světla a pod. To však považuji za vedlejší výtěžek.

Hlavní věcí zůstává, že jsme *elementárními* prostředky pronikli dosti hluboko v poznání vlastností funkce exponenciální. Zároveň jsme pak ukázali cestu, jak je třeba vykládati i jiné funkce. Nestačí na př. spokojiti se při kvadratické funkci grafem (parabolou), neboť okem se parabola nepozná, tím méně její stupeň. Je třeba vyložiti, že druhé diference hodnot jsou konstantní, navázati na součet aritmetické řady, který je funkcí kvadratickou, jednotlivé členy lineární funkce indexu, jejich diference konstantní a pod. Tomu se teprve může říkat úvod do funkčního myšlení. A dále chceme zdůrazniti užitečnost diagramu na *papírech* jednoduše a dvojitě *logaritmických* (pro funkce $y = ax^p$). Kdyby byl Kepler měl tento posledně jmenovaný papír, nemusil hledati 3. zákon 10 let, měl by jej okamžitě. Ve fysikálním praktiku se hodí k důkazu $s = s_1 t^2$, $vp = k$, $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{m_1}}$ a pod.*) Užitečnost těchto papírů se mi zdá pro žáky mnohem větší a použití snazší nežli nomogramy. Raději méně, ale do hloubky! Bylo by ovšem třeba upraviti též v tom směru učebnice.**)

Několik příkladů k branné výchově v matematice.

Prof. **Ota Setzer**, Kralupy n. Vlt.

V článku „Branná výchova v přírodovědeckém vyučování" (časopis matem. a fys. 1937, D str. 299—301) věnoval RNDr. K. Šoler pozornost i matematice. Na řadě vojenských disciplin ukázal, odkud lze vzíti vhodný materiál pro brannou výchovu v matematice.

Profesorka a profesor-nevoják potřebují však příklady již hotové. Proto jsem sestavil několik příkladů z nejužívanějších vojenských oborů armád cizích i naší, aby na nich byly probírány různé úseky učiva z vyšších tříd střední školy.[1])

---

*) Viz Rozhledy 1934, Pleskot: O dvojitém papíru logaritmickém, str. 33 až 39.

**) A přidati matematice větší počet hodin, zvláště na gymnasiích všech typů. (Pozn. redakce.)

[1]) Pro ulehčení práce kolegům připojuji příslušnou partii a třídu r. g., ke kterým se látka příkladů pojí a současně uvádím i heslo event. výkladu o vojenství:

Př. 1.: Postupné úměry; IV., účinky střel, činnost CPO.

Př. 2.: Slovní rovnice lineárné o 1 neznámé; IV., peněžní náležitosti mužstva, hodnosti poddůstojníků.

Př. 3.: Soustava lineárních rovnic o 3 neznámých; IV., distinkce nižších a vyšších důstojníků.

Př. 4.: Soustava kvadr. rovnic o 2 neznámých; V., délka a rychlost pochodujících proudů, pochodová kázeň, organisace průchodišť.

Př. 5.: Počet pravděpodobnosti; VII., strážní služba.

Př. 6.: Stereometrie, objem válců; V., telegrafní vojsko.

Př. 7.: Stereometrie, objem hranolů; III. nebo V., zákopnické čety.

Př. 8.: Přímá úměrnost, funkce; IV. nebo anal. geom. elipsy, VII., ženijní vojsko.

Př. 9.: Stereometrie, objem jehlanu; V., ubytování vojska.

Př. 10. a 11.: Trigonometrie, pravoúhlý trojúhelník; VI., ráže, druhy nábojů.

Př. 12.: Trigonometrie, kosinová věta; VI. busola, pochodový úhel.

Př. 13.: Opakování trigon. a anal. geom.; VIII., tanky, sjízdnost cest.

Př. 14.: Trigonometrie, funkce polovičního úhlu v trojúhelníku; VI., druhy hlášení.

Př. 15.: Buď Pythagorova věta; III. nebo anal. geom., VII., dělostřelectvo: druhy a způsoby užití.

Př. 16.: Anal. geometrie hyperboly; VII., zvukoměřičská četa.

Př. 17.: Plocha trojúhelníku, anal. geom.; VII., druhy map.