Jiří Kobza

Die Transformationsfunktion für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 14 (1974), No. 1, 5--16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120029

1974 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 45

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr Miroslav Laitoch, CSc.

DIE TRANSFORMATIONSFUNKTION FÜR EINE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

JIŘÍ KOBZA

Eingelangt am 10. Mai 1973

1. In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Funktionen studieren, welche die Transformation der Lösungen der Differentialgleichung (weiter nur Dgl) $y'' = -n^2 y$ auf die Lösungen der Dgl der Jacobischen Polynomen $P_n(t; \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ vermitteln. Die Definition und grundlegende Eigenschaften einer solchen Transformationsfunktion sind in [1] eingeführt.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$f \in (a)$ bedeutet, dass die Funktion f die durch (a) bezeichnete Beziehung erfüllt;

$f \in C^{(k)}(j)$ bedeutet, dass die Funktion f im Intervall j eine stetige Ableitung k-ter Ordnung hat.

Im ersten Teil führen wir notwendige Erkentnisse aus der Transformationstheorie der Dgl $y'' = q(t)\, y$ ein. $\qquad (q),$

Satz 1. Sei $f, g \in C^{(3)}(j)$; $f' \neq 0, g' \neq 0$ im Intervall j; wenn die Funktionen

$$y_1 = [\sin f(t)]/g(t), \qquad y_2(t) = [\cos f(t)]/g(t)$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl (q) im Intervall j sind, dann gilt im diesen Intervall auch

$$g(t) = c_1\, |f'(t)|^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad c_1 \neq 0 \text{ (konst.)}, \tag{1}$$

$$q(t) = \frac{1}{4}(f''/f')^2 - \frac{1}{2}(f''/f')' - f'^2 \tag{2}$$

Bemerkung. (2) können wir auch schreiben mittels der Schwarzschen Ableitung

$$\{f, t\} = -\frac{1}{4}(f''/f')^2 + \frac{1}{2}(f''/f')' = \frac{1}{2}(f'''/f') - \frac{3}{4}(f''/f')^2$$

in der Gestalt

$$-\{f, t\} - f'^2 = q(t) \qquad (-1, q)$$

Aus der Definition ist die Gültigkeit von $\{f, t\} = \{\lambda f, t\}$ für beliebige reelle $\lambda \neq 0$ leicht zu sehen.

Beweis. Unter Voraussetzung dass $y_1, y_2 \in (q)$ ist, dann

$$y_1 = f'y_2 - g'y_1/g; \qquad y_2' = -f'y_1 - g'y_2/g;$$
$$y_1' = (-f'^2 - g''/g + 2g'^2/g^2)\, y_1 + (f'' - 2f'g'/g)\, y_2,$$
$$y_2'' = (2f'g'/g - f'')\, y_1 + (2g'^2/g^2 - g''/g - f'^2)\, y_2.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von y_1, y_2 folgt nun für die Wronskische Determinante $W(y_1, y_2) = W \neq 0$ und weiter $y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = 0$. Mittels der vorangehenden Beziehungen erhalten wir

$$0 = (2f'g'/g - f'')\,(\cos 2f)/g^2 \qquad (3)$$

Unter den Voraussetzungen von f, g kann (3) nur dann gelten, wenn $2g'/g = f''/f'$, d. h. wenn $g = c_1|f'|^{\frac{1}{2}}$ gilt. Daraus erhalten wir für die Funktion $q(t)$, $q = y_1''/y_1 = y_2''/y_2$ die Beziehung $q = 2g'^2/g^2 - g''/g - f'^2$, und hiervon mittels $g''/g = \frac{1}{2}(f''/f')' + (g'/g)^2$ folgt die Behauptung (2).

Satz 2. Sei $q(t) \in C(j)$, $f(t) \in C^{(3)}(j)$, $f(t) \in (-1, q)$, $f'(t) \neq 0$ *im intervall* j. *Dann sind die Funktionen*

$$y_1(t) = [\sin f(t)]/|f'(t)|^{\frac{1}{2}}, \qquad y_2(t) = [\cos f(t)]/|f'(t)|^{\frac{1}{2}} \qquad (y)$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl (q).

Beweis. Aus Beweis von Satz 1 (oder durch direkte Berechnung) folgt, dass unter gegebenen Voraussetzungen $y_1, y_2 \in (q)$ gilt.

Es genügt also zu zeigen, dass $W(y_1, y_2) \neq 0$ ist. Es gilt (mit Bezeichnung $g^2 = f'$) $W(y_1, y_2) = -f'y_1^2 - g'y_1y_2/g - f'y_2^2 + g'y_1y_2/g = -f'/g^2 = -\operatorname{sgn} f' \neq 0$.

Bemerkung. Aus der Definition der Funktionen y_1, y_2 ist leicht zu sehen, dass die Funktion $f(t)$ für $y_2(t) \neq 0$ die Gleichung

$$\operatorname{tg} f(t) = y_1(t)/y_2(t)$$

erfüllt. Eine solche Funktion ist in [1] die durch Basis (y_1, y_2) bestimmte (erste) Phase der Dgl (q) genannt. Hier wird auch die ausführliche Phasentheorie und ihr Zusamenhang zur Transformationstheorie der Lösungen der Dgl (q) weiter entwickelt.

Lemma 1. Sei a) $q(t) \in C(j)$, $j = (a, b)$; a, b *seien keine Häufungspunkte von Nullstellen der Lösungen der Dgl* (q); *b)* $u, v \in (q)$, $W(u, v) = W \neq 0$; $u(t)$ *habe mindestens eine Nullstelle im Intervall* j. *Wir wollen mit*

$t_i, i = 1, 2, \ldots, p;\ t_1 < t_2 < \ldots < t_p$ *die Nullstellen von* $u(t)$,
$t'_i, i = 1, 2, \ldots, r;\ t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_r$ *die Nullstellen von* $v(t)$ (*soweit diese existieren*) *bezeichnen und weiter sei* $t'_0 = a$, $t'_{r+1} = b$. *Ferner sei die Funktion* $f(t) \in C(j)$ *durch*

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}[u(t)/v(t)] + k(t)\pi,\ k(t) = k_0 - i \,.\, \operatorname{sgn} W \textit{ für } t \in (t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, r \\ \left[k_0 - \left(\dfrac{-1}{2} + i\right)\operatorname{sgn} W\right]\pi \quad \textit{für} \quad t = t'_i,\ k_0 \textit{ ganzzahlig}, \quad i = 1, \ldots, r \end{cases} \qquad (f)$$

definiert [*die erste Phase des geordneten Paares der Lösungen* (u, v)].
Dann gilt 1° $f(t) \in C^{(3)}(j)$, $f'(t) \neq 0$ *für* $t \in j$, $f(t) \in (-1, q)$;

2° *für* $t = t_1$ *ist* $u(t_1) = u_1 = 0$, $u'(t_1) = u'_1 \neq 0$; $v(t_1) = v_1 \neq 0$, $v'(t_1) = v'_1$;

$$f(t_1) = k(t_1)\pi = k\pi, \qquad f'(t_1) = -W/v_1^2, \qquad f''(t_1) = 2Wv'_1/v_1^3;$$

3° *die Funktionen*

$$y_1 = (\sin f)/|f'|^{\frac{1}{2}}, \qquad y_2 = (\cos f)/|f'|^{\frac{1}{2}} \qquad (y)$$

sind die durch die Anfangsbedingungen

$$y_1(t_1) = 0, \quad y'_1(t_1) = (-1)^{k+1} \operatorname{sgn} W |-W|^{\frac{1}{2}}/|v_1|;$$
$$y_2(t_1) = (-1)^k |v_1|/|-W|^{\frac{1}{2}}, \quad y'_2(t_1) = (-1)^k v'_1 \operatorname{sgn} v_1/|-W|^{\frac{1}{2}}$$

bestimmte linear unabhängige Lösungen der Dgl (q).

Beweis. Die Behauptung 1° ist in [1] bewiesen. Die Gültigkeit der Behauptung 2° können wir direkt durch Substitution in u, v, f verifizieren. Die Behauptung 3° folgt mittels 2° aus Satz 2.

Aus der Definition (f) der Funktion $f(t)$ ist leicht zu sehen: wenn t_i [bzw. t'_i] die Nullstellen der Lösung $u[v]$ sind, so ist auch $y_1(t_i) = 0$ [$y_2(t'_i) = 0$], d. h. die Lösungen $u, y_1[v, y_2]$ haben gemeinsame Nullstellen und sie können sich voneinander nur durch eine Multiplikationskonstante unterscheiden. Die Funktion $f(t)$ vermittelt die Abbildung des linearen Raumes der Lösungen der Dgl (q) in sich; in dieser Abbildung sind u, v die Eigenelemente der Abbildung – vgl. [1, s. 39, 158]. Da die Funktion $f(t)$ durch ein geordnetes Paar der Lösungen (u, v) bestimmt ist, wollen wir die Bedingungen untersuchen, worin sich die Lösungen u, v mittels den Funktion $f(t)$ in sich abbilden, d. h. die Bedingungen, unter welchen (u, v) zu Eigenwert eins das zugehörige Eigenelement ist.

Satz 3. Es mögen die Voraussetzungen a), b) und Bezeichnungen von Lemma 1 gelten; weiter seien $y_1, y_2 \in (y)$.
Dann ist $y_1 = u$, $y_2 = v$ *mit* $(-1)^k = \operatorname{sgn} v(t_1)$, $|W(u, v)| = 1$ [$k = k(t_1)$] *äquivalent.*

Beweis. Wenn $y_1 = u$, $y_2 = v$ ist, dann nach dem vorigen Lemma und der dort benutzten Bezeichnung gilt

a) $u'_1 = (-1)^{k+1} \operatorname{sgn} W |-W|^{\frac{1}{2}}/|v_1|$,
b) $v_1 = (-1)^k |v_1|/|-W|^{\frac{1}{2}} \neq 0$;
c) $v'_1 = (-1)^k v_1 \operatorname{sgn} v'_1/|-W|^{\frac{1}{2}}$.

Ist $v_1' = 0$, so ist auch $c)$ erfüllt; für $v_1' \neq 0$ die Beziehungen $b)$, $c)$ sind äquivalent und $b)$ kann genau dann gelten, wenn gleichzeitig $|W| = 1, (-1)^k = \operatorname{sgn} v_1$ ist. Dann ist auch $a)$ erfüllt, denn die Gültigkeit der Beziehung $u_1 = (-1) \operatorname{sgn} v_1 \,.\, \operatorname{sgn} W/ /v_1 \operatorname{sgn} v_1 = -W/v_1$ folgt aus der Definition $W(u, v)$ vermöge $u_1 = 0$, $v_1' = 0$.

Es gelte umgekehrt $(-1)^k = \operatorname{sgn} v_1$, $|W(u, v)| = 1$ für $t = t_1$. Hiernach für $y_1(t_1)$, $y_2(t_1)$, $y_1'(t_1)$, $y_2'(t_1)$ ist $y_1(t_1) = 0$,

$$\begin{aligned} y_1'(t_1) &= (-1)^{k+1} \operatorname{sgn} W/|v_1| = u_1' \operatorname{sgn} W/W = u_1', \\ y_2(t_1) &= (-1)^k |v_1|/|-W|^{\frac{1}{2}} = (-1)^k v_1 \operatorname{sgn} v_1 = v_1, \\ y_2'(t_1) &= -1)^k v_1' \operatorname{sgn} v_1/|-W|^{\frac{1}{2}} = v_1'. \end{aligned}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Dgl (q) ist so $y_1 = u, y_2 = v$ bewiesen.

2. Gegeben sei die Funktionenfolge $\{q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ mit $q_n \in C(j)$, $j = (a, b)$. Dieser Folge lässt sich eine Folge der Dgln

$$y'' = q_n(t)\, y \tag{q_n}$$

zuordnen. Wir setzen voraus, dass $a[b]$ kein Häufungspunkt der Nullstellen von Dgln $(q_n)n, = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Weiter seien

$u_n, v_n \in (q_n)$ mit $W(u_n, v_n) = W_n \neq 0$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

$t_{1n} < t_{2n} < \ldots\, [t_{1n}' < t_{2n}' < \ldots < t_{rn}']$ die Folge aller Nullstellen von $u_n[v_n]$ und $t_{on}' = a$, $t_{r+1,n}' = b$, $r = r(n)$.

Für die durch die Basis (u_n, v_n) bestimmte (erste) Phase der Dgl (q_n) haben wir nach Lemma 1 und Satz 3

$$1_n^0\; f_n(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}[u_n(t)/v_n(t)] + k_n(t)\,\pi, \;\; k_n(t) = k_{on} - i \operatorname{sgn} W_n \\ \qquad\qquad \text{für } t \in (t_{in}', t_{i+1,n}'),\; i = 0, 1, \ldots, r \\ \left[k_{on} - \left(\dfrac{-1}{2} + i\right) \operatorname{sgn} W_n\right]\pi \text{ für } t = t_{in},\, k_{on} \text{ ganzzahlig},\; i = 1, 2, \ldots, r; \end{cases}$$

$$f_n(t) \in C^{(3)}(j), \;\; f_n'(t) \neq 0 \;\; \text{für } t \in j; \;\; f_n(t) \in (-1, q_n). \tag{f_n}$$

2_n° *Für die Funktionen*

$y_{1n} = (\sin f_n)/|f_n'|^{\frac{1}{2}}$, $\quad y_{2n} = (\cos f_n)/|f_n'|^{\frac{1}{2}}$

gilt $y_{1n}, y_{2n} \in (q_n)$ *und durch eine passende Wahl von* u_n, v_n *können wir* $u_n = y_{1n}$, $v_n = y_{2n}$ *erzielen.*

Die Funktionen $f_n(t)$ sind definiert im Intervall j und bilden j auf das Intervall $J_n = f_n(j)$ ab. Die Länge des Intervalls J_n hängt von der Anzahl der Nullstellen der Lösungen u_n, v_n und von deren Eigenschaften in der Umgebung der Enden des Intervalls j ab. Die Funktionen $f_n(t)$ vermitteln im Sinne der Arbeit [1] eine vollständige Transformation der Lösungen der Dgl $y'' = -y$ im Intervall J_n in die Lösungen der Dgl (q_n) im Intervall j.

Zum weiteren Zwecke dieser Arbeit wird es besser sein die vollständige Transformation zwischen den Lösungen Differentialgleichungen $(-m^2)$, (q_n) zu studieren; dabei ist $m = m(n)$ eine eindeutige Funktion von n, welche im weiteren so zu wählen ist, damit die Korrespondenz von Dgln desselben Charakters – vgl. [1] – erreicht wird. Dann können wir die allgemeine Transformationstheorie aus [1; 1, § 22–25] anwenden. Bezeichne $T_n = X_n(t)$ die Funktion, welche die Transformation der Lösungen $\sin mT$, $\cos mT \in (-m^2)$ in die Lösungen der Dgl (q_n) vermittelt; aus vorigem ergeben sich dann folgende Resultaten:

1° $X_n(t) = \frac{1}{m} f_n(t)$, *wo* $f_n(t)$ *durch* (f_n) *bestimmt ist,*

2° $X_n \in C^{(3)}(j)$, $X_n' \neq 0$ *für* $t \in j$,

$$-\{X_n, t\} - m^2 X_n'^2 = q_n(t); \qquad (-m^2, q_n)$$

3° *die Funktionen*

$$y_{1n} = (\sin mX_n)/|mX_n'|^{\frac{1}{2}}, \quad y_{2n} = (\cos mX_n)/|mX_n'|^{\frac{1}{2}} \qquad (y_n)$$

genügen der Dgl (q_n) *und es gilt* $W(y_{1n}, y_{2n}) = -\operatorname{sgn} X_n'$;

4° $y_{1n} = u_n$, $y_{2n} = v_n$ *genau dann, wenn auch*

$$(-1)^k = \operatorname{sgn} v_n(t_{1n}), \ |W(u_n, v_n)| = 1 \quad [k = k_n(t_{1n})] \ \textit{ist}.$$

Die Nullstellen der Lösungen u_n, v_n *und* $\sin mT_n$, $\cos mT_n$ *bilden sich für* $T_n = X_n(t) \in (-m^2, q_n)$ *miteinander ab.*

Im weiterem zeigen wir ein konkretes Beispiel einer Folge $\{q_n\}$, wo j, u_n, v_n sich so wählen lässt, dass das Intervall $J_n = X_n(j)$ ein und dasselbe für alle n ist, d. h. es gilt $J_n = J$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Man bekommt dann eine Folge der vollständigen Transformationen, welche die im Intervall J definierten Lösungen $\sin mT_n$, $\cos mT_n \in (-m^2)$ auf u_n, $v_n \in (q_n)$, die im Intervall j definiert sind, transformieren. Da in den Intervallen j, J der Charakter der Dgln (q_n), $(-m^2)$ derselbe sein muss, kann man das Studium nur auf gewisse Folge der Dgln (q_n) mit bekannten Eigenschaften der Lösungen und Nullstellen beschränken.

3.1 Die Differentialgleichung der Jacobischen Polynomen $P_n(t; \alpha, \beta)$

$$(1 - t^2)\, u'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\, t]\, u' + n(\alpha + \beta + n + 1)\, u = 0, \quad (P_n)$$

$\alpha, \beta > -1$, $j = (-1, 1)$ – vgl. [4] – geht durch die Substitution $y = (1 - t)^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}(1 + t)^{\frac{1}{2}(1+\beta)} u$ in die Dgl

$$y'' = -I_n(t)\, y \qquad (-I_n)$$

über, wo

$$I_n = (1 - t^2)^{-1}\left[n(\alpha + \beta + n + 1) + \frac{1}{2}(1 + \alpha)(1 + \beta)\right] + \frac{1}{4}(1 - \alpha^2)(1 - t)^{-2} + \frac{1}{4}(1 - \beta^2)(1 + t)^{-2}$$

ist. Die linear unabhängigen Lösungen der Dgl $(-I_n)$ mit Parametern α, β sind die Funktionen

$$p_n(t;\alpha,\beta) = (1-t)^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}(1+t)^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \,.\, P_n(t;\alpha,\beta)$$
$$q_n(t;\alpha,\beta) = (1-t)^{\frac{1}{2}(1+\alpha)}(1+t)^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \,.\, Q_n(t;\alpha,\beta)$$

wo $P_n(t;\alpha,\beta)$ das Jacobische Polynom vom Grad n und $Q_n(t;\alpha,\beta) \in (P_n)$ mit $W(P_n, Q_n) \neq 0$ ist. Die Funktionen P_n, Q_n haben folgende Eigenschaften – siehe [3], [4]:

1° *für* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ *hat* $P_n[Q_n]$ *in* j *genau* $n[n+1]$ *Nullstellen;*

2° *für* $-1 < \alpha, \beta < 0$, $\alpha + \beta = -1$ *hat* $P_n[Q_n]$ *in* j *genau* $n[n-1]$ *Nullstellen;*

3° *weiter gilt* $P_n(-1;\alpha,\beta) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}$, $P_n(1;\alpha,\beta) = \binom{n+\alpha}{n}$,

für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ *ist* $\lim\limits_{t\to -1+} |Q_n(t;\alpha,\beta)| = \lim\limits_{t\to 1-} |Q_n(t;\alpha,\beta)| = +\infty$,

für $-1 < \alpha, \beta < 0$, $\alpha + \beta = -1$ *gibt es eine* $Q_n(t;\alpha,\beta) \in (P_n)$

mit $\lim\limits_{t\to -1+} Q_n(t;\alpha,\beta) = \lim\limits_{t\to 1-} Q_n(t;\alpha,\beta) = 0$.

3.2 Gegeben sei das Intervall $j = (-1, 1)$ und die Folge der Dgln $(-I_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wenn wir $J = (0, \pi)$ wählen, dann müssen wir für die vollständige Transformation der Lösungen von $(-m^2)$ in die Lösungen von $(-I_n)$ die Funktion $m = m(n)$ in folgender Weise wählen:

3.2.1 Für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ wählen wir $m = n + 1$. Die Dgln $(-(n+1)^2)$, $(-I_n)$ sind in den Intervallen J, j desselben Charakters, denn wie $\sin(n+1)T$ so auch $p_n(t;\alpha,\beta) = u_n$ haben n Nullstellen, während $\cos(n+1)T$ bzw. $q_n(t;\alpha,\beta) = v_n$ genau $n+1$ Nullstellen in J bzw. j besitzen. Das beliebige Integral der Dgln $(-(n+1)^2)$, $(-I_n)$ besitzt höchstens $n+1$ Nullstellen in den Intervallen J bzw. j. Wenn wir $q_n(t;\alpha,\beta)$ so wählen, dass die Bedingungen von Satz 3 erfüllt sind, dann gilt für die Funktion

$X_n(t) = \dfrac{1}{n+1} f_n(t)$, *wo* $f_n(t)$ *durch* (f_n) *bestimmt ist:*

1° $X_n \in C^{(3)}(j)$, $X_n'(t) \neq 0$ für $t \in j$;

2° $X_n \in (-(n+1)^2, -I_n)$;

3° $X_n(j) = J = (0, \pi)$;

4° $p_n(t;\alpha,\beta) = [\sin(n+1) X_n(t)] / |(n+1) X_n'(t)|^{\frac{1}{2}}$,
$q_n(t;\alpha,\beta) = [\cos(n+1) X_n(t)] / |(n+1) X_n'(t)|^{\frac{1}{2}}$;

5° $W(u_n, v_n) = W(p_n, q_n) = -\operatorname{sgn} X_n'$.

Die Behauptungen 1°, 2°, 4°, 5° sind nur Spezialfälle voriger allgemeiner Behauptungen; die Richtigkeit der Behauptung 3° folgt aus der Konstruktion der Funktionen X_n und aus der Eigenschaft 3° der Polynomen $P_n(t;\alpha,\beta)$ in 3.1. Die Behauptung 5° lässt sich auch durch direkte Berechnung überprüfen.

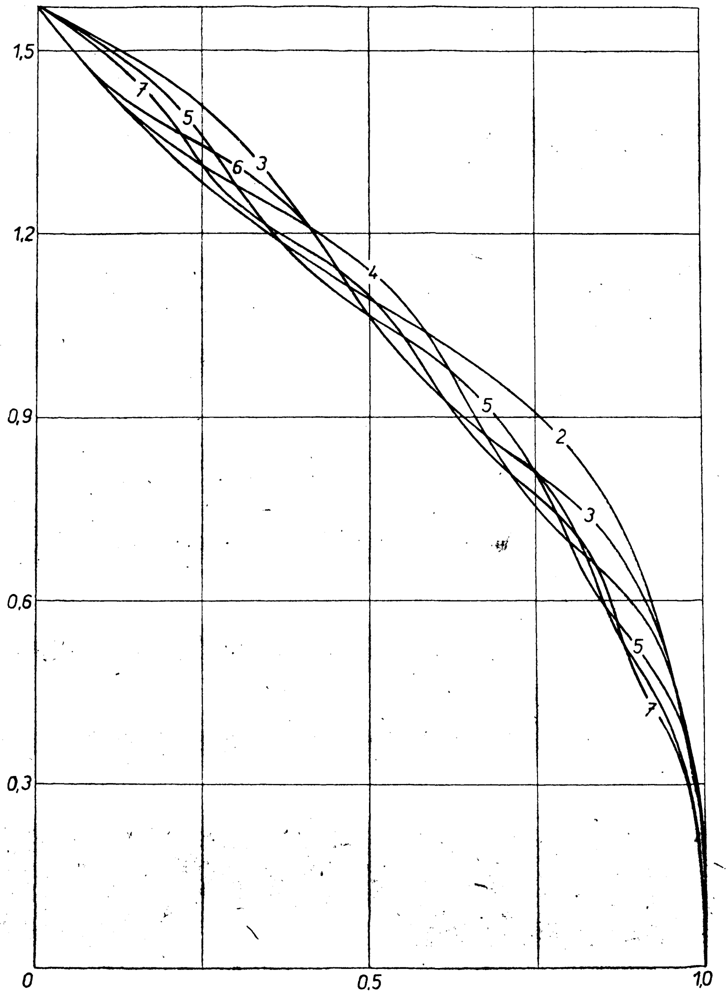
3.2.2 Wenn $-1 < \alpha, \beta < 0$, $\alpha + \beta = -1$ ist, so wählen wir $m = n$. Die Dgln $(-n^2)$, $(-I_n)$ sind in diesem Falle desselben Charakters in den Intervallen $J = (0, \pi)$

bzw. $j = (-1, 1)$, denn $\sin nT$ und $q_n(t; \alpha, \beta) = u_n$ haben genau $n-1$ Nullstellen während $\cos nT$ und $p_n(t; \alpha, \beta) = v_n$ genau n Nullstellen besitzen; $q_n(t; \alpha, \beta)$ kann man so wählen (siehe 3.1, 3°), dass $\lim u_n/v_n = \lim q_n/p_n = 0$ für $t \to -1_+$ und $t \to +1_-$ gilt.

Die Funktion $X_n(t) = \frac{1}{n} f_n(t)$, wo $f_n(t)$ durch (f_n) bestimmt ist, hat dann folgende Eigenschaften

1° $X_n \in C^{(3)}(j)$, $X_n'(t \neq 0$ *für* $t \in j$;

2° $X_n \in (-n^2, -I_n)$;



Tab. 1

3° $X_n(j) = J$;
4° $p_n(t; \alpha, \beta) = [\cos nX_n(t)]/|nX_n'|^{\frac{1}{2}}$,
$q_n(t; \alpha, \beta) = [\sin nX_n(t)]/|nX_n'|^{\frac{1}{2}}$;
5° $W(p_n, q_n) = -\operatorname{sgn} X_n$.

3.3 *Beispiel.* Für $\alpha = \beta = 0$ stellt die Dgl (P_n) die Dgl der Legendreschen Polynomen $P_n(t; 0, 0) = P_n(t) = (2^n n!)^{-1}(d^n/dt^n)\,[(t^2 - 1)^n]$ dar; ähnlich schreiben wir $Q_n(t; 0, 0) = Q_n(t)$. Die zugehörige Dgl $(-I_n)$ hat dann linear unabhängige Lösungen

$$p_n(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} P_n(t) \text{ mit } n \text{ Nullstellen } t_{in} \text{ im Intervall } j = (-1, 1),$$

$$q_n(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} Q_n(t) \text{ mit } n + 1 \text{ Nullstellen } t'_{in} \text{ in } j.$$

Um die Funktion $q_n(t)$ mit $Wp_n, q_n) = 1$ zu bestimmen, muss

$$q_n(t) = p_n(t) \int \frac{dt}{p_n^2(t)} \qquad \text{für } t \neq t_{in}, \qquad q_n(t_{in}) = [P_n'(t_{in})]^{-1}.$$

gelten.
Für die entsprechende Funktion $Q_n(t) \in (P_n)$ bekommen wir

$$Q_n(t) = P_n(t) \int \frac{dt}{(1 - t^2)\, P_n^2(t)} \qquad \text{für } t \neq t_{in}, \qquad Q_n(t_{in}) = [(1 - t_{in}^2) P'_n(t_{in})]^{-1}.$$

Bekanntlich (vgl. [4]) sind alle Wurzeln t_{in} der Polynomen $P_n(t)$ reell und liegen im Intervall $j = (-1, 1)$; man kann dann $P_n(t) = a_n \prod_{i=1}^{n} (t - t_{in})$ schreiben. Nach Integration mittels Partialbruchzerlegung bekommen wir für $Q_n(t)$

$$Q_n(t) = P_n(t)\left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t_{in}^2} \, \frac{1}{P_n'^2(t_{in})} \, \frac{P_n(t)}{t - t_{in}} \tag{Q}$$

Die Funktionen $P_n(t)$, $Q_n(t)$ sind z. B. in [2] tabelliert. Wenn wir mit $\{t_{in}\}$ bzw. $\{t'_{in}\}$ die wachsenden Folgen der Nullstellen von $P_n(t)$ bzw. $Q_n(t)$ bezeichnen, dann ist $Q_n(t_{1n}) = (-1)^n$ (vgl. [2]). Für die Transformationsfunktion $X_n(t)$ gilt

$$X_n'(t) = \frac{1}{n + 1} \begin{cases} \operatorname{arctg}[P_n(t)/Q_n(t)] + k_n(t)\pi, \quad k_n(t) = k_{on} - \mathrm{i} \operatorname{sgn} W_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \; t \in (t'_{in}, t'_{i+1,n}) \qquad i = 0, 1, \ldots, n + 1; \\ \left[k_{0n} - \left(\dfrac{-1}{2} + i\right) \operatorname{sgn} W_n\right] \pi \qquad \textit{für } t = t'_{in}, \end{cases}$$

$$k_{0n} \textit{ ganzzahlig.} \qquad i = 1, \ldots, n + 1;$$

$$X_n'(t) = -\frac{1}{n + 1} \, \frac{W(p_n, q_n)}{p_n^2 + q_n^2} = -\frac{1}{n + 1} \, \frac{1}{(1 - t^2)(P_n^2 + Q_n^2)} < 0,$$

was mit $1 = W_n = W(p_n, q_n) = -\operatorname{sgn} X_n'$ übereinstimmt.

Um die Bedingungen von Satz 3 und Forderungen $X_n(j) = (0, \pi)$, $X_n \in C(j)$ zu erfüllen, genügt es im unseren Beispiel den ganzzahligen Parameter $k_n(t)$ folgenderweise zu wählen: $k_n(t) = k = n - i + 1$ im Intervall $(t'_{in}, t'_{i+1,n})$, $i = 0, 1, \ldots, n + 1$; $t'_{on} = -1$, $t'_{n+2,n} = 1$.

Die Richtigkeit der Beziehungen

$$p_n(t) = [\sin (n + 1) X_n(t)] / |(n + 1) X'_n(t)|^{\frac{1}{2}},$$

$$q_n(t) = [\cos (n + 1) X_n(t)] / |(n + 1) X'_n(t)|^{\frac{1}{2}}$$

kann man durch direkte Berechnung folgenderweise verifizieren: für alle reelle x ist $\sin (\operatorname{arctg} x) = x/(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\cos (\operatorname{arctg} x) = 1/(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ und für beliebige $t \in j$ gilt daher

$$\frac{\sin [\operatorname{arctg} (P_n/Q_n) + k\pi]}{|(\operatorname{arctg} (P_n/Q_n) + k\pi)'|^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^k \operatorname{sgn} Q_n}{|P'_n Q_n - P_n Q'_n|^{\frac{1}{2}}} P_n = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} P_n = p_n,$$

denn $(-1)^k \operatorname{sgn} Q_n = 1$, $W(P_n, Q_n) = 1/(1 - t^2)$. Ähnlich haben wir

$$\frac{\cos [\operatorname{arctg} (P_n/Q_n) + k\pi]}{|(\operatorname{arctg} (P_n/Q_n) + k\pi)'|^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^k \operatorname{sgn} Q_n}{|P'_n Q_n - P_n Q'_n|^{\frac{1}{2}}} Q_n = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} Q_n = q_n$$

Die Graphe der Funktionen $X_n(t)$ sind für $n = 2, 3, \ldots, 7$ in Abbildung 1 aufgezeichnet; wegen der Zentralsymmetrie mit dem Zentrum $[O, 1/2\,\pi]$ wurde nur ein dem Intervall $< 0,1)$ entsprechender Teil des Graphes aufgegeben (die Symmetrie ist festgestellt durch die Beziehung $P_n(-t)/Q_n(-t) = -P_n(t)/Q_n(t)$).

4. Im Spezialfalle $\alpha = \beta = 0$ der Jacobischen Polynomen erinnert uns der Verlauf der Funktionen $X_n(t)$ an den der Funktion $X(t) = \arccos t$. Wir wollen folgendes Problem studieren: existiert für irgendwelche Werte von Parametern α, β eine Funktion $X_n(t) = X(t; \alpha, \beta)$ unabhängig vom Parameter n (d. h. für ganze Folge der Dgln $(-I_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine gemeinsame Transformationsfunktion $X(t; \alpha, \beta)$? Wir wissen aus Vorangehendem (Sätze 1, 2; die Eigenschaft 2° der Funktionen X_n), dass $X_n \in (-m^2, q_n)$, $X'_n \neq 0$ für $t \in j$ genau dann gilt, wenn für $y_{1n}, y_{2n} \in (y_n)$ auch y_{1n}, $y_{2n} \in (q_n)$, $W(y_{1n}, y_{2n}) = -\operatorname{sgn} X'_n$ ist. Zur Existenz einer für die ganze Folge der Dgln $(-I_n)$ gemeinsamer Transformationsfunktion $X_n = X(t; \alpha, \beta)$ ist notwendig und hinreichend, dass eine Beziehung $m = m(n)$ besteht, wobei die Dgl $(-m^2, -I_n)$ den Parameter n nicht enthält.

Satz 4. Funktion $X_n(t; \alpha, \beta) \in (-m^2, -I_n)$, $m = m(n)$ ist vom Parameter n unabhänging genau für die Werte $\alpha, \beta = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, d. h. für die Paare $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Beweis. Nehmen wir an, dass die Dgl $(-m^2, -I_n)$ eine von n unabhängige Lösung $X_n = X(t; \alpha, \beta)$ besitzt, d. h. es gilt

$$-\{X, t\} - m^2 X'^2 = -\left[n(\alpha + \beta + n + 1) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)\right](1 - t^2)^{-1} - \\ - \frac{1 - \alpha^2}{4(1 - t)^2} - \frac{1 - \beta^2}{4(1 + t)^2}$$

Dies kann genau dann gelten, wenn auch

$$m^2 = [C + n(\alpha + \beta + n + 1)]/X'^2(1 - t^2) \quad \text{mit } C \text{ konstant ist.}$$

Daraus $X'^2 = K^2/(1 - t^2)$, d. h. $X = K \arccos t$, K konstant; ohne Verlust der Allgemeinheit können wir wählen $K = 1$.
Folglich soll

$$m^2 = n(\alpha + \beta + n + 1) + C = \left[n + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)\right]^2 + C - \frac{1}{4}(\alpha + \beta + 1)^2 \quad \text{(m)}$$

gelten.
Die Funktion $X(t) = \arccos t$ genügt der Beziehung $\{X, t\} = (2 + t^2)/4(1 - t^2)^2$. Für die Gültigkeit der Beziehung $\arccos t \in (-m^2, -I_n)$, $m \in (m)$ ist es notwendig, dass

$$\frac{2 + t^2}{4(1 - t^2)^2} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1) - C}{1 - t^2} + \frac{1 - \alpha^2}{4(1 - t)^2} + \frac{1 - \beta^2}{4(1 + t)^2}$$

gilt. Nach einiger Umformungen und nach Koeffizientenvergleich bekommen wir für α, β, C die Gleichungen

$$\begin{aligned} -4C + 2(\alpha + 1)(\beta + 1) - \alpha^2 - \beta^2 &= 0 \\ -\alpha^2 + \beta^2 &= 0 \\ 4C - 2(\alpha + 1)(\beta + 1) - \alpha^2 - \beta^2 &= -1. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat genau die im Satz 4 angegebene (α, β) – Lösungen und $C = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + 1)^2$. Für diese Werte (α, β) ist

$$m = n + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1), \quad \text{d. h.}$$

$$m = n \quad \text{für } \alpha = \beta = -\frac{1}{2},$$

$$m = n + 1 \quad \text{für } \alpha = \beta = \frac{1}{2},$$

$$m = n + \frac{1}{2} \quad \text{für } \alpha = -\beta = \pm\frac{1}{2}.$$

Umgekehrt ist für diese Paare (α, β) und die Funktion $X(t) = \arccos t$

$$m^2X'^2 = [n(\alpha + \beta + n + 1) + C]/(1 - t^2), \qquad C = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + 1)^2,$$

$$\{X, t\} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1) - C}{1 - t^2} + \frac{1 - \alpha^2}{4(1 - t)^2} + \frac{1 - \beta^2}{4(1 + t)^2}$$

weshalb auch $-\{X, t\} - m^2X'^2 = -I_n$, d. h. $X \in (-m^2, -I_n)$. Die Behauptung des Satzes 4 ist in Übereinstimmung mit den Beziehungen

$$T_n(t) = P_n\left(t; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \cos(n \arccos t),$$

$$U_n(t) = P_n\left(t; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \doteq (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \sin[(n + 1) \arccos t]$$

(Tschebyschevsche Polynome erster und zweiter Art);

$$P_n\left(t; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2(1 + t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos t\right];$$

$$P_n\left(t; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2(1 - t)^{-\frac{1}{2}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos t\right].$$

LITERATUR

[1] *Borůvka, O.:* Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. DVW Berlin, 1967.

[2] *Jahnke E., Emde F., Lösch F.:* Tafeln höherer Funktionen. B. G. Teubner, Stuttgart, 1960.

[3] *Kobza J.:* Zur Bestimmung der Grundintegrale von Differentialgleichung $y'' = q(x)\ y$. Acta UPO, FRN, T 37 (1972), s. 23–33.

[4] *Szegö G.:* Orthogonal polynomials. AMS Colloq. Publ., vol. XXIII, N. Y. 1959.

Shrnutí

O TRANSFORMAČNÍ FUNKCI PRO JISTOU DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI DRUHÉHO ŘÁDU

JIŘÍ KOBZA

V předložené práci jsou odvozeny některé poznatky z teorie transformací dif. rovnic tvaru (q). Studuje se posloupnost takových transformací mezi řešeními dvou posloupností dif. rovnic; podrobný rozbor je proveden pro rovnice funkcí sin mT, cos mT a Jacobiho polynomů $P_n(t; \alpha, \beta)$. Pro speciální případ Legendreových polynomů jsou transformační funkce nakresleny na obr. 1. V závěru je studována existence transformační funkce, společné pro celou posloupnost rovnic $(-I_n)$.

Резюме

О ФУНКЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ИРЖИ КОБЗА

В работе изучается преобразование решений дифференциального уравнения $y'' = -m^2y$ на решения диф. уравнения полиномов Якоби. Показано существование единственной функции преобразования для последовательностей уравнений, соответствующих некоторым значениям параметров α, β.