Bořivoj Kepr

O konstrukci paraboly, jsou-li dány její tečny a normála

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, D151--D154

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120772`

na přímce d involucí o středu D^* a páru sdruž. symetrických bodů D_1, E_1. Sestrojme kružnici l jdoucí body A_i, B_i, jak bylo ukázáno v odst. 5 a soustřednou kružnici l^v. Na d zvolme dva páry sdružených bodů ${}^1D$, ${}^1E$ a ${}^2D$, ${}^2E$ a na l vrchol C. Sestrojme dle základního trojúhelníka A_iB_iC obrazy ${}^1D_0$, ${}^1E_0$, ${}^2D_0$, ${}^2E_0$. Jako ve 3. způsobu předešlé úlohy i zde máme průsečík X_0 přímek ${}^1E_0{}^2E_0$, ${}^2D_0{}^1D_0$ a průsečík Y_0 přímek ${}^1E_0{}^2D_0$, ${}^2E_0{}^1D_0$, které určují obraz kuželosečky $A_iB_iCD_iE_i$. Tyto průsečíky třeba pootočiti na příslušných kružnicích x_0, y_0 tak, aby jejich spojnice se dotkla kružnice l^v. O stejný úhel otočíme v témže smyslu i C do C', který je prvním reálným bodem žádané kuželosečky. K úběžnému bodu U_0 pootočení přímky X_0Y_0 vyhledáme snadno na l bod U jako druhý bod kuželosečky. Diametrálný bod $\overline{U}$ má svůj obraz $\overline{U}_0$ v dotyčném bodě pootočené X_0Y_0 s l^v a vyhledáme způsobem dříve popsaným $\overline{U}$. Máme tak průměr $U\overline{U}$ a určíme střed kuželosečky. Směr os stanovíme též dle dřívějšího, čímž je kuželosečka reálnými prvky dostatečně určena.

Construction de la conique passant par quatre points imaginaires et semblable a une conique donnée. Suite d'un autre article, publié dans ce journal, *74* (1949), pp. D 73—D 80. Les points imaginaires A_i, B_i; D_i, E_i sont donnés par deux involutions elliptiques sur deux droites. On construit le cercle l quelconque qui passe par les points A_i, B_i et on choisit convenablement un point C sur le cercle l. Ce point C forme avec les points A_i, B_i le triangle fondamental de la *conjugation isogonale.* A l'aide de cette transformation quadratique, qui fait correspondre à la conique cherchée une droite, l'auteur construit cette conique.

O KONSTRUKCI PARABOLY, JSOU-LI DÁNY JEJÍ TEČNY A NORMÁLA.

BOŘIVOJ KEPR, Praha.

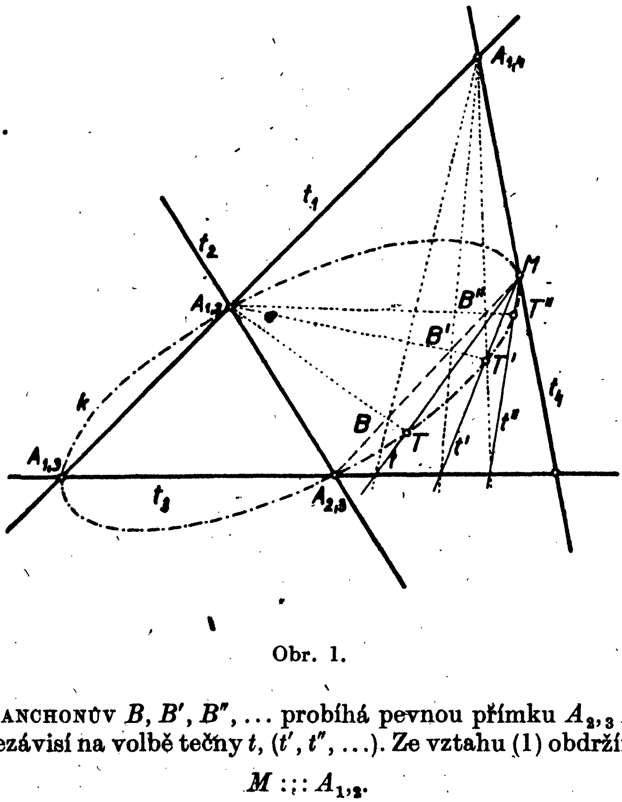
Dříve nežli přistoupíme k řešení úlohy uvedené v nadpise, proveďme tuto přípravnou úvahu:

Buďtež dány tečny t_1, t_2, t_3, t_4, určující osnovu $o(t_1t_2t_3t_4)$ kuželoseček. Ze šesti průsečíků, jež poskytují tyto přímky, vytkněme body $A_{1,2} \equiv$ $\equiv (t_1t_2)$, $A_{1,3} \equiv (t_1t_3)$, $A_{1,4} \equiv (t_1t_4)$, $A_{2,3} \equiv (t_2t_3)$. Svazek přímek v bodě $A_{1,2}$, resp. $A_{1,4}$ označíme pro stručnost také $A_{1,2}$, resp. $A_{1,4}$. Zvolme nyní třeba na tečně t_4 bod $M \neq A_{i,4}$, kde $A_{i,4} \equiv (t_it_4)$, $i = 1, 2, 3$. Bod M budiž vrcholem svazku přímek označeného také (pro stručnost) M (viz obr. 1).

Platí nyní věta: Geometrickým místem bodů dotyku kuželoseček osnovy $o(t_i)$ na jednotlivých paprscích (jakožto tečnách) svazku M je kuželosečka k, procházející body $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$, M a dotýkající se tečny t_4 v bodě M.

Důkaz provedeme zcela snadno. Hledejme na tečně $t(t', t'', \ldots)$ svazku $M(t, t', t'', \ldots)$ dotykový bod $T(T', T'', \ldots)$ kuželosečky určené pěti tečnami t_1, t_2, t_3, t_4 a $t(t', t'', \ldots)$. Použijeme-li Brianchonovy věty při očíslování $1 \equiv t_4$, $2 \equiv t_1$, $3 \equiv t_2$, $4 \equiv t_3$, $5, 6 \equiv t(t', t'', \ldots)$ vidíme, že v bodech $A_{1,4}, A_{1,2}$ vznikají svazky přímek, pro které platí zřejmě vztahy:

$$\begin{aligned} &M :: A_{1,4}{}^{*}) \text{ (osou perspektivity je } t_3), \\ &A_{1,2} :: A_{1,4} \text{ (osou perspektivity je } A_{2,3}, M) \end{aligned} \qquad (1)$$



Obr. 1.

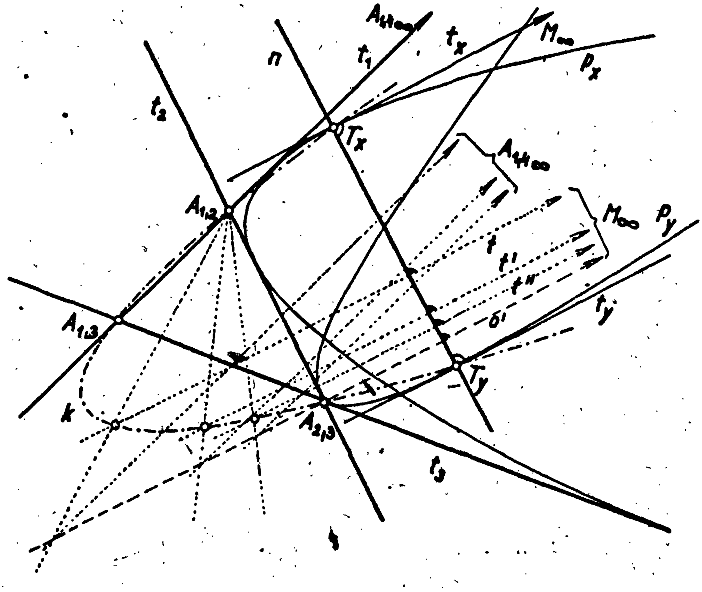
(bod Brianchonův $B, B', B'', \ldots$ probíhá pevnou přímku $A_{2,3}M$), jejíž poloha nezávisí na volbě tečny t, $(t', t'', \ldots)$. Ze vztahu (1) obdržíme ihned

$$M ::: A_{1,2}. \qquad (2)$$

Výtvorem této projektivity je právě kuželosečka k, procházející body M a $A_{1,2}$. Kuželosečka k prochází však též body $A_{2,3}$ a $A_{1,3}$, jak plyne ihned z té okolnosti, uvážíme-li konstrukci dotykových bodů (dle věty Brianchonovy) pro ty speciální polohy přímek svazku M, při nichž přímky zmíněného svazku procházejí právě body $A_{2,3}$ a $A_{1,3}$. ●

*) Symbolika projektivnosti zvolena podle knihy V. Hlavatého, Projektivní geometrie I (Melantrich, Praha 1944).

Nahlédneme dále snadno, že kuželosečka k dotýká se v bodě M přímky t_4, neboť tato přímka náleží též svazku M. Tím je kuželosečka k zcela určena. Důkaz věty je tak proveden. Uvědomme si tedy ještě jednou, že kuželosečka k prochází vrcholy trojúhelníka, určeného tečnami, na nichž neleží bod M, t. j. tečnami t_1, t_2, t_3, a v bodě M dotýká se tečny t_4.



Obr. 2.

Přistupme nyní k řešení původně dané úlohy. Parabola budiž dána tečnami t_1, t_2, t_3 a normálou n. Uvažujme svazek přímek $M_\infty(t, t', t'', \ldots)$, kde $t \perp n, t' \perp n, t'' \perp n, \ldots$ Přidržíme-li se předchozích úmluv a označení, platí (viz obr. 2),

$$M_\infty ::: A_{1,2}, \tag{3}$$

neboť M_∞ je incidentní s t_4, úběžnou to tečnou vyšetřované paraboly. Pomocná kuželosečka k, vytvořená projektivitou (3), která je v tomto případě zřejmě parabolou (dotýká se totiž v bodě M_∞ úběžné přímky t_4), má s normálou n společné dva body T_x a T_y, jež vedou s tečnami t_i ($i = 1, 2, 3$) ke dvěma řešením, parabolám p_x a p_y. (Pomocná parabola k určena je tedy třemi body, v nichž se protínají dané tři tečny a směrem osy $o'' \perp n$.) Konstrukce tečny t_x, resp. t_y paraboly p_x, resp. p_y v bodě T_x, resp. T_y je zcela evidentní. Paraboly p_x, resp. p_y určeny jsou nyní tečnami t_1, t_2, t_3 a t_x, resp. t_y.

Specialisace této úlohy, vznikající na př. tak, že necháme dané tečny t_1, t_2, t_3 různým způsobem splývati, lze řešiti obdobně.

*

Sur la construction de la parabole donné par les tangentes et par la normale. L'auteur résoud ce problème par les méthodes de la géométrie projektive en vertu du théorème auxiliaire:

Lieu géométrique des points touchés pour les coniques du système $o(t_1t_2t_3t_4)$ sur les droites du faisceau $M(t, t' t'', \ldots)$ est la conique k, qui passe les points $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}$, M et qui touche à t_4 en M: $A_{1,2} \equiv (t_1t_2)$, $A_{1,3} \equiv (t_1t_3)$ $A_{2,3} \equiv (t_2, t_3)$ et $M \neq A_{i,4}$, $(i = 1, 2, 3)$ est le point de t_4.

Si est donné donc la parabole par les tangentes t_1, t_2, t_3 et par la normale n, la conique auxiliaire k (dans ce cas aussi une parabole) coupe la normale donné n en deux points T_x, T_y, qui déterminent avec les tangentes t_1, t_2, t_3, tout les deux solutions du problème donné.