Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis

Holger Boche

Vergleich der unterschiedlichen Gütemaße zur Bewertung von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen

*Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, Vol. 9 (2001), No. 1, 15--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120566

# Vergleich der unterschiedlichen Gütemaße zur Bewertung von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen

*Holger Boche*

**Abstract:** The behavior of the autocorrelation and crosscorrelation function is investigated in the paper. Several measures for the quality of the autocorrelation and crosscorrelation function are introduced and discussed in the paper. Some interesting open problems as well as practical applications are also discussed.

**Key Words:** Communication Theory, Signal Theory, Autocorrelation and Crosscorrelation Function, Exponential Sums, Riemann Zetafunction

**Mathematics Subject Classification:** 94A05, 94A12

## 1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Untersuchungen zum Verhalten von Autokorrelations- und Kreuzkorrelationsfunktionen von Zahlenfolgen untersucht. Dazu werden im Abschnitt 2 der Arbeit die notwendigen Begriffe eingeführt und eine erste praktische Motivation angegeben. Im Abschnitt 3 wird das Verhalten der Autokorrelationsfunktion für komplexe Zahlenfolgen untersucht, wobei der Schwerpunkt der Untersuchungen auf der von Zygmund eingeführten Phasenfunktion liegt. Es zeigt sich, daß das Verhalten der Autokorrelationsfunktion der entsprechenden Folgen mit dem Verhalten der Riemannschen Zetafunktion verknüpft ist. In den Abschnitten 4, 5 und 6 werden weitere interessante Aufgabenstellungen im Bereich der Autokorrelations- bzw. Kreuzkorrelationsfunktionen diskutiert. Hierbei werden insbesondere die praktischen Bedeutungen dieser Aufgabenstellungen behandelt.

## 2. Praktische Problemstellung

Dazu werden als erstes einige Begriffe eingeführt. Es sei $N \in N$ eine feste natürliche Zahl. Im weiteren werden Zahlenfolgen der Länge $N + 1$ untersucht. Für eine solche Zahlenfolge $a(n), n \in N$, gilt also $a(n) = 0$ für $n \leq -1$ und $n > N$. Die Autokorrelationsfunktion ist durch

$$\phi_{aa}(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{a(l)}a(n+1) \tag{1}$$

definiert. Sie besitzt für die Charakterisierung von Zahlenfolgen eine wichtige Rolle. Die $l^2$-Norm einer Zahlenfolge wird mit $\| a \|_2$ bezeichnet. Für die Autokorrelationsfunktion $\phi_{aa}$ gilt

$$\phi_{aa}(0) = (\| a \|_2)^2.$$

Weiterhin hat man $|\phi_{aa}(k)| \leq \phi(0)$ und $\phi_{aa}(k) = 0$ für $|k| > N$.
Von besonderer Bedeutung für die praktischen Anwendungen sind Zahlenfolgen $a(n), N \in N$, für die $|a(n)| =$ konstant für $0 \leq n \leq N$ gilt. Die Zahlenfolge kann stets auf $\| a \|_2 = 1$ normiert werden, womit man $|a(n)| = \frac{1}{\sqrt{N+1}}, 0 \leq n \leq N$ erhält. Eine solche Zahlenfolge besitzt stets die Form $a(n) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \exp(j\varphi(n))$, wobei $\varphi(n)$ eine reellwertige Phasenfunktion ist. Im weiteren werden nur noch solche Zahlenfolgen untersucht. Aufgrund der speziellen Struktur der Zahlenfolge $a(n)$ gilt für $0 \leq n \leq N$

$$\phi_{aa}(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-n} \exp\Big(j\Big(\varphi(n+l) - \varphi(l)\Big)\Big) .$$

Damit stellt (1) eine Exponentialsumme dar. Für spezielle Klassen von Phasenfunktionen spielen die Exponentialsummen in der Zahlentheorie eine besondere Rolle [14], [15]. Deshalb wurden bereits frühzeitig Methoden zur Untersuchung von Exponentialsummen entwickelt [7].
Für $N \geq 1$ existiert für jede Zahlenfolge $a$ ein Zeitpunkt $k$ mit $1 \leq |k|$, so daß $\phi_{aa}(k) \neq 0$ ist. Für praktische Anwendungen ist es interessant, Zahlenfolgen $a$ derart zu konstruieren, daß die Autokorrelationsfunktion $\phi_{aa}$ für $k \neq 0$ möglichst klein ist. Es wurden in der Literatur unterschiedlichste Maße eingeführt, um die Konzentration der Autokorrelationsfunktion $\phi_{aa}$ für $k \neq 0$ zu messen [1], [6] [24], [26]. Am häufigsten werden dabei das Haupt-Nebenmaximumverhältnis (HNV) und der Merit-Faktor (MF) verwendet. Hierbei ist das HNV $(a)$ einer Zahlenfolge $a$ durch

$$HNV(a) = \frac{\phi_{aa}(0)}{\max_{1 \leq k \leq N} |\phi_{aa}(k)|} = \frac{1}{\max_{1 \leq k \leq N} |\phi_{aa}(k)|} \tag{2}$$

definiert. Der MF$(a)$ einer Zahlenfolge $a$ ist durch

$$MF(a) = \frac{(\phi_{aa}(0))^2}{2\sum_{k=1}^{N} |\phi_{aa}(k)|^2} = \frac{1}{2\sum_{k=1}^{N} |\phi_{aa}(k)|^2} \tag{3}$$

erklärt. Im weiteren werden der MF$(a)$ und das HNV$(a)$ von Zahlenfolgen untersucht. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt dabei auf der Analyse der Abhängigkeit von der Länge $N$. Dazu wird im nächsten Abschnitt eine mathematische Interpretation der Ausdrücke (2) und (3) angegeben.
Für Untersuchungen zu den Autokorrelations- und Kreuzkorrelationsfunktionen sei auf [1], [13], [17], [24], [25], [26], [27], [31] verwiesen.

## 3. Mathematische Interpretationen

Für eine Interpretation der eingeführten Begriffe wird für eine Folge $a$ der Länge $N+1$ die Funktion

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N} a(k) e^{j\omega k} \tag{4}$$

eingeführt. Mit der Parsevalschen Gleichung erhält man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 d\omega = (\| a \|_{l^2})^2 = 1. \tag{5}$$

Als nächstes wird der Merit-Faktor MF $(a)$ einer Folge $a$ berechnet. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{1}{MF(a)} &= 2\sum_{k=1}^{N} |\phi_{aa}(k)|^2 = \sum_{\substack{k=-N \\ k\neq 0}}^{N} |\phi_{aa}(k)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^4 d\omega - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Dies führt mit Gl. (5) zu

$$\frac{1}{MF(a)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|A(e^{j\omega})|^2 - 1)^2 d\omega. \tag{7}$$

Der Merit-Faktor MF$(a)$ nimmt somit genau dann große Werte an, wenn das Betragsquadrat der Funktion $A$ dicht an 1 liegt. Weiterhin hat man stets

$$(HNV(a))^2 \geq 2MF(a),$$

d.h. ein guter Merit-Faktor MF$(a)$ einer Zahlenfolge $a$ impliziert ebenfalls, daß das HNV $(a)$ der Folge $a$ einen guten Wert annimmt.
Ein weiterer Faktor zur Charakterisierung des Verhaltens von Zahlenfolgen $a$ ist durch den Crestfaktor $Cr(a)$ gegeben. Dieser ist mit

$$\| A \|_\infty = \max_{\omega\in(-\pi,\pi)} |A(e^{j\omega})|$$

durch

$$Cr(a) = \frac{\| A \|_\infty}{\| A \|_{L^2}} = \| A \|_\infty \tag{8}$$

definiert. Er spielt insbesondere in der Meßtechnik eine besondere Rolle [5], [8], [12], [30]. Newman hat in [21] ähnliche Probleme untersucht. Da $\| A \|_{L^2} = 1$ gilt, hat man stets $Cr(a) \geq 1$. Für eine Folge $a$ der Länge $N > 1$ gilt $Cr(a) > 1$. Das Ziel der Konstruktion von Zahlenfolgen mit guten Crestfaktoren besteht darin, daß die Crestfaktoren möglichst dicht bei 1 liegen. Für den Crestfaktor $Cr(a)$ einer Zahlenfolge $a$ gilt mit Gl. (6) die obere Abschätzung

$$\frac{1}{MF(a)} \leq (Cr(a))^4 - 1. \tag{9}$$

Ein Crestfaktor $Cr(a)$ nahe 1 impliziert somit, daß der Merit-Faktor MF$(a)$ relativ groß ist. Im weiteren wird das Verhalten der Faktoren Gl. (2), (3) und (8) für eine spezielle Zahlenfolge untersucht. Dazu wird für $c > 0$ die Zahlenfolge

$$a_{N,c}(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \exp(jc \cdot n \ln(1+n)) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & n \notin [0, N] \end{cases}$$

betrachtet. Diese Folge wird im weiteren als Zygmund-Folge bezeichnet [34]. Sie ist ebenfalls in [16], [18], [22] untersucht worden.
Bei den weiteren Untersuchungen sollen der Einfluß der Länge $N+1$ der Folge $a_{N,c}(n)$ und der Einfluß des Parameters $c$ analysiert werden. Bereits frühzeitig wurde erkannt, daß der Crestfaktor $Cr(a_{N,c})$ der Folge $a_{N,c}$ nicht von $N$ abhängig ist. Es wurde gezeigt, daß für die Zygmund-Folge eine positive Konstante $K_1 = K_1(c)$ existiert, so daß für alle $N \in N$ stets

$$Cr(a_{N,c}) \leq K_1 \tag{10}$$

gilt. Für eine ausführliche Diskussion sei auf [34] verwiesen.
Im weiteren sollen der Einfluß des Parameters $c$ und der Länge $N$ auf das Haupt-Neben-maximumverhältnis HNV$(a_{N,c})$ der Zygmund-Folge $a_{N,c}$ untersucht werden. Die Abschätzung Gl. (10) zeigt, daß die Zygmund-Folge $a_{N,c}$ bezüglich des Crestfaktors ein gutes Verhalten besitzt. Hierbei muß beachtet werden, daß in der Regel für eine Folge von Zahlenfolgen die Folge der Crestfaktoren unbeschränkt anwächst. In dem restlichen Teil dieses Abschnitts wird gezeigt, daß sich das gute Crestfaktorverhalten der Zygmund-Folge $a_{N,c}$ nicht auf das Verhalten des Haupt-Nebenmaximumverhältnisses auswirkt. Dazu wird mit

$$\begin{aligned} F(N,c) &= \phi_{a_{N,c}a_{N,c}}(1) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{N,c}(l)} a_{N,c}(l+1) \end{aligned} \tag{11}$$

der Wert der Autokorrelationsfunktion für $k = 1$ bezeichnet. Für die durch den Ausdruck definierte Zahlenfolge wird im nächsten Abschnitt der folgende Satz bewiesen.

**Satz 1.** *Es sei $c > 0$ eine feste Zahl, dann gilt für die durch Beziehung (11) definierte Zahlenfolge $F(N,c), N \in N$, die Beziehung*

$$\lim_{N \to \infty} |F(N,c)| = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} . \tag{12}$$

Damit ist die Folge der Haupt-Nebenmaximumverhältnisse der Folge $a_{N,c}$ beschränkt.

Die Autokorrelationsfunktion $\phi_{aa}$ der Folge $a$ kann aufgrund der Form $a(n) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \exp(j\varphi(n))$ ebenfalls mit der Exponentialsumme

$$S(a) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \exp(j\varphi(k)) \tag{13}$$

in Zusammenhang gebracht werden. Dazu wird die Darstellung

$$\begin{aligned} |S(a)|^2 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \exp\Big(j\left(\varphi(k) - \varphi(k)\right)\Big) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l \in I_k} \left(\varphi(k+l) - \varphi(k)\right) \end{aligned}$$

benutzt. Hierbei ist $I_k = \{l \in [0, N] \, : \, 0 \leq k + l \leq N\}$. Dies ergibt mit der Autokorrelationsfunktion $\phi_{aa}$ die Darstellung

$$|S(a)|^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \phi_{aa}(k) \; . \tag{14}$$

Dieser Ansatz geht auf Weyl und van der Corput zurück und bildet eine wichtige Grundlage für die Analyse von Exponentialsummen [7], [15], [23].

## 4. Beweis des Satzes

Der Beweis des Satzes wird auf die folgenden zwei Lemmata zurückgeführt.

**Lemma 1.** *Es sei $c > 0$ eine feste Zahl. Es gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \left| F(N,c) - \frac{\exp(-jc)}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(jc\ln(2+n)) \right| = 0. \tag{15}$$

**Lemma 2.** *Für $c > 0$ gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(jc\ln(2+n)) \right| = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}. \tag{16}$$

Für die weiteren Untersuchungen reicht es aus, die beiden Lemmata zu beweisen.

**Beweis (Lemma 1:)** Es sei $c > 0$ fest. Es gilt

$$
\begin{aligned}
F(N,c) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{a_{N,c}(l)} a_{N,c}(l+1) \\
&= \sum_{l=0}^{N} \overline{a_{N,c}(l)} a_{N,c}(l+1) = \sum_{l=0}^{N-1} \overline{a_{N,c}(l)} a_{N,c}(l+1).
\end{aligned}
$$

Weiterhin hat man

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{N-1} \overline{a_{N,c}(l)} a_{N,c}(l+1) &= \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left[jc\left((l+1)\ln(l+2) - l\cdot\ln(l+1)\right)\right] \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(jc\ln(l+2)\right)\cdot \exp\left(jcl\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1})\right) .
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
&F(N,c) - \frac{\exp(-jc)}{N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(jc\ln(l+2)\right) = \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(jc\ln(l+2)) \left[\exp(jcl\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1})) - \exp(-jc)\right] \\
&= \frac{\exp(-jc)}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(jc\ln(l+2)) \left[\exp\left(jc(l\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1}) - 1)\right) - 1\right].
\end{aligned}
$$

Dies führt zu

$$
\begin{aligned}
&\left|F(n,c) - \frac{\exp(-jc)}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(jc\ln(l+2)\right)\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \left|\exp\left(jc(l\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1}) - 1)\right) - 1\right| \\
&= \frac{2}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \left|\sin\left(\frac{c}{2}\left[l\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1}) - 1\right]\right)\right| \\
&\leq \frac{c}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \left|l\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1}) - 1\right| \\
&= \frac{c}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \left(1 - l\cdot\ln(1+\frac{1}{l+1})\right) .
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde beachtet, daß $|\sin x| \leq |x|$ gilt. Weiterhin ist

$$1 + \frac{1}{l} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{l}\right)^k = e^{\frac{1}{l}} > 1 + \frac{1}{l+1} ,$$

also

$$1 - l \cdot \ln(1 + \frac{1}{l+1}) > 0 .$$

Für $0 \leq x \leq 1$ ist $\ln(1+x) \geq x - C_1 x^2$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\left| F(n,c) - \frac{\exp(-jc)}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(jc\ln(l+2)\right) \right| \leq \\
&\leq \frac{c}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l+1} + \frac{c \cdot C_1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{l}{(l+1)^2} \\
&\leq \frac{c(1+C_1)}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l+1} \leq \frac{c(1+C_1)}{N+1} \cdot \ln(N+1) .
\end{aligned}$$

Somit wurde das Lemma 1 bewiesen.

**Bemerkung:** Der Beweis des Lemmas 1 gibt ebenfalls eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit von Gl. (15) an. Es gilt

$$\left| F(n,c) - \frac{\exp(-jc)}{N+1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(jc\ln(2+l)) \right| \leq c \cdot \frac{\ln(N+1)}{N+1}.$$

**Beweis (Lemma 2)** Es wird für $c > 0$ der Ausdruck

$$Q(N,c) = \sum_{n=1}^{N} \exp(jc\ln(1+n)) - \int_1^{N+1} \exp(jc\ln(1+x))dx$$

untersucht. Es gilt

$$\begin{aligned}
Q(N,c) &= \sum_{n=1}^{N} \left[ \exp(jc\ln(1+n)) - \int_n^{n+1} \exp(jc\ln(1+x))dx \right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \left[ \exp(jc\ln(1+n)) - \exp(jc\ln(1+x)) \right] dx.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
|Q(N,c)| &\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} |\exp(jc\ln(1+n)) - \exp(jc\ln(1+x))|\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{0}^{1} |\exp(jc\ln(1+n)) - \exp(jc\ln(1+n+\tau))|\, d\tau \\
&= 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} \int_{0}^{1} \left| \sin\left(\frac{c}{2}\ln(1+\frac{\tau}{1+n})\right)\right| d\tau \\
&\leq c \cdot \sum_{n=1}^{N} \left( \int_{0}^{1} \ln(1+\frac{\tau}{1+n}) d\tau \right) \leq c \cdot \sum_{n=1}^{N} \left( \int_{0}^{1} \frac{\tau}{1+n} d\tau \right) \\
&= \frac{c}{2} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n} < \frac{c}{2} \cdot \ln(1+N).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^{N} \exp(jc\ln(1+n)) - \frac{1}{N+1} \int_{1}^{N+1} \exp(jc\ln(1+x))dx \right| < \frac{c}{2} \cdot \frac{\ln(1+N)}{1+N}. \tag{17}
$$

Für das Integral auf der linken Seite von Ungleichung (17) erhält man

$$
\int_{1}^{N+1} \exp(jc\ln(1+x))dx = \frac{1}{1+jc} \left[ (N+2)^{(1+jc)} - 2^{(1+jc)} \right].
$$

Dies ergibt

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \int_{1}^{N+1} \exp(jc\ln(1+x))dx \right| = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.
$$

Folglich ist

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \sum_{n=1}^{N} \exp(jc\ln(1+n)) \right| = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.
$$

Damit wurde das Lemma 2 bewiesen.

**Bemerkung:** Der Beweis des Lemmas 2 zeigt, daß die Abschätzung

$$
\left| \frac{1}{N+1} \left| \sum_{n=1}^{N} \exp(jc\ln(1+n)) \right| - \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right| \leq C_1 \cdot \frac{\ln(N+1)}{(N+1)}
$$

für eine geeignete Konstante $C_1$ gilt. Diese ist hierbei nur von dem Parameter $c > 0$ abhängig.

Als nächstes soll auf eine Beziehung zur Riemannschen Zetafunktion $\zeta$ eingegangen werden. Diese ist für $\Re s > 1$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. Die durch diese Darstellung für $\Re s > 1$ definierte analytische Funktion kann bis auf den Punkt $s = 1$ in die gesamte komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden. Sie besitzt für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung. Für $\Re s > 0$ gilt die Darstellung

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n^s} + \frac{M^{1-s}}{s-1} + s \int_{M}^{\infty} \frac{[u]-u}{u^{s+1}}\, du \;, \tag{18}$$

hierbei ist $[u]$ die größte natürliche Zahl, welche kleiner als $u$ ist. Damit stellt der erste Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (18) für $\Re s = 0$ die entsprechende Funktion aus dem Lemma 1 dar. Die Darstellung (18) wird für Untersuchungen des Verhaltens der Riemannschen Zetafunktion ausführlich genutzt. Hierbei wird jedoch in der Regel nur der Bereich $\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$ betrachtet. Aufgrund der Abschätzung

$$\left| \sum_{n=-N}^{M} \frac{1}{n^{\sigma+jt}} \right| \leq \frac{1}{N^{\sigma}} \max_{N \leq n \leq M} \left| \sum_{n=-N}^{M} \frac{1}{n^{jt}} \right| \tag{19}$$

kann von dem Verhalten der Riemmanschen Zetafunktion auf der imaginären Achse auf das Verhalten der Riemannschen Zetafunktion in diesem Bereich geschlossen werden. Für Untersuchungen in dieser Richtung sei auf [14], [15], [23] verwiesen.

Die Resultate dieses Abschnitts zeigen, daß die Zygmund-Folge bezüglich des HNV kein besonders gutes Verhalten besitzt. Das $HNV(a_{N,c})$ bleibt stets beschränkt. Im nächsten Abschnitt wird die Zygmund-Phase $cl \cdot \ln(1 + l)$, durch eine quadratische Phasenfunktion ersetzt. Es wird gezeigt, daß das HNV für die quadratische Phasenfunktion in Abhängigkeit von $N$ für $N \to \infty$ gegen unendlich strebt.

## 5. Das Haupt-Nebenmaximumverhältnis für quadratische Phasenfunktionen

In diesem Abschnitt werden komplexwertige Folgen angegeben, für die das HNV in Abhängigkeit von $N$ für $N \to \infty$ gegen unendlich strebt. Dazu wird die Zahlenfolge

$$q_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \exp(j\frac{k^2\pi}{N+1}) & 0 \leq k \leq N \\ 0 & k \notin [0, N] \end{cases}$$

eingeführt. Die Autokorrelationsfunktion $\phi_{q_N q_N} = \phi_N$ wird im weiteren untersucht. Quadratische Phasenfunktionen sind in der Literatur bereits ausführlich untersucht worden [6], [9], [10], [11].

Der folgende Satz liefert eine obere Abschätzung für die Autokorrelationsfunktion.

**Satz 2.** *Für die Autokorrelationsfunktion $\phi_N$ der Zahlenfolge $q_N$ gilt für $1 \leq |k| \leq N$*

$$|\phi_N(k)| < \frac{2\pi}{\sqrt{N+1}}.$$

Damit gilt für das Haupt-Nebenmaximumverhältnis $HNV(\phi_N)$ die Abschätzung

$$HNV(\phi_N) > \frac{\sqrt{N+1}}{2\pi}.$$

**Beweis:** Es sei $1 \leq k \leq N$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\phi_N(k) &= \sum_{l=0}^{N-k} \overline{q_N(l)} q_N(k+l) \\
&= \frac{\exp\left(j\frac{k^2\pi}{N+1}\right)}{N+1} \cdot \sum_{l=0}^{N-k} \exp\left(j\frac{2\pi kl}{N+1}\right) \\
&= \frac{\exp\left(j\frac{k^2\pi}{N+1}\right)}{N+1} \cdot \frac{1-\exp\left(j\frac{2\pi k(N-k+1)}{N+1}\right)}{1-\exp\left(j\frac{2\pi k}{N+1}\right)}.
\end{aligned}$$

Als erstes wird der Bereich $N+1-\sqrt{N+1} \leq k \leq N$ betrachtet. Hier ist

$$|\phi_N(k)| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N-k} 1 \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}}.$$

Für den Bereich $\sqrt{N+1} < k < N+1-\sqrt{N+1}$ erhält man

$$|\phi_N(k)| = \frac{1}{N+1} \left| \frac{\sin\frac{\pi k(N-k+1)}{N+1}}{\sin\frac{\pi k}{N+1}} \right| \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{N+1}}.$$

Für $\frac{\pi k}{N+1} \leq \frac{1}{2}$ ist $\sin\frac{\pi k}{N+1} \geq \frac{k}{2(N+1)}$ also

$$|\phi_N(k)| < \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2(N+1)}{k} < \frac{2}{\sqrt{N+1}}.$$

Analog zeigt man, daß für $\frac{N+1}{2\pi} < k < N+1-\sqrt{N+1}$ die Beziehung

$$|\phi_N(k)| < \frac{2}{\sqrt{N+1}}$$

gilt. Als letztes muß der Bereich $1 \leq k \leq \sqrt{N+1}$ untersucht werden. Man hat

$$\begin{aligned}
|\phi_N(k)| &= \frac{1}{N+1} \left| \frac{\sin\pi\frac{k(N-k+1)}{N+1}}{\sin\frac{\pi k}{N+1}} \right| = \frac{1}{N+1} \left| \frac{\sin\frac{\pi k^2}{N+1}}{\sin\frac{\pi k}{N+1}} \right| \\
&< \frac{\pi k^2}{(N+1)^2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{N+1}} < \frac{2\pi k}{(N+1)} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{N+1}}.
\end{aligned}$$

Damit wurde der Satz 2 bewiesen.

Der Satz 2 zeigt nun, daß das Haupt-Nebenmaximumverhältnis einer Folge der Länge $N$ mit der Größe $\sqrt{N+1}$ gegen unendlich streben kann. Die maximale Größenordnung des Anwachsens des Haupt-Nebenmaximumverhältnisses scheint bisher nicht bekannt zu sein. Die Folge $q_N$ kann ebenfalls in der Form

$$q_N(k) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \exp\left[j(N+1)\varphi(\frac{k}{N+1})\right]$$

mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

dargestellt werden. Für praktische Anwendungen wäre es interessant, das Verhalten der Autokorrelationsfunktion für andere Phasenfunktionen $\varphi$ zu untersuchen.
Für weitere Untersuchungen sei auf [2], [3], [4] verwiesen.

## 6. Weitere Probleme

In diesem Abschnitt sollen einige weitere Probleme diskutiert werden. Dazu wird mit $B_N$ die Menge aller binären Folgen $a(n), 0 \leq n \leq N$, der Länge $N+1$ bezeichnet. Es gilt also

$$a(n) = \pm\frac{1}{\sqrt{N+1}}.$$

Mit $C_N$ wird die Menge aller komplexen Folgen $a(n), 0 \leq n \leq N$, der Länge $N+1$ bezeichnet, für die ebenfalls

$$a(n) = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \exp(j\varphi(k))$$

gilt. Hierbei ist $\varphi$ eine reellwertige Funktion. Für eine Folge $B_N$ gilt somit $\varphi(k) = 0$ bzw. $\varphi(k) = \pi$. Für praktische Anwendungen ist es interessant, wie schnell das Haupt-Nebenmaximumverhältnis bzw. der Merit-Faktor in Abhängigkeit von $N$ gegen unendlich streben kann.
Zur Beantwortung dieser Frage ist es erforderlich, die Größen

$$\gamma_N = \sup_{a(n)\in B_N} HNV(a) \tag{20}$$

und

$$\Gamma_N = \sup_{a(n)\in C_N} HNV(a) \tag{21}$$

zu untersuchen. Man hat natürlich stets $\Gamma_N \geq \gamma_N$. Der genaue Verlauf der durch die Beziehungen (20) und (21) definierten Zahlenfolge scheint bisher nicht bekannt zu sein. Die Resultate des letzten Abschnitts zeigen, daß $\Gamma_N > \frac{\sqrt{N+1}}{2\pi}$ gilt.
Weiterhin ist es interessant, die Größen

$$6_N = \sup_{a\{n)\pounds B_N} MF(a) \tag{22}$$

und

$$\&_N = \sup_{a(n)ECV} AÍF(o) \tag{23}$$

zu analysieren. Man hat ebenfalls <5'v < A/v-
In [3] wurde gezeigt, dafi

$$\lim_{N\sim>oc} A\ AT = +oo$$

ist. Das genaue Verhalten der durch (22) und (23) deíinierten Zahlenfolgen ist ebenfalls unbekannt.
Eine weitere interessante Grofie zur Bewertung des Verhaltens von endlichen Folgen ist durch den Rausch-Verstárkungsfaktor

$$i \quad r \quad 1$$

$$RVÍa) = — I \quad —_7\text{-r-}_T\text{~rcL;}$$

gegeben [19], [20], [26]. Aufgrund der Cauchyschen Ungieichung gilt stets

$$RV\{a) > 1.$$

Fúr alle Folgen $a$ der Lange $N, N > 1$, hat man stets $RV(a) > 1$. Es gilt weiterhin genau dann $RV(a) <$ -foo, wenn $|A(e^{J,w})|^2$ ^ 0 fúr $LJ$ £ [—7r,7r) erfúllt ist. In diesem Fall ist durch

$$h\{k) = \frac{-*-}{2TT} \int_{-„} \frac{—X-}{A(e'«>)} re^{jkuj} áj$$

eine Folge aus dem Raum $l^2$ definiert. Es gilt

$$\sum_{fc=-oo} |h(k)|^2 = \frac{—}{27ri} \int_{-7r} \frac{-}{|,4(\dot{e}\wedge)|^2} rprriu; < +oo.$$

Weiterhin hat man

$$\sum_{/:-oo}^{-foo} fc(Jb - i)o(0 = 8\{k), \tag{24}$$

wobei die Kronecker-Funktion $S$ durch

definiert ist [26]. Die durch Gl. (24) definierte Folge stellt somit die Impulsantwort des zum Filter mit der Impulsantwort $a(n), n$ G JV, gehorenden inversen Filters dar. Fúr den Rausch-Verstárkungsfaktor kónnen ebenfalls die Grófien

$$\lambda_N = \inf_{a(n)\in B_N} RV(a) \tag{25}$$

und

$$\Lambda_N = \inf_{a(n)\in C_N} RV(a) \tag{26}$$

eingeführt werden. Man hat $\Lambda_N \leq \lambda_N$. Es ist bisher nicht bekannt, ob

$$\lim_{N\to\infty} \inf \Lambda_N = 1$$

gilt [19], [20].
Eine weitere wichtige Funktion zur Berechnung von Folgen $a(n), b(n)$ der Länge $N+1$ ist die Kreuzkorrelationsfunktion

$$\phi_{ab}(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{a(l)}b(k+1).$$

Für praktische Anwendungen ist es interessant, Folgen mit sehr gut konzentrierten Autokorrelationsfunktionen $\phi_{aa}, \phi_{bb}$ zu konstruieren, so daß die Kreuzkorrelationsfunktion $\phi_{ab}$ für alle $k \in Z$ relativ kleine Werte annimmt. Mit der Funktion

$$\Phi(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{ab}(k)e^{-jk\omega}$$

hat man

$$\Phi(e^{j\omega}) = \overline{A(e^{j\omega})}B(e^{j\omega})$$

und damit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\phi_{ab}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2|B(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Diese Beziehung kann ebenfalls in

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\phi_{ab}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{aa}(k)\cdot\phi_{aa}(k)$$

überführt werden. Da

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B(e^{j\omega})|^2 d\omega = 1$$

gilt, kann die $l^2$-Norm der Kreuzkorrelationsfunktion $\phi_{ab}$ in der Regel nicht zu klein sein. Damit ist die Größe

$$\| \phi_{ab} \|_\infty = \max_{|k|\leq N} |\phi_{ab}(k)|$$

ein geeignetes Maß, um die Größe der Kreuzkorrelationsfunktion zu messen. Die Zahl $\| \phi_{ab} \|_\infty$ wird als der Spitzenwert der Kreuzkorrelationsfunktion bezeichnet. In der Literatur ist der Zusammenhang zwischen dem Haupt-Nebenmaximumverhältnis der Autokorrelationsfunktion und dem Spitzenwert der Kreuzkorrelationsfunktionen untersucht worden [28], [29], [32], [33]. Es seien $M$ Folgen $b_1, \ldots b_M$ der Länge $(N+1)$ vorgegeben. Für diese Folgen werden die Zahlen

$$D_A = \max_{1 \leq l \leq M} \left( \max_{1 \leq |k| \leq N} |\phi_{b_l b_l}(k)| \right)$$

und

$$\begin{aligned} D_C &= \max_{\substack{1 \leq l,n \leq M \\ l \neq n}} \left( \max_{0 \leq |k| \leq N} |\phi_{b_l b_n}(k)| \right) \\ &= \max_{\substack{1 \leq l,n \leq M \\ l \neq n}} \| \phi_{b_l b_n} \|_\infty \end{aligned}$$

eingeführt. Die Zahl $D_A$ ist ein Maß für die Güte der Autokorrelationsfunktionen. Die Zahl $D_C$ gibt eine Güte für das Verhalten der Kreuzkorrelationsfunktionen an. Für praktische Anwendungen ist es wichtig, daß beide Zahlen möglichst klein sind. Es wurde jedoch von Welch [33] gezeigt, daß für die Zahlen $D_A$ und $D_C$ stets

$$(D_A)^2 \cdot \frac{(N-1)}{N^2(M-1)} + (D_C)^2 \cdot \frac{1}{N} \geq 1 \tag{27}$$

gilt. Die Beziehung (27) ist als Welch-Schranke in der Literatur bekannt. Sie stellt eine untere Schranke für die Zahlen $D_A$ und $D_C$ dar. Bisher scheint nicht bekannt zu sein, ob die Abschätzung (27) weiter verbessert werden kann. Für den Fall, daß die Abschätzung (27) bestmöglich ist, wäre es interessant, Folgen zu konstruieren, die das optimale Verhalten bezüglich dieser Abschätzung besitzen. Für eine Analyse des Verhaltens von Kreuzkorrelationsfunktionen wäre es ebenfalls interessant, die $l^2$- Norm von Kreuzkorrelationsfunktionen abzuschätzen. Aufgrund der Darstellung (27) hat man stets

$$(\| \phi_{ab} \|_2)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\mu})|^2 \cdot |B(e^{j\mu})|^2 d\mu$$

und $\| \phi_{ab} \|_2 \neq 0$. Es ist jedoch interessant, wie klein bei fest vorgegebener Länge der Folgen $a, b$ die $l^2$-Norm der Kreuzkorrelationsfunktion werden kann. Die Zahlen

$$\sigma_N = \inf_{a,b \in C_N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\mu})|^2 \cdot |B(e^{j\mu})|^2 d\mu \tag{28}$$

und

$$\Sigma_N = \inf_{a,b \in B_N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\mu})|^2 \cdot |B(e^{j\mu})|^2 d\mu \tag{29}$$

stellen ein mögliches Maß zur Bewertung dar. Man hat stets $\Sigma_N \geq \sigma_N > 0$. Der genaue Verlauf der durch die Beziehung (28) und (29) definierten Zahlenfolgen scheint bisher nicht bekannt zu sein. Numerische Untersuchungen bestärken die Vermutung, daß

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_N = 0 \tag{30}$$

gilt. Die konkreten Berechnungen für eine feste Zahl $N$ sind jedoch sehr aufwendig. Die bisherigen numerischen Untersuchungen geben keinen Aufschluß über das Verhalten der Folge $\sigma_N$. Ob in diesem Fall ebenfalls die Beziehung (30) gelten könnte, ist noch völlig offen.
Die Konstruktion von Codes mit gewünschtem Verhalten der Autokorrelationsfunktion bzw. Kreuzkorrelationsfunktion spielt in der Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle. An dieser Stelle sei nur auf die Anwendungen in der Spreizspektrumstechnik eingegangen. Bei dieser Anwendung wird häufig von den periodischen Autokorrelationsfunktionen bzw. Kreuzkorrelationsfunktionen ausgegangen. Hierzu werden $m$-Signale $a_1, \dots, a_m$ der Länge $N$ periodisch fortgesetzt. Die dadurch konstruierten Signale werden mit $\tilde{a}_l, 1 \le l \le m$, bezeichnet. Dann ist die periodische Autokorrelationsfunktion $\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_m}$ durch

$$\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_m}(k) = \sum_{l=0}^{N} \overline{\tilde{a}_n(l)} \tilde{a}_n(k+l)$$

definiert. Die periodische Kreuzkorrelationsfunktion $\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_r}$ ist für $n \neq r$ durch

$$\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_r}(k) = \sum_{l=0}^{N} \overline{\tilde{a}_n(l)} \tilde{a}_r(k+l)$$

erklärt. Die $m$-Signale $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ besitzen bezüglich der Anwendung in der Spreizspektrumstechnik ein optimales Verhalten, wenn für $1 \le n \le m$

$$\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_n}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & 1 \le k \le N \end{cases} \tag{31}$$

und für $1 \le n, r \le m, n \neq r$, stets

$$\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_r}(k) = 0$$

für $0 \le k \le N$ gilt. Jedes Signal $\tilde{a}_n$ ist mit der Beziehung (31) zu allen zeitlichen Verschiebungen $\tilde{a}_n(\cdot + k), 1 \le k \le N$, orthogonal. Ein solches Verhalten kann für die Autokorrelationsfunktion $\phi_{a_n a_n}$ nicht auftreten. In der Regel ist eine Analyse des Verhaltens der Autokorrelationsfunktion $\phi_{a_n a_n}$ bzw. die Konstruktion von Signalen $a_n$ deren Autokorrelationsfunktionen $\phi_{a_n a_n}$ ein vorgeschriebenes Verhalten besitzen bedeutend komplizierter als für die entsprechenden periodischen Signale $\tilde{a}_n$ bzw. periodischen Autokorrelationsfunktionen $\tilde{\phi}_{\tilde{a}_n \tilde{a}_n}$.

## Literatur

[1] W.O.Alltop: Complex Sequences with Low Periodic Correlations, IEEE Trans. IT-26, 350 - 354, 1980

[2] H. Boche: Behavior of Multitone Signals with Schroeder's Phase, Proc. ICSP'98, Intern. Conf. on Sign. Proc., Beijing, China, pp. 133 - 138, IEEE Press, 1998

[3] H. Boche: Invertierung von Multiton-Funktionen in fast linearen Systemen, Electrical Engineering, Springer, Vol. 81, No. 3, pp. 143 - 150, 1998

[4] H. Boche: Zum Verhalten der Autokorrelationsfunktion zeitdiskreter Funktionen, accepted in ZAMM, Zeitschrift für Angew. Math. und Mech., 1999

[5] S. Boyd, Multitone Signals with Low Crest Factor, IEEE CAS, vol.33, No.10, 1986

[6] D.C.Chu: Polyphase Codes with Good Periodic Correlation Properties, IEEE Trans. IT-18, 531 - 532, 1972

[7] J.G. van der Corput: Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem, Math. Ann., 87, 39-65, 1922

[8] D.C. Evans, D. Rees, D.L. Jones: Design of Test Signals for Identification of Linear Systems with Nonlinear Distortions, IEEE Transactions on Instrumentations and Measurement (IM), Vol. 41, No. 6, 1992

[9] R.L. Frank, S.A. Zadoff: Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties, IEEE Trans. IT-8, 381 - 382, 1962

[10] R.L. Frank, Polyphase Codes with Good Nonperiodic Correlation Properties, IEEE Trans. IT-9, 443 - 45, 1963

[11] R.L. Frank: Comments on 'Polyphase Codes with Good Correlation Properties', IEEE Trans. IT-19, 244, 1973

[12] A. Gersho, B. Gopinath, A.M. Odlyzko: Coeffizient Inaccuracy in Transversal Filtering, Bell Syst. Techn. J., vol. 58, No. 10: 2301 - 2316, 1979

[13] M. Golay: Sieves for Law Autocorrelation Binary Sequences, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-23: 43 - 51, 1997

[14] S.W. Graham, G.Kolesnik: One and Two Dimensional Exponential Sums, Analytic Number Theory and Diophantine Problems (editors A.C. Adolphson, J.B. Conrey, A. Ghosh and R.I. Yager, Birkhauser, Boston, 1987) 205 - 222

[15] S.W.Graham, G.Kolesnik: Van der Corput's Method of Exponential Sums, Cambridge University Press, 1991

[16] G.H. Hardy and J.E. Littlewood: Some Problems of Diophantine Approximation: A Remarkable Trigonometrical Series, Proc. Nat. Acad. USA 2 (1916), pp. 583 - 586

[17] R.C. Heimiller, Phase Shift Pulse Codes with Good Periodic Correlation Properties, IEEE Trans. IT-7, 254 - 257, 1961

[18] A. Ingham: Note on a Certain Power Series, Ann. Math. 31 (1930), pp. 241-245

[19] J. Massey, Persönliche Mitteilung, ETH-Zürich, 1997

[20] J. Massey, Persönliche Mitteilung, ITG-Diskussionssitzung 'Möglichkeiten und Grenzen der digitalen Signalverarbeitung in Funksystemen', Lucent Technologies, 1997

[21] D.I. Newman, An $L^1$ Eternal Problem for Polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 16, 1287 - 1290, 1965

[22] R. Paley: On Lacunary Power Series, Proc. Nat. Acad. USA 19 (1933), pp. 271 - 272

[23] R.A. Rankin: Van der Corput's Method and the Theory of Exponent Pairs, Quart.J.Math. (Oxford) (2)6, 147 - 153, 1955

[24] J. Ruprecht, Maximum-Likelihood Estimation of Multipath Channels, Ed. J. Massey, PhD Thesis ETH Zurich, Hartung Gorre Verlag, Konstanz, 1989

[25] J. Ruprecht, F.D. Nesser, M. Hufschmidt, Code Time Division Multiple Access: An Indoor Cellular System, Proc. VTC'92, Denver, 1992

[26] M. Rupf: Coding for CDMA Channels and Capacity, Dissertation ETH Zürich, 1994

[27] J. Ruprecht, M. Rupf, On the Search and Construction of Good Invertible Binary Sequences, ISIT'94, Int. Symp. on Information Theory, Trondheim, 1994

[28] D.S. Sarwate, Bounds on Crosscorrelation and Autocorrelation of Sequences, IEEE Trans. IT-25, 720 - 724, 1979

[29] D.V.Sarwate, M.B. Pursley, Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences, Proc. IEEE 68, 593 - 619, 1980

[30] M.R. Schroeder, Synthesis of Low Peak-Factor Signal and Binary Sequences with Low Autocorrelation, IEEE Trans. IT-13 85 -89, 1970

[31] M.R. Schroeder, Number Theory in Science and Communication, Springer Series in Information Sciences, Springer Verlag, Berlin, 1983

[32] J.E. Stalder, C.R. Cahn, Bounds for Correlation Peaks of Periodic Digital Sequences, Proc. IEEE 52, 1262 - 1263, 1964

[33] L.R.Welch, Lower Bounds on the Maximum Cross Correlation of Signals, IEEE Trans. IT-20, 397 - 399, 1974

[34] A. Zygmund: Trigonometric Series, Vol. I, II, Cambridge University press, Cambridge, 1968

*Author's address:* Holger Boche, Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH, Abt. Breitband Mobilfunknetze, Einsteinufer 37, D-10587 Berlin, Deutschland

*E-mail:* `boche@hhi.de`

*Received:* February 22, 1999