Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zbyněk Nádeník

O polárních křivkách prostorové kubiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, D131--D139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120778

integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Lambda t} u(x, t)\, dt$$

je pak pro všechna $\Lambda > \lambda$ patrna z odhadu

$$\int_{-\infty}^{-\infty} |e^{-\Lambda t} u(x, t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\Lambda t} |u(x, t)|\, dt \leqq M_0 \int_{0}^{\infty} e^{-\Lambda t + \lambda t}\, dt = M_0 \int_{0}^{\infty} e^{-(\Lambda - \lambda) t}\, dt.$$

Je tedy zobrazení původního problému (A) tak, jak nás vedlo k úloze (B), opravdu oprávněno.

LITERATURA.

S theoretického hlediska jednají o Laplaceově transformaci nejlépe spisy:

G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.

COURANT-HILBERT: Methoden der mathematischen Physik II., Berlin 1937. (Vyšlo též rusky r. 1945.)

Stručné poučení o Fourierových integrálech najde čtenář třeba v knihách:

V. I. SMIRNOV: Kurs vysšej matematiki II (str. 463—473), Leningrad-Moskva 1948.

W. ROGOSINSKI: Fouriersche Reihen, Berlin-Leipzig 1930 (str. 72—77).

*

La base théorique de la transformation de Laplace avec une application dans la physique mathématique. Ingénieurs, physiciens et même les mathématiciens se servent de plus en plus du calcul opératoire. La première partie de cet article donne la démonstration de deux théorèmes fondamentaux qui forment la base de cet instrument mathématique, dans la seconde partie nous nous occuperons d'application des résultats obtenus à la solution d'un problème d'équation aux dérivées partielles — problème renfermant un grand nombre de cas qui peuvent se présenter dans la physique mathématique. Il s'agit ici des choses bien connues et nos considérations ne sont pensées que pour l'information.

O POLÁRNÍCH KŘIVKÁCH PROSTOROVÉ KUBIKY.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

1.

Definice [I,1]. *Budiž dána prostorová kubika c. Nechť její bisekanta bodem Y neincidentním s kubikou c ji seče v bodech ${}^1C$, ${}^2C$.*

Bod $\mathbf{Y}$ určený vztahem

$$({}^1C, {}^2C, Y, \mathbf{Y}) = -1$$

nazveme pólem bodu Y (vzhledem ke kubice c).

Budiž $T \not\equiv C$ bod tečny t_{cC}.[1])

Pólem $\mathbf{T}$ bodu T nazveme bod C; $\mathbf{T} \equiv C$.

---

[1]) Tečnu resp. oskulační rovinu křivky q v jejím bodě R značíme $t_q{}^R$ resp. $\omega_q{}^R$.

Věta [I,1]. *Budiž dána kubika c rovnicemi*

$$x_i = t_1^{4-i} t_2^{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{1,1}$$

Bod $Y(y_i)$ neincidentní s kubikou c má pól $\mathbf{Y}(\mathbf{y}_i)$[2])

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= 3y_1y_2y_3 - 2y_2^3 - y_1^2y_4 \\
\mathbf{y}_2 &= -y_1y_2y_4 - y_2^2y_3 + 2y_1y_3^2 \\
\mathbf{y}_3 &= y_1y_3y_4 + y_2y_3^2 - 2y_2^2y_4 \\
\mathbf{y}_4 &= -3y_2y_3y_4 + 2y_3^3 + y_1y_4^2.
\end{aligned} \tag{1,2}$$

Důkaz. Aby bod $\mathbf{Y}(\mathbf{y}_i)$ byl harmonickým pólem bodu $Y(y_i)$ vzhledem ke každé kvadrice

$$a_{13}x_2^2 + a_{24}x_3^2 - a_{13}x_1x_3 - a_{14}x_1x_4 + a_{14}x_2x_3 - a_{24}x_2x_4 = 0$$

kubikou (1,1) a tudíž i pólem vzhledem ke kubice (1,1), musí býti

$$\begin{aligned}
y_3\mathbf{y}_1 - 2y_2\mathbf{y}_2 + y_1\mathbf{y}_3 &= 0 \\
y_4\mathbf{y}_1 - y_3\mathbf{y}_2 - y_2\mathbf{y}_3 + y_1\mathbf{y}_4 &= 0 \\
y_4\mathbf{y}_2 - 2y_3\mathbf{y}_3 + y_2\mathbf{y}_4 &= 0,
\end{aligned}$$

z čehož plynou rovnice (1,2).

Definice [I,2]. *Budiž k racionální křivka (π plocha) různá od kubiky c nebo její tečny (od plochy tečen kubiky c). Nechť bod K (P) probíhá křivku k (plochu π).*

Geometrické místo jeho pólu **K** (**P**) *nazveme polárou* **k** *křivky k (polární plochou plochy π).*

Křivka k stupně n neincidentní s kubikou c má poláru **k** stupně $3n$ a naopak. O polárách platí tyto věty, v nichž C značí společný regulární bod křivek k, c:

Věta [I,2]. *Budiž s spojnice bodu C s druhým průsečíkem kubiky c s rovinou tečnami t_{cC}, t_{kC}.*

Nutná a postačující podmínka pro to, aby incidence křivek k, c v bodě C snižovala stupeň poláry **k** *právě o 1, je:*

Křivka k se v bodě C nedotýká roviny ω_{cC}.

Polára **k** *jde pak bodem C a má v něm tečnu $t_{\mathbf{k}C}$ určenou vztahem*

$$(s, t_{cC}, t_{kC}, t_{\mathbf{k}C}) = -1. \tag{1,3}$$

Důkaz. Křivka k stupně n s regulárním bodem $C \equiv (1, 0, 0, 0)$ pro $\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_0\lambda_1^n + a_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + a_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2^2 + \dots \\
x_2 &= b_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + b_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2^2 + \dots \\
x_3 &= c_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + c_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2^2 + \dots \\
x_4 &= d_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + d_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2^2 + \dots
\end{aligned} \tag{1,4}$$

[3])

má poláru **k**

---

[2]) Viz GINO LORIA, Curve sghembe speciali algebriche e transcendenti, díl I, (1925), str. 91—98, kde body Y, $\mathbf{Y}$ jsou nazvány konjugované.

[3]) Mlčky zde i v dalším předpokládáme, že rovnice křivky splňují podmínky na ni kladené.

$$\begin{aligned}
x_1 &= -a_0^2 d_1 \lambda_1^{3n-1} + (3a_0 b_1 c_1 - a_0^2 d_2 - 2a_0 a_1 d_1)\,\lambda_1^{3n-2}\lambda_2 + \dots\\
x_2 &= (2a_0 c_1^2 - a_0 b_1 d_1)\,\lambda_1^{3n-2}\lambda_2 + \dots\\
x_3 &= a_0 c_1 d_1 \lambda_1^{3n-2}\lambda_2 + \dots\\
x_4 &= a_0 d_1^2 \lambda_1^{3n-2}\lambda_2 + \dots
\end{aligned} \tag{1,5}$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby uvažovaná incidence snižovala stupeň poláry **k** právě o 1, je $d_1 \neq 0$, t. j. křivka k se v bodě C nedotýká roviny $\omega_{cC} \equiv x_4 = 0$.

Pro důkaz další části věty zvolme za rovinu tečen t_{cC}, t_{kC} rovinu $x_3 = 0$. Pak je $c_1 = 0$ a tedy

$$s \equiv x_2 = x_3 = 0, \quad t_{cC} \equiv x_3 = x_4 = 0,$$

$$t_{kC} \equiv d_1 x_2 - b_1 x_4 = x_3 = 0, \quad t_{kC} \equiv d_1 x_2 + b_1 x_4 = x_3 = 0,$$

takže vskutku platí (1,3).

Věta [I,3a]. *Nechť incidence křivek k, c v bodě C snižuje stupeň poláry* **k** *právě o 2.*

Pak křivka k má v bodě C

[V_a] s rovinou ω_{cC} styk alespoň 1. řádu a $t_{kC} \neq t_{cC}$ anebo

[V_b] s tečnou t_{cC} styk právě 1. řádu.

Důkaz. Má-li se stupeň poláry (1,5) křivky (1,4) snížit uvažovanou incidencí právě o 2, musí býti $d_1 = 0$, t. j.

$$\begin{aligned}
x_1 &= (3a_0 b_1 c_1 - a_0^2 d_2)\,\lambda_1^{3n-2} + \dots\\
x_2 &= 2a_0 c_1^2 \lambda_1^{3n-2} + (4a_0 c_1 c_2 - b_1^2 c_1 - a_0 b_1 d_2)\,\lambda_1^{3n-3}\lambda_2 + \dots\\
x_3 &= (b_1 c_1^2 + a_0 c_1 d_2)\,\lambda_1^{3n-3}\lambda_2 + \dots\\
x_4 &= 2c_1^3 \lambda_1^{3n-3}\lambda_2 + \dots
\end{aligned} \tag{1,6}$$

a alespoň jeden z koeficientů

$$3a_0 b_1 c_1 - a_0^2 d_2,\ 2a_0 c_1^2$$

nenulový. K tomu je nutné a stačí, aby buďto

$$c_1 \neq 0,\ d_2 = 0 \text{ anebo } c_1 = 0,\ d_2 \neq 0 \text{ anebo } c_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0.$$

$c_1 \neq 0$ vede k výroku [V_a], $c_1 = 0$, $d_2 \neq 0$ k [V_b].

Věta [I,3b]. *Nechť pro křivku k platí v bodě C výrok [V_a] (výrok [V_b]) z věty* [1,3a].

Incidence křivek k, c v bodě C snižuje stupeň poláry **k** *právě o 2 a polára* **k**

[W_a] protíná tečnu t_{cC} v bodě $T \neq C$ a nedotýká se v něm roviny ω_{cC} ([W_b] jde bodem C a má v něm tečnu $t_{kC} \equiv t_{cC}$).

Důkaz. Jestliže pro křivku (1,4) platí výrok [V_a], je $d_1 = 0$, $c_1 \neq 0$ a stupeň poláry **k** se uvažovanou incidencí snižuje právě o 2. Z jejích rovnic (1,6) a $c_1 \neq 0$ plyne [W_a].

Jestliže pro křivku k platí $[V_b]$, je $c_1 = d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$, takže stupeň poláry **k** se incidencí v bodě C zase snižuje právě o 2. Z rovnic (1,6) a $d_2 \neq 0$ plyne $[W_b]$.

Věta [I,4]. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby incidence křivek k, c v bodě C snižovala stupeň poláry **k** právě o 3, je:*

Křivka k má v bodě C

s tečnou t_{cC} resp. rovinou ω_{cC} styk alespoň 1. resp. 2. řádu a

s alespoň jednou polární plochou oskulační roviny kubiky c různé od roviny ω_{cC} styk právě 2. řádu.

*Polára **k** jde pak bodem C a má v něm s tečnou t_{cC} resp. rovinou ω_{cC} styk alespoň 1. resp. 2. řádu.*

Důkaz. I. Má-li se stupeň poláry **k** snížit uvažovanou incidencí právě o 3, musí býti (viz (1,5) a (1,6))

$$-a_0^2d_1 = 0;\quad 3a_0b_1c_1 - a_0^2d_2 = 0,\quad 2a_0c_1^2 = 0,$$

z čehož $c_1 = d_1 = d_2 = 0$, t. j.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (\ 3a_0b_1c_2 - 2b_1^3 - a_0^2d_3)\,\lambda_1^{3n-3} + \dots \\
\mathbf{x}_2 &= (-a_0b_1d_3 - b_1^2c_2 + 2a_0c_2^2)\,\lambda_1^{3n-4}\lambda_2 + \dots \\
\mathbf{x}_3 &= (\ a_0c_2d_3 + b_1c_2^2 - 2b_1^2d_3)\,\lambda_1^{3n-5}\lambda_2^2 + \dots \\
\mathbf{x}_4 &= (-3b_1c_2d_3 + 2c_2^3 + a_0d_3^2)\,\lambda_1^{3n-6}\lambda_2^3 + \dots
\end{aligned} \tag{1,7}$$

a dále musí býti

$$3a_0b_1c_2 - 2b_1^3 - a_0^2d_3 \neq 0. \tag{1,8}$$

Rovnice $c_1 = d_1 = d_2 = 0$ říkají, že křivka (1,4) má v bodě C s tečnou t_{cC} resp. rovinou ω_{cC} styk alespoň 1. resp. 2. řádu; relace (1,8) vyjadřuje, že s polární plochou

$$3x_1x_2x_3 - 2x_2^3 - x_1^2x_4 = 0$$

roviny $x_1 = 0$ má křivka (1,4) v bodě C styk právě 2. řádu.

II. Je zřejmé, že platí i opak.

Zbývající část věty se ihned potvrdí z rovnic (1,7).

Věta [I,5]. *Nechť křivky ${}^ik$ ($i = 1, 2$) protínají tečnu t_{cC} v regulárním bodě $T \not\equiv C$ a nechť tečny $t_{{}^1kT} \neq t_{cC} \neq t_{{}^2kT}$ leží v tečné rovině kubiky c v bodě C.*

Poláry ${}^i\mathbf{k}$ jdou bodem C a mají v něm společnou tečnu $t_{{}^1\mathbf{k}C} \equiv t_{{}^2\mathbf{k}C} \neq t_{cC}$ ležící v rovině ω_{cC}.

Důkaz. Zvolíce bod $T \equiv (a_0, b_0, 0, 0)$ $(b_0 \neq 0)$ pro $\lambda_2 = 0$ a za rovinu tečen t_{cC}, $t_{{}^1kT}$, $t_{{}^2kT}$ rovinu $x_3 = 0$, jsou rovnice křivek ${}^ik$

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_0\lambda_1^n + {}^ia_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + {}^ia_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \dots \\
x_2 &= b_0\lambda_1^n + {}^ib_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + {}^ib_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \dots \\
x_3 &= {}^ic_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \dots \\
x_4 &= {}^id_1\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + {}^id_2\lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \dots,
\end{aligned}$$

kde ${}^i d_1 \neq 0$, takže poláry ${}^i\mathbf{k}$ jsou

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= -2b_0^3\lambda_1^{3n} + \dots \\
\mathbf{x}_2 &= \qquad -a_0 b_0 {}^i d_1 \lambda_1^{3n-1}\lambda_2 + \dots \\
\mathbf{x}_3 &= \qquad -2b_0^2 {}^i d_1 \lambda_1^{3n-1}\lambda_2 + \dots \\
\mathbf{x}_4 &= \qquad\qquad a_0 {}^i d_1^2 \lambda_1^{3n-2}\lambda_2^2 + \dots
\end{aligned}$$

Přímka

$$2b_0x_2 - a_0x_3 = x_4 = 0$$

je jejich tečna v bodě C.

Poznámka. Vět [1,2] až [1,5] lze použít při konstrukcích polár daných křivek.

Věta [1,6]. *Budiž ${}^1k$, ${}^2k$ přímky z roviny ω_{cC}, jež nejdou bodem C. Budiž ${}^{12}\mathbf{k}$ (${}^{21}\mathbf{k}$) polára přímky ${}^2k$ (${}^1k$) vzhledem ke kubice ${}^1\mathbf{k}$ (${}^2\mathbf{k}$).*

Poláry ${}^{12}\mathbf{k}$, ${}^{21}\mathbf{k}$ jsou vždy různé a z bodu C se promítají týmž kvadratickým kuželem.

Důkaz se provede napsáním rovnic příslušných polár; k tomu použijeme dvakrát rovnic (1,2) a transformace souřadnic.

2.

Definice [2,1]. *Nechť kubika k je totožná se svou polárou $\mathbf{k}$. Potom kubiku k nazveme autopolární (vzhledem ke kubice c).*[4])

Věta [2,1]. *Nechť autopolární kubika k protíná kubiku c v bodě C, v němž se nedotýká roviny ω_{cC}.*

a) *Tečna t_{kC} je bisekanta kubiky c;*

b) *rovina ω_{kC} je tečná rovina kubiky c v bodě C;*

c) *obě kubiky se protínají ještě alespoň v jednom bodě $'C \neq C$; tečna $t_{c'C}$ je bisekanta, rovina $\omega_{c'C}$ tečná rovina v bodě $'C$ kubiky k.*

Důkaz. a) Poněvadž $\mathbf{k} \equiv k$, je též $t_{\mathbf{k}C} \equiv t_{kC}$ a tedy podle věty [1,2] je tečna t_{kC} bisekanta kubiky c.

b) Poněvadž též kubika c je autopolární vzhledem ke kubice k, plyne b) z a) a věty [1,5].

c) Vztah kubik k, c je vzájemný; ježto však není možné, aby též tečna t_{cC} byla bisekanta kubiky k — neboť t_{cC} leží podle b) v rovině ω_{kC} a kubika k by s ní měla dva různé body společné — musí se kubiky k, c protínat ještě v alespoň jednom bodě $'C \neq C$ o vlastnostech vytčených v c).

Věta [2,2] (pomocná). *Budiž k autopolární kubika, protínající kubiku c v bodě C tak, že jejich incidence v tomto bodě snižuje stupeň její poláry právě o 1 resp. 2.*

---

[4]) Viz TH. REYE, Über Beziehungen zwischen kubischen Raumkurven, část II, Math. Annalen **75** (1914), str. 586—591.

Kubiky k, c se protínají ještě v bodě $'C \neq C$, v němž jejich incidence snižuje stupeň poláry křivky k právě o 2 resp. 1.

Důkaz. První část plyne jednoduše z vět [1,2], [2,1] a [1,3b].

Kubiky k, c leží na přímkové kvadrice $\varkappa$ a mají přímky téhož jejího regulu za bisekanty resp. tečny. V bodě C, v němž jejich incidence snižuje stupeň poláry křivky k právě o 2, platí pro ně výrok $[V_a]$ z věty [1,3a] (nemohou v něm míti společnou tečnu, neboť ta by musila ležeti na kvadrice $\varkappa$, takže obě kubiky by měly v bodě C i společnou oskulační rovinu, což v důsledku věty [1,4] vede ke sporu). Kubika c je autopolární vzhledem ke kubice k a snadno nahlédneme, že splňuje předpoklad věty [2,1]. Z ní a z věty [1,2] plyne druhá část věty [2,2].

Věta [2,3]. *Budiž k kubika procházející body C_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ kubiky c.*

Nutná a postačující podmínka pro to, aby byla autopolární, je:[5])

$[V_1]$ *v bodech C_1, C_2 se dotýká rovin ω_{cC_1}, ω_{cC_2},*

$[V_2]$ *tečny t_{cC_1}, t_{cC_2} jsou její bisekanty,*

$[V_3]$ *v bodech C_3, C_4 se nedotýká rovin ω_{cC_3}, ω_{cC_4} a*

$[V_4]$ *tečna t_{kC_2} leží na kvadrice kubikou c a tečnami t_{cC_1}, t_{cC_2}.*

Důkaz. I. Snižuje-li incidence kubik k, c v bodě C_j stupeň poláry křivky k právě o r_j, musí býti

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 6.$$

Této rovnici vyhovují dvě řešení (viz pozn. [5]))

$$r_1 = 3,\ r_2 = r_3 = r_4 = 1,$$
$$r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = r_4 = 1,$$

z nichž první je třeba vzhledem k větě [2,2] vyloučiti. Z druhého plyne $[V_1]$ způsobem uvedeným v důkazu předešlé věty, $[V_2]$ z $[V_1]$ a věty [1,3b] a $[V_3]$ z věty [1,2]. $[V_4]$ je pak již zřejmé.

II. Splňuje-li kubika k podmínky $[V_1]$ až $[V_3]$, je z vět [1,2], [1,3b] jasné, že její polára $\mathbf{k}$ je zase kubika. Pomocí vět [1,3b], [1,5] a [1,2] nahlédneme, že i kubika $\mathbf{k}$ splňuje podmínky $[V_1]$ až $[V_4]$. Snadno zjistíme, že existuje jediná kubika s vlastnostmi $[V_1]$ až $[V_4]$ (viz ostatně též I. část důkazu věty [2,4]) a tedy $k \equiv \mathbf{k}$.

Věta [2,4]. *Nechť platí předpoklad věty* [2,3].

a) *Budiž T_{12} resp. P_1 průsečík tečny t_{cC_1} s rovinou ω_{cC_2} resp. s rovinou určenou body C_2, C_3, C_4.*

b) *Budiž t_{12} resp. p_{12} průsečnice roviny ω_{cC_1} s rovinou určenou bodem C_1 a tečnou t_{cC_2} resp. s rovinou určenou body C_1, C_3, C_4.*

c) *Budiž τ_{13} resp. τ_{14} rovina určená tečnou t_{kC} a bodem C_3 resp. C_4.*

Nutná a postačující podmínka pro to, aby kubika k byla autopolární, je:[5])

[5]) Až na záměnu bodů C_j.

Platí $[V_1]$ až $[V_3]$ z věty [2,3] a alespoň jeden z výroků $[V_a]$, $[V_b]$, $[V_c]$:

$[V_a]$ Pro průsečík $K_1 \not\equiv C_1$ tečny t_{cC_1} s kubikou k je $(T_{12}, P_1, C_1, K_1) = - 1$.

$[V_b]$ Pro tečnu t_{kC_1} je $(t_{12}, p_{12}, t_{cC_1}, t_{kC_1}) = - 1$.

$[V_c]$ Pro rovinu ω_{kC} je $(\tau_{13}, \tau_{14}, \omega_{cC_1}, \omega_{kC_1}) = - 1$.

Důkaz. I. Je-li kubika c dána kanonickými nehomogenními rovnicemi, má kubika k, která jde jejími body

$C_1 \equiv (1, 0, 0, 0)$, $C_2 \equiv (0, 0, 0, 1)$, $C_3 \equiv (t_1^3, t_1^2, t_1, 1)$, $C_4 \equiv (t_2^3, t_2^2, t_2, 1)$

a splňuje podmínky $[V_1]$ až $[V_3]$, rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= [\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2]\, t^3 - \varrho^2 t_1 t_2 c_1 t^2 \\ x_2 &= \varrho[\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2]\, t^2 - \varrho^3 t_1 t_2 c_1 t \\ x_3 &= \varrho^2 c_1 t^2 + \varrho^2 c_2 t \\ x_4 &= \varrho^3 c_1 t + \varrho^3 c_2. \end{aligned}$$

Splňuje-li i podmínku $[V_4]$, je

$$\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + 2c_2 = 0 \tag{2,1}$$

a podle věty [2,3] je autopolární. Snadno se přesvědčíme, že pak platí $[V_a]$, $[V_b]$ i $[V_c]$.

II. a) Při uvedené volbě bodů C_j je

$$T_{12} \equiv (0, 1, 0, 0),\quad P_1 \equiv (t_1 + t_2, 1, 0, 0),\quad K_1 \equiv (c_2, -\varrho c_1, 0, 0),$$

$$(T_{12}, P_1, K_1, C_1) = \varrho(t_1 + t_2)\frac{c_1}{c_2} + 1.$$

Podmínka $(T_{12}, P_1, K_1, C_1) = - 1$ vede k rovnici (2,1), která znamená, že kubika k je autopolární.

b) Tu máme

$$\begin{gathered} t_{12} \equiv x_2 = x_4 = 0, \\ p_{12} \equiv x_2 - (t_1 + t_2)\, x_3 = x_4 = 0, \\ t_{cC_1} \equiv x_3 = x_4 = 0, \\ t_{kC_1} \equiv \varrho c_1 x_2 - [\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2]\, x_3 = x_4 = 0, \\ (t_{12}, p_{12}, t_{cC_1}, t_{kC_1}) = \frac{c_2}{\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2}. \end{gathered}$$

Podmínka $(t_{12}, p_{12}, t_{cC_1}, t_{kC_1}) = - 1$ vede k rovnici (2,1), t. j. kubika k je autopolární.

c) V tomto případě je

$$\begin{gathered} \tau_{13} \equiv \varrho c_1 x_2 - [\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2]\, x_3 + [\varrho t_1 t_2 c_1 + t_1 c_2]\, x_4 = 0, \\ \tau_{14} \equiv \varrho c_1 x_2 - [\varrho(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2]\, x_3 + [\varrho t_1 t_2 c_1 + t_2 c_2]\, x_4 = 0, \\ \omega_{k,C_1} \equiv \varrho^2 c_1^2 x_2 - \varrho c_1 [(t_1 + t_2)\, c_1 + c_2]\, x_3 + [t_1 t_2 c_1^2 + \varrho(t_1 + t_2)\, c_1 c_2 + \\ + c_2^2]\, x_4 = 0, \\ (\tau_{13}, \tau_{14}, \omega_{cC_1}, \omega_{kC_1}) = \frac{\varrho t_2 c_1 + c_2}{\varrho t_1 c_1 + c_2}. \end{gathered}$$

Z podmínky $(\tau_{13}, \tau_{14}, \omega_{cC_1}, \omega_{kC_1}) = -1$ plyne rovnice (2,1), takže kubika k je zase autopolární.

Věta [2,5]. *Budiž k kubika body C_j ($j = 1, 2, 3$) kubiky c.*
Nutná a postačující podmínka, aby byla autopolární, je:[6]

[W_1] *v bodě C_1 se dotýká roviny ω_{cC_1},*
[W_2] *tečna t_{cC_1} je její bisekanta,*
[W_3] *v bodě C_2 má s kubikou c společnou tečnu i oskulační rovinu,*
[W_4] *v bodě C_3 se nedotýká roviny ω_{cC_3} a*
[W_5] *její tečna t_{kC_3} leží na kvadrice kubikou c a tečnami t_{cC_1}, t_{cC_3}.*

Důkaz. I. Při obdobném označení jako v důkazu věty [2,3] musí býti

$$r_1 + r_2 + r_3 = 6.$$

Této rovnici vyhovují tři řešení:[6]

$$r_1 = 4,\ r_2 = r_3 = 1;$$
$$r_1 = r_2 = r_3 = 2;$$
$$r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 1.$$

První a druhé nevyhovuje vzhledem k větě [2,2].

Z třetího řešení plyne [W_1] podle věty [1,3a] (nemůže býti $t_{cC_1} \equiv t_{kC_1}$, neboť je i $t_{cC_2} \equiv t_{kC_2}$ a dvě různé kubiky na téže přímkové kvadrice, jež mají přímky téhož jejího regulu za bisekanty, nemohou míti tři společné body a ve dvou z nich společné tečny), [W_2] z [W_1] a věty [1,3b], [W_3] z věty [1,4] a [W_4] z věty [1,2]. [W_5] je důsledkem [W_1] až [W_3].

II. Polára **k** kubiky k je zase kubika a splňuje výroky [W_1] až [W_5], jak lehko nahlédneme z vět [1,2], [1,3a], [1,3b], [1,4], [1,5]. Obdobně jako v II. části důkazu věty [2,3] zjistíme, že ke kubice c existuje jediná kubika s vlastnostmi [W_1] až [W_5], t. j. $k \equiv$ **k**.

Věta [2,6]. *Nahraďme ve větě* [2,4] *předpoklad věty* [2,3] *předpokladem věty* [2,5], *bod C_4 bodem C_2, spojnici bodů C_2, C_4 tečnou t_{cC_2} a výroky* [V_1] *až* [V_3] výroky [W_1] *až* [W_4].
Věta [2,4] *je i pak správná.*

Důkaz této věty je modifikací důkazu věty [2,4] pro $t_2 = 0$.

Věta [2,7]. *Budiž k kubika body C_1, C_2 kubiky c.*
Nutná a postačující podmínka pro to, aby byla autopolární, je:
Kubiky k, c jsou sdruženy v osové involuční kolineaci o osách v tečnách t_{cC_1}, t_{cC_2}.

Důkaz. I. Při obdobném označení jako v důkazu věty [2,3] musí býti

$$r_1 + r_2 = 6,$$

t. j.

$$r_1 = 4,\ r_2 = 2;$$
$$r_1 = r_2 = 3.$$

---

[6]) Až na záměnu bodů C_1, C_2, C_3.

První řešení v důsledku věty [2,2] je třeba vyloučit. Body C_1, C_2 jsou zřejmě dotykové body těch vždy různých tečen kubiky c, jež leží na přímkové kvadrice kubikami k, c. Proto lze při druhém řešení při volbě bodů $C_1 \equiv (1, 0, 0, 0)$, $C_2 \equiv (0, 0, 0, 1)$ a kanonických rovnic kubiky c rovnice křivky k psáti (viz větu [1,4])

$$x_1 = a^\varepsilon \lambda^3,\ x_2 = a^\varepsilon \lambda^2,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = 1 \tag{2,2}$$

pro $\varepsilon = 1$. Její polára má rovnice (2,2) pro $\varepsilon = -1$ a tedy nutně $a = -1$, což dokazuje naše tvrzení.

II. O opaku se přesvědčíme jednoduchým výpočtem.

Pozn. 1. Z uvedených důkazů je jasné, že autopolární kubiky musí se protínat nejméně ve dvou a nejvýše ve čtyřech bodech.

Pozn. 2. Vět [2,3] až [2,7] lze použít ke konstrukci kubiky autopolární k dané kubice jejími dvěma, třemi nebo čtyřmi body anebo dvěma body mimo ni, neincidentními s touže její bisekantou nebo tečnou.

*

Sur les courbes polaires de la cubique gauche. On définit la courbe polaire **k** de la courbe k par rapport à la cubique gauche c comme le lieu des points conjugués aux points de la courbe k par rapport à la cubique c. Dans la première partie, on étudie l'influence du contact de la courbe k et de la cubique c sur la courbe polaire **k**. La deuxième partie traite les cubiques identiques avec leurs courbes polaires; elles s'appellent autopolaires. On trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que la cubique passante par 4, resp. 3, resp. 2 points de la cubique c soit autopolaire.