Josef Hošek

Über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 63--69

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120026`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ÜBER EINE NICHTLINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

JOSEF HOŠEK

(Eingegangen am 20. September 1972)

In dieser Mitteilung werden wir die Differentialgleichung (im weiteren Dgl.)

$$x''' + g(x', x'') + h(x) = Q(t) \tag{1}$$

betrachten, mit $g(x', x'')$, $h(x)$ und $Q(t)$ stetig für alle Werte ihrer Argumente. Weiter werden wir die Existenz solcher positiver Konstanten a, b, M, Q_0 voraussetzen, daß

1) $| ax'' + bx' - g(x', x'') | \leqq M$ für alle x', x'',
2) $| h(x) | \leqq H$ für alle x,
3) $| Q(t) | \leqq Q_0$ für alle t.

Satz 1: *Unter den Voraussetzungen 1), 2), 3) existieren alle Lösungen der Dgl. (1) auf einer Halbgeraden und es gibt eine Konstante $\bar{D}$ so, daß für jede Lösung der betrachteten Dgl. folgende Relationen gelten:*

$$\limsup_{t\to+\infty} | x'(t) | \leqq \bar{D}, \qquad \limsup_{t\to+\infty} | x''(t) | \leqq \bar{D}, \qquad [\limsup_{t\to+\infty} | x'''(t) | \leqq \bar{D}].$$

Beweis: Wir betrachten zwei Dgln.

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

$$y'' + ay' + by = p(t) \tag{2a}$$

mit $p(t)$ stetig für alle t. Wir wollen mit $y_1(t)$ die allgemeine Lösung der Dgl. (2) bezeichnen und weiter mit $y_0(t)$ die Lösung derselben Dgl., die den Anfangsbedingungen

$$y_0(0) = 0, \qquad y_0'(0) = 1$$

genügt. Die allgemeine Lösung der Dgl. (2a) kann man dann in der Form

$$y(t) = y_1(t) + \int^t y_0(t - v)\, p(v)\, \mathrm{d}v \tag{3}$$

schreiben. Wir greifen nun eine beliebige Lösung $x(t)$ der Dgl. (1) heraus, die wir im weiteren festhalten wollen und bezeichnen

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x_0', \qquad x''(t_0) = x_0''.$$

Wenn wir $x(t)$ in (1) einsetzen, so erhalten wir

$$x''' + ax'' + bx' + h(x) = Q(t) + ax'' + bx' - g(x', x'') \tag{4}$$

identisch für alle $t \in I_X$, wo I_X das Existenzintervall der betrachteten Lösung $x(t)$ bedeutet. Schreiben wir für $t \in I_X$

$$y(t) = x'(t) \tag{5}$$

und weiter

$$p(t) = Q(t) + ax''(t) + bx'(t) - g[x'(t), x''(t)] - h(x(t)), \tag{6}$$

so können wir die Identität auf die Form (2a) bringen. Wenn wir im weiteren mit $y_1(t)$ diejenige Lösung der Dgl. (2) bezeichnen, die den Anfangsbedingungen

$$y_1(t_0) = x_0', \qquad y_1'(t_0) = x_0'',$$

genügt, so erhalten wir nach (3), (5), (6) für die erste Ableitung der Lösung $x(t)$ die Formel

$$x'(t) = y_1(t) + \int_{t_0}^{t} y_0(t - v)\,[Q(v) + ax''(v) + bx'(v) -$$

$$- g(x'(v), x''(v)) - h(x(v))]\,\mathrm{d}v; \tag{7}$$

hiervon bekommen wir mittels 1), 2), 3) schon die Abschätzung

$$|\,x'(t)\,| \leqq |\,y_1(t)\,| + (Q_0 + M + H)\int_{t_0}^{t} |\,y_0(v)\,|\,\mathrm{d}v \tag{8}$$

für alle $t \geqq t_0$, $t \in I_X$. Da zu den Funktionen $y_i(t)$ $(i = 0, 1)$ immer eine Majorante in der Form $Ne^{-\lambda t}$ $(N > 0, \lambda > 0)$ zu finden ist, folgt aus (8) die Abschätzung

$$|\,x'(t)\,| < |\,y_1(t)\,| + (Q_0 + M + H)\,\lambda^{-1}N\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0} = B(t_0). \tag{9}$$

Aus (9) folgt für die Lösung $x(t; x_0, x_0', x_0'')$ der Dgl. (1) mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$|\,x(t)\,| \leqq |\,x(t_0)\,| + B(t_0)\,(t - t_0),$$

für $t \geqq t_0$, $t \in I_X$. Aus dem Existenzatze für Systeme von Dgln. (vgl. [1], S. 135, Satz 2) folgt nun unmittelbar daß $I_X = \langle t_0, +\infty)$ ist. Wen wir uns also auf $t_0 \geqq 0$ beschränken, erhalten wir aus (9) für $t \in \langle t_0, +\infty)$

$$|\,x'(t)\,| < |\,y_1(t)\,| + (Q_0 + M + H)\,\lambda^{-1}N. \tag{10}$$

Da aber $\lim\limits_{t \to +\infty} | y_1(t) | = 0$ gilt, muß für jedes $t \geqq t_1(x_0', x_0'') \geqq t_0$ die Ungleichhtie

$$| x'(t) | \leqq B = \lambda^{-1} N(Q_0 + M + H) + 1. \tag{11}$$

gelten.

Wir betrachten weiter die linearen Dgln.

$$z' = az = 0 \tag{12}$$

$$z' + az = p(t), \tag{12a}$$

wo $p(t)$ stetig für alle t ist. Für die allgemeine Lösung von (12a) haben wir wieder

$$z(t) = z_1(t) + \int^t z_0(t - v)\, p(v)\, \mathrm{d}v$$

wo $z_1(t)$ die allgemeine und $z_0(t)$ die partikuläre $(z_0(0) = 1)$ Lösungen von (12) bedeuten. Wir formen wieder die Identität (4) in

$$x''' + ax'' = Q(t) + \big(ax'' + bx' - g(x', x'')\big) - bx' - hx \tag{13}$$

um und setzen

$$z(t) = x''(t)$$

$$p(t) = Q(t) + [ax''(t) + bx'(t) - g\big(x'(t), x''(t)\big)] - bx'(t) - \\ - h\big(x(t)\big). \tag{14}$$

Die Identität (13) nimmt dadurch die Form (12a) an. Wir wählen nun für $z_1(t)$ diejenige Lösung der Dgl. (12), für welche $z_1(t_1) = x''(t_1)$; dann ist die zweite Ableitung der Lösung $x(t)$ durch die Formel

$$x''(t) = z_1(t) + \int_{t_1}^{t} z_0(t - v)\, \{Q(v) + [ax''(v) + bx'(v) - \\ - g\big(x'(v), x''(v)\big)] - bx'(v) - h\big(x(v)\big)\}\, \mathrm{d}v$$

gegeben. Wenn wir 1), 2), 3), (11) benutzen, kommen wir zu der Abschätzung

$$| x''(t) | \leqq | z_1(t) | + a^{-1}(Q_0 + M + H + bB)$$

gültig für alle $t \geqq t_1$. Da aber $z_1(t) \to 0$ für $t \to +\infty$ ist, kommen wir schließlich zu folgendem Resultate:

$$| x''(t) | \leqq A = a^{-1}(Q_0 + M + bB + H) + 1, \tag{15}$$

welches für jedes $t \geqq t_2 \geqq t_1$ richtig ist.

Es bleibt uns jetzt noch die Beschränkheit der dritten Ableitung zu beweisen. Aus (4) folgt unmittelbar

$$| x'''(t) | \leqq | Q(t) | + | ax''(t) + bx'(t) - g\big(x'(t), x''(t)\big) | + \\ + a\, | x''(t) | + b\, | x'(t) | + h\big(x(t)\big)$$

und daraus folgt, wenn wir noch 1), 2), 3), (11), (15) erwägen,

$$| x'''(t) | \leqq A_1 = Q_0 + M + H + aA + bB.$$

Diese Abschätzung ist für alle $t \geqq t_2$ richtig. Setzen wir $\bar{D}_1 = \max(B, A, A_1)$, so müssen also für alle $t \geqq t_2(x'_0, x''_0)$ folgende Ungleichheiten richtig sein

$$| x'(t) | \leqq \bar{D}_1, \qquad | x''(t) | \leqq \bar{D}_1, \qquad | x'''(t) | \leqq \bar{D}_1,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Um auch die Beschränktheit der Lösung $x(t)$ zu beweisen, müssen wir über $h(x)$ und $Q(t)$ wietere Voraussetzungen machen.

Satz 2: *Die Voraussetzungen 1), 2), 3), seien erfüllt und darüber mögen die Funktionen $h(x)$, $Q(t)$ noch folgende Eigenschaften besitzen: Es gibt eine Konstante $h > 0$ so, daß*

$$h(x) \operatorname{sgn} x \geqq M \text{ für jedes } | x | \geqq h \qquad (0 < M < H), \tag{16}$$

$$\left| \int_0^t Q(v)\, dv \right| \leqq Q_1 \text{ für jedes } t \qquad (0 < Q_1 = \text{Konst.}). \tag{17}$$

Dann ist jede Lösung $x(t)$ der Dgl. (1) beschränkt.

Beweis: Wir betrachten eine beliebige Lösung $x(t)$ der Dgl. (1) und nehmen an, daß $x(t)$ in einem Intervalle (t_1, t_2), $(t_0 \leqq t_1 < t_2 \leqq +\infty)$, der Ungleichheit

$$| x(t) | > h \tag{18}$$

genügt. Aus (4) folgern wir für unsere Lösung $x(t)$ die Identität

$$\begin{aligned} bx'(t) = Q(t) + [ax''(t) + bx'(t) - g(x'(t), x''(t))] - h(x(t)) - \\ - ax''(t) - x'''(t), \end{aligned} \tag{19}$$

die wir zwischen den Grenzen t_1, t integrieren und durch die Konstante $\operatorname{sgn} x(t)$ multiplizieren. Mit Hilfe von (16), (18) kommen wir zu der Identität

$$\begin{aligned} b[x(t) - x(t_1)] \operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x(t) \int_{t_1}^t Q(v)\, \mathrm{d}v - \int_{t_1}^t [h(x(v)) + \\ + g(x'(v), x''(v)) - ax''(v) - bx'(v)] \operatorname{sgn} x(v)\, \mathrm{d}v - \\ - \mathrm{a} \operatorname{sgn} x(t)\, [x'(t) - x'(t_1)] - \operatorname{sgn} x(t)\, [x''(t) - x''(t_1)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Wir können also $x(t)$ folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned} b\, | x(t) - x(t_1) | \leqq \left| \int_{t_1}^t Q(v)\, \mathrm{d}v \right| + a\, | x'(t) - x'(t_1) | + \\ + | x''(t) - x''(t_1) | \end{aligned}$$

und daraus nach (17)

$$b\, | x(t) - x(t_1) | \leqq 2(Q_1 + a \sup_{t \in \langle t_1, t_2)} | x'(t) | + \sup_{t \in \langle t_1, t_2)} | x''(t) | = N.$$

Daraus folgt für jedes t aus dem betrachteten Intervalle

$$| x(t) | \leqq | x(t_1) | + Nb^{-1}. \tag{21}$$

Für $t_2 = +\infty$ ist $| x(t) | > h$ für jedes $t > t_1$ und die Lösung $x(t)$ ist also nach (21) beschränkt. Wenn aber $t_2 < +\infty$ ist, muß es natürlich für jedes $t > t_2$

$$| x(t) | \leqq h + Nb^{-1}$$

sein. Der Satz 2 ist damit bewiesen.

Wenn wir die Voraussetzung über $h(x)$ noch verstärken, können wir zu der künftigen Beschränktheit der Lösungen der betrachteten Dgl. gelangen.

Satz 3: *Wenn die Voraussetzungen 1), 2), 3), (17) erfüllt sind und darüber noch*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} h(x) \operatorname{sgn} x > M, \tag{22}$$

gilt, so gibt es eine Konstante D so, daß für jede Lösung der Dgl. (1) *die Ungleichheiten*

$$\limsup_{t \to +\infty} | x(t) \leqq D, \qquad \limsup_{t \to +\infty} | x'(t) | \leqq D, \qquad \limsup_{t \to +\infty} | x''(t) | \leqq D,$$

$$[\limsup_{t \to +\infty} | x'''(t) | \leqq D]. \tag{23}$$

gelten.

Beweis: Wir halten eine beliebige Lösung $x(t)$ der Dgl. (1) fest; laut Satz 1 gibt es eine Zahl $T \geqq t_0$ mit der Eigneschaft, daß für alle $t \geqq T$

$$| x'(t) | \leqq \bar{D} + 1, \qquad | x''(t) | \bar{D} + 1 \tag{24}$$

ist. Aus (22) folgt die Existenz solcher postiver Zahlen h, δ daß

$$h(x) \operatorname{sgn} x \geqq M + \delta \tag{25}$$

für jedes $| x | \geqq h$ gilt. Wenn es nun für jedes $t \geqq T$

$$| x(t) | \geqq h \tag{26}$$

gilt, können wir wieder die Identität (20), mit T an der Stelle von t_1 schreiben. Setzen wir zur Abkürzung

$$g\bigl(x'(t), x''(t)\bigr) - ax''(t) - bx'(t) = \varphi(t),$$

so können wir die Funktion unter dem Integralzeichen an der rechten Seite von (20) in der Form

$$h\bigl(x(v)\bigr) \operatorname{sgn} x(v) + \varphi(v) \operatorname{sgn} x(v)$$

schreiben. Mit Hilfe von 1), (25), (26) kann man also folgende Abschätzung aufstellen:

$$\int_T^t [h\bigl(x(v)\bigr) + \varphi(v)] \operatorname{sgn} x(v) \, dv \geqq \delta(t - T), \tag{27}$$

die uns zur Abschätzung von $x(t)$ beiträgt. Für jedes $t \geqq T$ folgt nämlich aus den Voraussetzungen des Satzes und aus (24), (26), (27)

$$b \mid x(t) - x(T) \mid \leqq 2\big(Q_1 + (a + 1)(\bar{D} + 1)\big) - \delta(t - T),$$

d. h. auch

$$\mid x(t) \mid \leqq \mid x(T) \mid + 2b^{-1}\big(Q_1 + (a + 1)(\bar{D} + 1)\big) - \tfrac{1}{2}\delta(t - T). \tag{28}$$

Aus (28) folgt aber für genügend großes $t - T$ ein Widerspruch und deshalb kann die Ungleichheit (28) nicht für jedes $t \geqq T$ gelten. Wir schließen daraus, daß für jede Lösung der Dgl. (1)

$$\liminf_{t \to +\infty} \mid x(t) \mid \leqq h \tag{29}$$

sein muß. Für $\alpha > 0$ können also nach (29) nur folgende zwei Fälle auftreten:

a) Es gibt ein $\bar{t} \geqq T$ so, daß für $t \geqq \bar{t}$ stets $\mid x(t) \mid < h + \alpha$ bleibt. In diesem Falle ist also der Satz bewiesen.

b) Es gibt eine wachsende, divergente Folge $\{\bar{t}_n\}$, $\bar{t}_1 > T$ mit $x(\bar{t}_n) = h + \alpha$ für $n = 1, 2, \ldots$.

In diesem Falle gilt nach (28) in denjenigen Intervallen $(\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1})$, in denen $\mid x(t) \mid > h + \alpha$ ist, die Relation

$$\mid x(t) \mid \leqq (h + \alpha) + 2b^{-1}\big(Q_1 + (a + 1)(\bar{D} + 1)\big),$$

welche demzufolge durch alle Lösungen der Dgl. (1) befriedigt ist. Um den Beweis abzuschließen, genügt es nun bloß

$$D = \max\,[\bar{D}, (h + \alpha) + 2b^{-1}\big(Q_1 + (a + 1)(\bar{D} + 1)\big)]$$

zu setzen.

Satz 4: *Wenn außer 1), 2), 3), noch folgendes gilt:*

a) *es gibt positive Zahlen δ, g_1 derart, daß*

$$h(x) \operatorname{sgn} x \leqq -(M + \delta)$$

für alle $\mid x \mid > g_1$ gilt und

b) $\left| \int_0^t Q(v)\, dv \right| \leqq Q_1$, ($0 < Q_1 =$ Konst.), *für alle t ist, so besitzt die Dgl. (1) eine Lösung, für welche*

$$\lim_{t \to +\infty} \mid x(t) \mid = +\infty$$

ist.

Der Beweis dieses Satzes kann mit Hilfe der Funktion

$$V(x_1, x_2, x_3, t) = (2b)^{-1} (x_3 + ax_2 - \int_0^t Q(v)\, dv + bx_1)^2$$

analog erbracht werden, wie der Beweis einer ähnlichen Behauptung z. B. in [3].

Satz 5: *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt sind, die Dgl. (1) eine Eideutigkeitsbedingung erfüllt und $Q(t)$ eine periodische Funktion ist, so gibt es auch eine periodische Lösung der Dgl. (1).*

Beweis: Es ist leicht einzusehen, daß das der betrachteten Dgl. (1) äquivalente System ein dissipatives System ist, der den Voraussetzungen des Satzes aus [2], S. 32 genügt.

LITERATUR

[1] *Kamke, E.:* Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1956.

[2] *Pliss, V. A.:* Nelokal'nyje problemy teorii kolebanij, Moskva, 1964.

[3] *Voráček, J.:* Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Archivum mathematicum (Brno), T. 2 (1966), 19—26.

SHRNUTÍ

O JEDNÉ NELINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI TŘETÍHO ŘÁDU

JOSEF HOŠEK

V práci nejprve se uvádějí postačující podmínky pro dissipativnost rovnice (1) vzhledem k jejím derivacím x', x'', x''' (D'-dissipativnost), pro omezenost všech jejích řešení a pro dissipativnost uvažované rovnice. Dále je uvedena věta o existenci t. zv. D'-divergentního řešení a konečně podmínka existence periodického řešení rovnice (1), když její pravá strana je periodickou funkcí.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ИОСИФ ГОШЕК

В настоящей работе приводятся с начала достаточные условия для диссипативности уравнения (1) по отношению к производным x', x'', x''' (D' — диссипативность) для ограниченности всех ее решений и для диссипативности рассматриваемого уравнения. Далее приводится теоремы о существовании так называемого D'-расходящегося решения и условие существования периодического решения уравнения (1), когда правая сторона периодична.