Miloslav Hlaváček
K řešeni $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ celými čísly

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D1--D4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120801

ČLÁNKY A REFERÁTY.

K řešení $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ celými čísly.

Miloslav Hlaváček, Náchod.

V článku „Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými“ (Rozhledy **13** (1934), str. 73—75 a 101—102) jsem ukázal, že úplně řešiti nadepsanou rovnici znamená totéž jako najíti všecka racionálná řešení rovnice

$$-r^4s^4 + rs^3 + r^3s - 1 = A^2. \tag{1}$$

Tuto rovnici lze však převésti na jinou obdobnou, kde levá strana je mnohočlen st. 3 a lze pak k jejímu řešení užíti eliptické funkce $\wp(x)$ a jejího addičního teorému.

Nejjednodušším řešením rovnice (1), vedoucím k triv. řešení $x = z$, $y = u$ nadepsané rovnice, jest $s = \frac{1}{r}$. Vycházejíce od něho klaďme v (1) $s = s' + \frac{1}{r}$; obdržíme tím rovnici pro s'. Nechť je s' kterékoliv (racionálné) řešení, vždy možno — i když $r = 1$[1]) — příslušné A psáti ve tvaru

$$A = -\frac{r^2-1}{r}\mu s'^2 + \frac{r^2-3}{2}s' + \frac{r^2-1}{r}, \tag{2}$$

kde μ jest racionálné. Dosadíme-li za A podle (2), obdržíme po úpravě kvadr. rovnici pro s', z níž plyne

$$s'_{1,2} = \frac{\mu\dfrac{(r^2-1)(r^2-3)}{r} - 4r^3 + r \pm \sqrt{D}}{2\left[\left(\dfrac{r^2-1}{r}\right)^2\mu^2 + r^4\right]}, \tag{3}$$

kde

$$D = 8\mu^3\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^4 + \mu^2\,\frac{12\,(1-2r^2)\,(r^2-1)^2}{r^2} +$$
$$+ \mu\,(18r^4 - 24r^2 + 6) - r^8 - 2r^6 + 5r^4 + r^2.$$

[1]) Je-li $r = 1$, pak $A^2 = (1 - s^3)(s - 1) = (-s^2 - s - 1)(s - 1)^2$ má toliko jediné rac. řešení $s = 1$, a $A = 0$, což právě udává rovnice (2). Ostatně se jedná o triv. případ.

Běží tedy o rac. řešení rovnice $D = B^2$. Kladme v D

$$\mu = \frac{v \cdot r^2 - r^2 (1 - 2r^2)}{2 (r^2 - 1)^2}, \quad r \neq 1 \tag{4}$$

a násobme pak obě strany výrazem $4r^4 (r^2 - 1)^2$. Dojdeme k rovnici

$$4v^3 - 12r^4 v - 4r^2 (r^8 + 1) = C^2, \text{ kde } C = \pm \frac{2(r^2 - 1)}{r} \cdot B. \tag{5}$$

Ježto základní eliptická funkce $\wp(x)$ vyhovuje rovnici

$$4\wp^3(x) - g_2 \wp(x) - g_3 = \wp'^2(x), \text{ kde } \wp'(x) = \frac{d\,\wp(x)}{dx},$$

plyne z ní derivováním, že každá vyšší derivace funkce $\wp(x)$ se dá vyjádřiti jako rac. celistvá funkce $\wp(x)$ a $\wp'(x)$. Dále platí

$$\wp(x + x') = -\wp(x) - \wp(x') + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(x) - \wp'(x')}{\wp(x) - \wp(x')}\right)^2.$$

Je-li tedy $\wp(x)$, $\wp'(x)$, a $\wp(x')$, $\wp'(x')$ současně racionálné, pak jest — při racionálných g_2 a g_3 — i $\wp(x + x')$ a $\wp'(x + x')$ racionálné. Toho můžeme užíti pro rovnici (5), kde lze klásti $v = \wp(x)$, $g_2 = 12r^4$, $g_3 = 4r^2 (r^8 + 1)$.

Jsou-li $v_1 = \wp(x_1)$, $v_2 = \wp(x_2)$, $v_3 = \wp(x_3)$, ... rac. řešení taková, že $x_i \neq n \cdot \omega + \sum\limits_l k_l x_l$, ať počet sčítanců je jakýkoliv, i, n, l, k_l ať jsou jakákoli celá čísla (ovšem i a l toliko kladná a $i \neq l$), a kde ω jest perioda příslušné $\wp$-funkce, pak jsou další rac. řešení obsažena ve výraze

$$v = \wp(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots), \text{ kde } m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

a ovšem počet sčítanců jest konečný.

Vyjděme od triv. řešení rovnice (1) $s = \frac{1}{r^3}$; k tomu příslušné v, vypočtené z (2) a (4), vezmeme za $\wp(x_1)$. Pro $m_2 = m_3 = \ldots = 0$, $m_1 = 1, 2, 3, \ldots$ pak obdržíme postupně užitím součtové poučky pro $\wp(x)$

$$\wp(x_1) = r^4 + r^2 + 1, \quad \wp'(x_1) = 2 (r^6 + r^4 + r^2 + 1),$$

$$\wp(2x_1) = \tfrac{1}{4}(r^4 + 10r^2 + 1), \quad \wp'(2x_1) = \tfrac{1}{4}(r^6 - 17r^4 - 17r^2 + 1),$$

$$\wp(3x_1) = \frac{r^{12} + 101\, r^{10} + 291\, r^8 + 238\, r^6 + 291\, r^4 + 101\, r^2 + 1}{9(r^2 - 1)^4},$$

$$\wp'(3x_1) = \frac{2\, r^{18} + \ldots}{27\, r^{12} + \ldots},$$

atd., obecně, jak se snadno dokáže,

$$\wp(mx_1) = \frac{r^{2l} + \ldots}{m^2 r^{2l-4} + \ldots}, \quad \wp'(mx_1) = \frac{2r^{3l} + \ldots}{m^3 r^{3l-6} + \ldots}.$$

Ke každému $\wp(ix_1)$ přísluší podle (3) obecně dvě různá $s'^{(i)}$ a tedy i $s^{(i)}$. Vypočteme postupně pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$s_1^{(1)} = \frac{4r^6 + r^4 + 10r^2 + 1}{r(r^8 + 10r^4 + r^2 + 4)}, \quad s_2^{(1)} = \frac{1}{r^3} \text{ (triv. případ)},$$

$$s_1^{(2)} = \frac{9r^8 + \ldots}{r(r^8 + \ldots)}, \quad s_2^{(2)} = \frac{1}{r} \text{ (triv. případ)},$$

$$s_1^{(3)} = \frac{16r^{18} + \ldots}{r(r^{18} + \ldots)}, \quad s_2^{(3)} = \frac{4r^6 + r^4 + 10r^2 + 1}{r(r^6 + 10r^4 + r^2 + 4)} = s_1^{(1)}$$

atd., obecně

$$s_1^{(m)} = \frac{(m+1)^2 r^{2h} + \ldots}{r^{2h+1} + \ldots}, \quad s_2^{(m)} = \frac{(m-1)^2 r^{2j} + \ldots}{r^{2j+1} + \ldots}.$$

Z těchto $s^{(i)}$ odvodíme výrazy pro x, y, z, u postupem naznačeným v uvedeném již článku (rovnice 5, 6, 7). Obecně začínají tyto výrazy:

$$x = r^{3q+1} + (m+1)^3 r^{3q} + \ldots, \quad z = (m+1) r^{3q+1} + r^{3q} + \ldots,$$
$$y = r^{3q+1} - (m+1)^3 r^{3q} + \ldots, \quad u = -(m+1) r^{3q+1} + r^{3q} + \ldots$$

Případy $m = 1$ a 2 jsou uvedeny v onom článku v plném znění.

Máme-li takováto x, y, z, u vypočtena, můžeme, abychom obdrželi nová R, S hovící rovnici (1), utvořiti výrazy (kombinujíce různě znaménka)

$$R = \frac{\pm x \pm y}{\pm z \pm u}, \quad S = \frac{\pm x \mp y}{\pm z \mp u},$$

po př. přehozením vnitřních členů v rovnici $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ utvořiti

$$R = \frac{\pm x \pm z}{\pm y \pm u}, \quad S = \frac{\pm x \mp z}{\pm y \mp u}.$$

Dosaďme na př. do výrazů $R = \dfrac{x+z}{y-u}$, $S = \dfrac{x-z}{y+u}$ za x, y, z, u řešení uvedené v Časopise, roč. **63**, sešit 7, na 1. str. dole. Pak krácením obdržíme $R = \left(\dfrac{r+1}{r-1}\right)^3$. Substitucí $t = \dfrac{r+1}{r-1}$ obdržíme

$$R = t^3, \quad S = \frac{t^6 - 2t^4 + t^2 + 1}{t(t^6 + t^4 - 2t^2 + 1)}, \tag{7}$$

z čehož plyne řešení uvedené v Časopise tamtéž na 3. str. Obě řešení[2]) jsou tedy v podstatě totožná.

Můžeme však, vycházejíce z S příslušného k R, postupovati dále uvedeným již způsobem: vypočísti z (2) a (4) příslušné v (k S patří obecně dvě V, ježto A ve (2) možno podle (1) vzíti kladně i záp.) a užíti rovnice (6). Na př. S uvedenému v (7) odpovídá $v \equiv \wp(x) = t^{10} + t^2$, $C \equiv \wp'(x) = 0$, takže $x = \frac{1}{2}w$. Dá se ukázati, že pomocí (6) lze dospěti ke zcela novým řešením.

Jest ovšem otázka, zda výsledky, k nimž možno způsobem naznačeným v tomto článku dojíti, jsou všechna možná řešení uvažované rovnice.

Ohyb světla na ultrasonických vlnách v kapalinách.

Ladislav Zachoval, Praha.

Měření rychlosti zvuku v plynech potvrzovalo v souhlase s teorií, že rychlost zvuku v plynech nezávisí na frekvenci. Teprve 1925 byla zjištěna v plynném CO_2 závislost rychlosti na frekvenci při frekvencích řádově 10^5 1/sec. Ukázalo se, že tento zjev lze pozorovati při většině víceatomových plynů. Teorii disperse zvuku v plynech podal 1931 H. O. Kneser[1].

Rychlost zvuku v plynu je

$$v = \sqrt{\frac{p}{\varrho}\left(1 + \frac{R}{C_v}\right)}.$$

Roste-li frekvence zvuku, chová se plyn tak, jako by se zmenšovalo C_v. V plynech, u nichž se celková energie molekuly skládá z energie translačního pohybu molekuly a z energie kmitavého pohybu atomů v molekule, je koncentrace, t. j. počet molekul v molu, jejichž atomy vykonávají jistý druh kmitavého pohybu, závislá při rovnovážném stavu pouze na teplotě. Při adiabatickém ději, jakým je šíření zvuku, se tedy mění se změnami teploty koncentrace těchto kmitajících molekul. Je-li však frekvence zvuku tak vysoká, čili doba jedné periody tak krátká, že v této době nemůže nastati v plynu rovnovážný stav odpovídající změněným podmínkám, zmenšuje se amplituda změn koncentrace. S rostoucí frekvencí se stále méně translační energie molekul mění v energii kmitavou a zpět z kmitavé v translační. Dodáme-li tedy plynu zvenčí totéž množství energie, způsobí to při vyšších frekvencích

[2]) Shodují se v podstatě s řešeními udanými v Dickson-Bodewig: Einführung in die Zahlentheorie, 1931, na str. 55, věta 50 (řešení Eulerovo) a na str. 56 v úloze č. 4.