

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Pavel Chmela

Generace vyšších harmonických frekvencí při průchodu světla nelineárním
prostředím

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
10 (1969), No. 1, 219--251

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119910>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra teoretické fyziky a astronomie
Vedoucí katedry: prof. RNDr. et DSc. Bedřich Havelka*

GENERACE VYŠŠÍCH HARMONICKÝCH FREKVENCÍ PŘI PRŮCHODU SVĚTLA NELINEÁRNÍM PROSTŘEDÍM

PAVEL CHMELA

(Došlo dne 14. 6. 1968)

I. Úvod

Některé nelineární optické vlastnosti látek znali již fyzikové minulého století, například Kerrův jev, elektrooptický efekt Pockelsův, Faradayův efekt stáčení kmitosměrové roviny v magnetickém poli aj. U všech těchto jevů se jedná o průchod světla látkou, která se nachází ve vnějším elektrickém nebo magnetickém poli. Optické vlastnosti prostředí vytvářejí se pak současným působením vnějšího pole a pole procházejícího záření na látku.

Čisté optické nelineární vlastnosti látek do počátku šedesátých let tohoto století známy nebyly. Tato skutečnost byla způsobena tím, že fyzikové postrádali intenzivní zdroje monochromatického světla, jichž se jim dostalo teprve objevením kvantových generátorů světla — laserů.

Poprvé byla pozorována generace druhé harmonické frekvence P. A. Frankenem [3] v roce 1961. Franken pozoroval vznik ultrafialového záření o vlnové délce $\lambda = 3470 \text{ \AA}$ při průchodu záření rubínového laseru $\lambda = 6943 \text{ \AA}$ křemenem. Na základě prací Giordmaineho [4] a Markera [9] vypracoval pak Terhune [10] experimentální metody, kterými se podařilo přeměnit až 20 procent záření rubínového laseru v záření druhé harmonické frekvence. Později byla pozorována Duciungem [11] i generace druhé harmonické frekvence při odrazu laserového světla na krystalu GaAs. Z vyšších harmonických frekvencí byla doposud zjištěna experimentálně generace třetí harmonické frekvence [12].

V této práci chceme čtenáře seznámit se základy fenomenologické teorie generace vyšších harmonických frekvencí, při čemž se především zaměříme na generaci druhé harmonické frekvence, která vzniká v důsledku nelineární dipolové polarizace dielektrika.

II. Maxwellovy rovnice v nelineárním prostředí

Při odvození Maxwellových rovnic, které popisují makroskopické elektromagnetické pole, vycházíme z rovnic pro mikroskopické elektromagnetické pole

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} + \varrho_m \vec{v}, & \operatorname{div} \vec{d} &= \varrho_m \\ \operatorname{rot} \vec{d} &= -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{b} &= 0, \end{aligned} \tag{II.1}$$

kde \vec{e} je vektor mikroskopické elektrické intenzity, \vec{d} je vektor mikroskopické elektrické indukce, \vec{h} je vektor mikroskopické magnetické intenzity, \vec{b} je vektor mikroskopické magnetické indukce, ρ_m je mikroskopická hustota náboje a \vec{v} je rychlost pohybu náboje. Všechny veličiny se zde rychle mění jak v čase, tak v prostoru. Označíme-li ε_0 permitivitu vakua a μ_0 permeabilitu vakua, pak mezi elektrickými a magnetickými vektory platí vztahy

$$\vec{d} = \varepsilon_0 \vec{e}, \quad \vec{b} = \mu_0 \vec{h}, \quad (\text{II.2})$$

vzhledem k tomu, že Lorentzovy rovnice pro mikroskopické pole uvažujeme ve vakuu.

Abychom dospěli od Lorentzových rovnic pro mikroskopické pole k Maxwellovým rovnicím pro pole makroskopické, je třeba zavést středování mikroskopických funkcí a to jak v čase, tak v prostoru. Toto středování provedeme integrací přes objem ΔV , který obsahuje velký počet mikročástic, ale je zanedbatelně malý vzhledem k makroskopickým veličinám, a integrací přes časový úsek $\Delta \tau$, který je značně větší, nežli periody pohybu mikročástic a značně menší, nežli periody v poli makroskopickém

$$\langle f(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta \tau} \int_{\Delta V} \int_{\Delta \tau} f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \quad (\text{II.3})$$

Odtud bezprostředně vyplývá

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle, & \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle, \\ \frac{\partial}{\partial y} \langle f \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle, & \frac{\partial}{\partial z} \langle f \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle. \end{aligned}$$

Středováním druhých dvou Lorentzových rovnic, které neobsahují proudy a náboje, obdržíme rovnice analogické Maxwellovým rovnicím pro makroskopické pole. Lze tedy položit

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}, \quad \langle \vec{b} \rangle = \vec{B}, \quad (\text{II.4})$$

kde jsme označili \vec{E} elektrickou intenzitu makroskopického pole a \vec{B} magnetickou indukci makroskopického pole.

Druhou serii středovaných Lorentzových rovnic zapíšeme tedy ve tvaru

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Řešení těchto rovnic je možno obdržet ve tvaru elektrických a magnetických potenciálů

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A},\end{aligned}\tag{II.6}$$

při čemž volíme podmínku

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Born a Infeld [1] vyvinuli nelineární relativistickou invariantní elektrodynamiku, která při lineární aproximaci přechází v Maxwellovu elektrodynamiku pro vakuum nebo pro izotropní prostředí. V případě spojitého prostředí lze elektrickou intenzitu vyjádřit pomocí řady elektrických multipólových potenciálů a podobně magnetickou indukci pomocí řady magnetických multipólových potenciálů. Zapišeme-li první serii Maxwellových rovnic pro makroskopické pole ve tvaru

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho,\tag{II.7}$$

pak tato teorie při středování Lorentzových rovnic pro mikroskopické pole vede k vyjádření vektorů elektrické indukce \vec{D} a magnetické intenzity \vec{H} ve tvaru (viz [16])

$$\vec{D}^{NL} = \varepsilon_0 \vec{E} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} \nabla^{(n-1)} [n-1] \mathbf{p}_e^{(n)},\tag{II.8}$$

$$\vec{H}^{NL} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} \nabla^{(n-1)} [n-1] \mathbf{p}_m^{(n)},\tag{II.9}$$

kde $\mathbf{p}_e^{(n)}$ je hustota elektrického multipólového momentu, definovaná vztahy

$$\mathbf{p}_e^{(n)}(\vec{r}, t) = \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{ei}^{(n)} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}) \right\rangle\tag{II.10}$$

$$\mathbf{M}_{ei}^{(n)} = \sum_{k=1}^{v_i} \varrho_{m, ik} r_{ik}^n \mathbf{Y}_{ik}^{(n)}\tag{II.11}$$

a $\mathbf{p}_m^{(n)}$ je hustota magnetického multipólového momentu, definovaná vztahy

$$\mathbf{p}_m^{(n)}(\vec{r}, t) = \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{mi}^{(n)} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}) \right\rangle\tag{II.12}$$

$$\mathbf{M}_{mi}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)} \sum_{k=1}^{vi} \varrho_{m, ik} r_{ik}^n \mathbf{Y}_{ik}^{(n)} \times \vec{r}_{ik}. \quad (\text{II.13})$$

$\varrho_{m, ik}$ jsou zde označeny mikroskopické náboje, \vec{r}_{ik} polohové vektory těchto nábojů, $\mathbf{Y}_{ik}^{(n)}$ je operátor n -tého řádu, který má harmonické sférické vlastnosti. Počátek polohových vektorů leží v těžišti hmoty.

V našich úvahách postačí, omezíme-li se u vektoru elektrické indukce na první tři členy rozvoje a u vektoru magnetické intenzity na první dva členy rozvoje (II.8) a (II.9). V tomto případě obdržíme

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} - \text{div } \mathbf{Q} \quad (\text{II.14})$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}}, \quad (\text{II.15})$$

kde jsme označili $\vec{\mathbf{P}}$ vektor dipolové polarizace, \mathbf{Q} tenzor druhého řádu udávající elektrický kvadrupólový moment a $\vec{\mathbf{M}}$ vektor magnetické dipolové polarizace.

Maxwellovy rovnice při tomto označení můžeme formálně zapsat v obvyklém tvaru

$$\text{rot } \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}, \quad \text{div } \vec{\mathbf{D}} = \varrho \quad (\text{II.16})$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{\mathbf{B}} = 0.$$

Při tom je zde písmenem $\vec{\mathbf{j}}$ označen makroskopický proud

$$\vec{\mathbf{j}} = \langle \varrho_m \vec{\mathbf{v}} \rangle - \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} - \text{rot } \vec{\mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{Q}) \quad (\text{II.17})$$

a písmenem ϱ makroskopická hustota náboje

$$\varrho = \langle \varrho_m \rangle + \text{div } \vec{\mathbf{P}} - \text{div} (\text{div } \mathbf{Q}). \quad (\text{II.18})$$

Je nutno zdůraznit, že veličiny $\vec{\mathbf{P}}$, \mathbf{Q} a $\vec{\mathbf{M}}$ ve výrazech (II. 14) a (II.15) jsou v obecném případě funkcemi vektorů $\vec{\mathbf{E}}$ a $\vec{\mathbf{H}}$.

Maxwellovy rovnice (II.16) nejsou jednoznačné. Dipólový vektor polarizace $\vec{\mathbf{P}}$ je stanoven jednoznačně pouze tehdy, když jednotkový objemový element je neutrální. Vektor magnetizace $\vec{\mathbf{M}}$ není stanoven jednoznačně, jestliže $\frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} \neq 0$ a kvadrupólový moment \mathbf{Q} je nejednoznačný, jestliže $\vec{\mathbf{P}} \neq 0$.

Existence kvadrupólových momentů, které závisejí na čase, vede k nutnosti nové definice Poyntingova vektoru. Násobením první Maxwellovy rovnice

skalárně vektorem \vec{E} a třetí Maxwellovy rovnice skalárně vektorem \vec{B} dostaneme po sečtení obou rovnic za použití vztahů (II.14) a (II.15) energetickou rovnici

$$\operatorname{div} \left(\vec{E} \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{grad} \vec{E} : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = 0. \quad (\text{II.19})$$

Zde výrazy $\vec{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}$, $\operatorname{grad} \vec{E} : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}$ jsou úženyými tenzorovými součiny

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \sum_{i,k} E_i \frac{\partial Q_{ik}}{\partial t} \vec{e}_i$$

$$\operatorname{grad} \vec{E} : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \sum_{i,k} \frac{\partial E_i}{\partial x_k} Q_{ik}.$$

Definujeme-li Poyntingův vektor \vec{G} výrazem na levé straně rovnice (II.19)

$$\vec{G} = \vec{E} \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \quad (\text{II.20})$$

můžeme rovnici (II.19) upravit do tvaru

$$\operatorname{div} \vec{G} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{grad} \vec{E} : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}. \quad (\text{II.21})$$

Označíme dále energii elektromagnetického pole ve vakuu w_{elmg}

$$\frac{\partial w_{elmg}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (\text{II.22})$$

a časovou změnu energie v prostředí

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial w_{elmg}}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{G}. \quad (\text{II.23})$$

S použitím (II.21) dostáváme pro časovou změnu energie výraz

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{grad} \vec{E} : \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}. \quad (\text{II.24})$$

V nelineární optice se ukazuje velmi výhodné zavedení volné energie F (viz [2], [15]) pomocí vztahu

$$F = U - \vec{H} \cdot \vec{M} - \vec{E} \cdot \vec{P} - \operatorname{grad} \vec{E} : \mathbf{Q}. \quad (\text{II.25})$$

Tato energie je svázána s prací, kterou vykonají generátory k vytvoření pole v prostředí. Její totální diferenciál je vzhledem k (II.24) udán výrazem

$$dF = -\vec{P} \cdot d\vec{E} - \vec{M} \cdot d\vec{H} - Q : d(\text{grad } \vec{E}). \quad (\text{II.26})$$

Zavedení volné energie je velmi užitečné při stanovení některých vlastností symetrie tenzorů susceptibility, jak uvidíme v dalším výkladu.

V našem pojednání se zaměříme na studium dipólových nelineárních efektů v nemagnetickém dielektriku. Pro tento případ lze Maxwellovy rovnice formálně zapsat v obvyklém tvaru. Poněvadž se však v těchto rovnicích objevují nelineární členy dipólové polarizace, ukazuje se užitečné oddělit lineární a nelineární část vektoru polarizace. Pro popis elektromagnetického pole v nemagnetickém dielektriku, ve kterém dochází pouze k dipólové nelineární polarizaci, máme tedy

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0 \quad (\text{II.27})$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0.$$

Dipólovou polarizaci rozdělíme na část lineární \vec{P}^L a část nelineární \vec{P}^{NL}

$$\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL}.$$

Diferenciál volné energie F obsahuje v tomto případě pouze člen, ve kterém se vyskytuje elektrická dipólová polarizace

$$dF = \vec{P} \cdot d\vec{E}. \quad (\text{II.28})$$

III. Vektor nelineární polarizace dielektrika v oblasti malých dispersí

Vektory \vec{P} , \vec{M} a tenzor Q v rovnicích (II.14) a (II.15) je nutno v obecném případě považovat za funkce elektrické a magnetické intenzity

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$$

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \quad (\text{III.1})$$

$$Q = Q(\text{grad } \vec{E}).$$

Omezíme se zde, jak již bylo řečeno, na nemagnetická dielektrika a zanedbáme kvadrupólové efekty, které jsou ve srovnání s dipólovými efekty podstatně nižšího řádu.

Funkci $\vec{P}(\vec{E})$ lze formálně rozepsat v mocninnou řadu podle mocnin vektoru elektrické intenzity \vec{E}

$$\vec{P}(\vec{E}) = \chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E} \vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots \quad (\text{III.2})$$

nebo

$$\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL(2)} + \vec{P}^{NL(3)} + \dots \quad (\text{III.3})$$

Veličiny $\chi^{(n)}$ představují zde tenzorové susceptibility a jejich význam je patrný, rozepíšeme-li úžené tenzorové součiny do složkového tvaru

$$\begin{aligned} P_i^L &= \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j \\ P_i^{NL(2)} &= \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \\ P_i^{NL(3)} &= \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \\ &\dots \end{aligned}$$

První člen \vec{P}^L v rovnici (III.3) představuje vektor lineární polarizace a v případě malých světelných intenzit je podstatně větší, nežli následující členy. Členy vyšších řádů uplatňují se pouze při průchodu velmi intenzivních světelných svazků prostředím. Podle toho, který z členů nelineární polarizace $\vec{P}^{NL(n)}$ bereme v úvahu, hovoříme pak o nelineárních dipólových efektech n -tého řádu.

Abychom si udělali představu o velikosti jednotlivých členů $\vec{P}^{NL(n)}$ ve výrazu (III.3), použijeme přibližného vzorce pro poměr dvou po sobě následujících členů $\vec{P}^{NL(n)}$ a $\vec{P}^{NL(n+1)}$, který na základě poloklasických úvah odvodil N. Blombergen [15]

$$\frac{|P^{NL(2)}|}{|P^L|} \approx \frac{|P^{NL(n+1)}|}{|P^{NL(n)}|} \approx \frac{|E|}{|E_{at}|} \quad (\text{III.4})$$

Zde E_{at} je intenzita elektrického pole uvnitř atomu. Amplitudu elektrického pole světelné vlny je tedy nutno srovnávat s intenzitou elektrického pole uvnitř atomu, jejíž hodnota je řádově rovna $3 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$. Okrajovým tokům energie 10^{14} W/m^2 , jichž lze dosáhnout fokusací laserového paprsku, odpovídá elektrická intenzita $E \approx 10^8 \text{ V/m}$. Odtud dostáváme přibližný poměr dvou po sobě následujících členů $P^{NL(n)}$ a $P^{NL(n+1)}$, jehož hodnota je asi $3 \cdot 10^{-3}$. Vidíme tedy, že členy vyšších řádů ve vzorcích (III.2) a (III.3) budou poměrně velmi malé.

Vektor elektrické dipólové polarizace \vec{P} , vyjádřený vztahem (III.3), je nutno považovat za časovou funkci a jednotlivé členy rozvoje můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{P}^L(t) = \int_0^{\infty} \chi^{(1)}(\tau) \cdot \vec{E}(t - \tau) d\tau$$

$$\vec{P}^{NL(2)}(t) = \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} \chi^{(2)}(\tau, \tau') : \vec{E}(t - \tau) \vec{E}(t - \tau - \tau') d\tau$$

(III.5)

.....

Použitím Fourierovy analýzy obdržíme z (III.5) harmonické složky těchto členů

$$\vec{P}^L(\omega_j) = \chi^{(1)}(\omega_j) \cdot \vec{E}(\omega_j)$$

$$\vec{P}^{NL(2)}(\omega_j) = \chi^{(2)}(\omega_j, \omega_p, \omega_r) : \vec{E}(\omega_p) \vec{E}(\omega_r)$$

(III.6)

.....

kde jsme označili

$$\chi^{(1)}(\omega_j) = \int_0^{\infty} \chi^{(1)}(\tau) e^{-i\omega_j \tau} d\tau$$

$$\chi^{(2)}(\omega_j, \omega_p, \omega_r) = \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} \chi^{(2)}(\tau, \tau') e^{-i\omega_p \tau' - i\omega_r \tau} d\tau$$

(III.7)

.....

Vektor dipólové polarizace \vec{P} lze nyní zapsat jako součet všech harmonických složek

$$\vec{P} = \sum_n \sum_j \vec{P}^{(n)}(\omega_j) e^{-i\omega_j t}$$

Při tom je nutno upozornit, že frekvence $\omega_j, \omega_p, \omega_r, \dots$ ve vztazích (III.6) a (III.7) jsou lineárně závislé a koeficienty lineárních kombinací jsou celá čísla. Například při průchodu elektromagnetické vlny o frekvenci ω nelineárním prostředím, ve kterém dochází ke generaci druhé harmonické frekvence 2ω , je nutno uvažovat harmonické složky polarizace

$$\vec{P}(\omega) = \chi^{(1)}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) + \chi^{(2)}(\omega = 2\omega - \omega) : \vec{E}(2\omega) \vec{E}^*(\omega)$$

$$\vec{P}(2\omega) = \chi^{(1)}(2\omega) \cdot \vec{E}(2\omega) + \chi^{(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega)$$

(III.8)

Člen $\vec{P}(\omega = \omega - \omega)$ a členy odpovídající vyšším harmonickým frekvencím jsou obvykle ve srovnání s $\vec{P}(\omega)$ a $\vec{P}(2\omega)$ značně malé.

Stanovení vlastností tenzorů nelineární susceptibilitě $\chi^{(n)}$ je v obecném případě značně obtížné vzhledem k nesnadnosti výpočtu střední volné energie $\langle \vec{F} \rangle$. V optice, jak lineární, tak nelineární, mají podstatný význam prostředí se slabou dispersí. Proto se v dalších úvahách omezíme pouze na prostředí slabě dispergující. Vzhledem k tomu, že v čistě monochromatickém poli nedochází k systematické výměně energie, budeme uvažovat kvazimonochromatickou vlnu

$$\vec{E}(t) = \int_{\omega_j - \delta}^{\omega_j + \delta} \vec{E}(\eta) e^{-i(\omega_j + \eta)t} d\eta, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (\text{III.9})$$

jejíž amplituda se mění velmi pomalu s časem.

Ke studiu symetrických vlastností nelineární susceptibilitě je velmi výhodné použít střední volné energie (viz [15])

$$d\bar{F} = \langle dF \rangle = - \text{Re} \langle \vec{P}(t) \cdot d\vec{E}(t) \rangle. \quad (\text{III.10})$$

Jako příklad ukážeme, jak lze z definice střední volné energie odvodit symetrické vlastnosti tenzoru lineární susceptibilitě $\chi^{(1)}$.

Ze vztahu (III.9) máme

$$\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} = -i\omega_j \vec{E}(t) - i \int_{\omega_j - \delta}^{\omega_j + \delta} \eta \vec{E}(\eta) e^{-i(\omega_j + \eta)t} d\eta \quad (\text{III.11})$$

Vektor lineární polarizace $\vec{P}^L(t)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{P}^L(t) = \int_{\omega_j - \delta}^{\omega_j + \delta} \chi^{(1)}(\omega_j + \eta) \cdot \vec{E}(\eta) e^{-i(\omega_j + \eta)t} d\eta. \quad (\text{III.12})$$

Tenzor $\chi^{(1)}(\omega_j + \eta)$ formálně rozvedeme v mocninou řadu

$$\chi^{(1)}(\omega_j + \eta) = \chi^{(1)}(\omega_j) + \left(\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \omega_j} \right)_{\omega_j} \eta + \dots,$$

kde se, vzhledem k malé dispersi, omezíme pouze na první dva členy rozvoje, takže pro vektor lineární polarizace dostáváme

$$\vec{P}^L(t) = \chi^{(1)}(\omega_j) \cdot \vec{E}(t) - \omega_j \left(\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \omega_j} \right)_{\omega_j} \cdot \vec{E}(t) + i \left(\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \omega_j} \right)_{\omega_j} \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}. \quad (\text{III.13})$$

Poslední člen při středování vymizí, takže po integraci obdržíme výraz pro střední volnou energii

$$\bar{F}^L = -2 \text{Re} \left\{ \sum_{\omega_j} \sum_{k,l} \left[E_1^*(\omega_j) \chi_{kl}^{(1)}(\omega_j) E_k(\omega_j) - \omega_j E_1^*(\omega_j) \left(\frac{\partial \chi_{kl}^{(1)}(\omega_j)}{\partial \omega_j} \right) E_k(\omega_j) \right] \right\}. \quad (\text{III.14})$$

Tensor lineární susceptibilitý $\chi^{(1)}$ považujeme za reálný a platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{F}^L}{\partial E_k^* \partial E_1} &= \frac{\partial^2 \bar{F}^L}{\partial E_k \partial E_1^*} = 2 \left[\chi_{kl}^{(1)}(\omega_j) - \omega_j \left(\frac{\partial \chi_{kl}^{(1)}}{\partial \omega_j} \right)_{\omega_j} \right] = \\ &= 2 \left[\chi_{lk}^{(1)}(\omega_j) - \omega_j \left(\frac{\partial \chi_{lk}^{(1)}}{\partial \omega_j} \right)_{\omega_j} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Odtud bezprostředně vyplývá známá relace symetrie pro tenzor lineární susceptibilitý

$$\chi_{kl}^{(1)}(\omega_j) = \chi_{lk}^{(1)}(\omega_j). \quad (\text{III.16})$$

Výsledek, ke kterému jsme zde dospěli, je stejný, jako kdybychom uvažovali prostředí bez disperze, pro které je střední volná energie, odpovídající lineární polarizaci dielektrika, dána vztahem

$$\bar{F}^L = -2 \operatorname{Re} \sum_{\omega_j} \sum_{l,k} \chi_{lk}^{(1)}(\omega_j) E_k(\omega_j) E_l^*(\omega_j). \quad (\text{III.17})$$

Tento výsledek lze zobecnit v oblastech malé disperze na libovolný stupeň nelineární polarizace, takže střední volnou energii, která odpovídá dipólové polarizaci, je možno zapsat ve tvaru

$$\bar{F}_{dip} = \bar{F}^{L(1)} + \bar{F}^{NL(2)} + \bar{F}^{NL(3)} + \dots, \quad (\text{III.18})$$

kde

$$\bar{F}^{L(1)} = -2 \operatorname{Re} \int_0 \sum_j \vec{dE}(\omega_j) \cdot \chi^{(1)}(\omega_j) \cdot \vec{E}(\omega_j) \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} \bar{F}^{NL(2)} &= -2 \operatorname{Re} \left[\int_0 \sum_{jmn} \vec{dE}^*(\omega_j) \cdot \chi^{(2)}(\omega_j = \omega_m + \omega_n) : \vec{E}(\omega_m) \vec{E}(\omega_n) + \right. \\ &+ \left. \int_0 \sum_{jmn} \vec{dE}^*(\omega_j) \chi^{(2)}(\omega_j = \omega_m - \omega_n) \vec{E}(\omega_m) \vec{E}^*(\omega_n) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Ukážeme nyní, jak je možno z fenomenologické teorie na základě definice střední volné energie odvodit vlastnosti symetrie tenzoru nelineární susceptibilitý $\chi^{(2)}$. Pro tento účel budeme uvažovat působení tří vln o frekvencích $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, při čemž platí

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (\text{III.21})$$

Střední volná energie vzájemného působení je udána výrazem

$$\begin{aligned} d\bar{F}^{NL(2)} = & -2 \operatorname{Re} [d\vec{E}^*(\omega_1) \cdot \vec{P}^{NL}(\omega_1) + d\vec{E}^*(\omega_2) \cdot \vec{P}^{NL}(\omega_2) + \\ & + d\vec{E}^*(\omega_3) \cdot \vec{P}^{NL}(\omega_3)] \end{aligned} \quad (\text{III.22a})$$

a tedy vzhledem k (III.20)

$$\begin{aligned} \bar{F}^{NL(2)} = & -2 \operatorname{Re} \sum_{klm} E_k^*(\omega_1) \chi_{klm}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) E_l^*(\omega_2) E_m(\omega_3) = \\ = & -2 \operatorname{Re} \sum_{lkm} E_l^*(\omega_2) \chi_{lkm}(\omega_2 = -\omega_1 + \omega_3) E_k^*(\omega_1) E_m(\omega_3) = \\ = & -2 \operatorname{Re} \sum_{mkl} E_m^*(\omega_3) \chi_{mkl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) E_k(\omega_1) E_l(\omega_2). \end{aligned} \quad (\text{III.22b})$$

Ze vztahů (III.22) vyplývá:

$$\begin{aligned} P_m^{NL}(\omega_3) = & -\frac{\partial \bar{F}^{NL(2)}}{\partial E_m^*(\omega_3)} = \sum_{k,l} \chi_{mkl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) E_k(\omega_1) E_l(\omega_2) \\ P_k^{NL}(\omega_1) = & -\left(\frac{\partial \bar{F}^{NL(2)}}{\partial E_k(\omega_1)}\right)^* = \sum_{m,l} \chi_{mkl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) E_m(\omega_3) E_l^*(\omega_2). \\ & \dots \end{aligned}$$

Odtud vyplývají následující relace symetrie pro tenzor nelineární susceptibilitity

$$\begin{aligned} \chi_{klm}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) = & \chi_{lkm}(\omega_2 = -\omega_1 + \omega_3) = \\ = & \chi_{mkl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

a dále

$$\chi_{klm}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kml}(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1). \quad (\text{III.24})$$

Uvedené představovací relace byly poprvé odvozeny D. A. Kleimanem [5] a obecnější formulace byla později odvozena Pershanem, Blombergenem, Ducuingem a Armstrongem [6].

Vidíme tedy, že jsou-li susceptibilitity reálné, lze představovat indexy u složek tenzoru nelineární susceptibilitity $\chi^{NL(2)}$ při odpovídajícím přestavení frekvencí. Je-li disperse v celém frekvenčním rozsahu zanedbatelná, můžeme indexy představovat libovolným způsobem.

Na základě obecných vlastností symetrie můžeme rozhodnout, které třídy krystalů mají složky tenzoru susceptibilitity druhého stupně různé od nuly. Ze všech 32 krystalických tříd jsou susceptibilitity druhého stupně různé od nuly pouze u 20 tříd. V následující tabulce, sestavené podle [13], uvádíme nenulové složky $\chi^{NL(2)}$ pro jednotlivé krystalické třídy. Některé číselné hodnoty susceptibilitity druhého stupně může čtenář nalézt v [15].

Podobným způsobem, jako v případě tenzoru lineární susceptibilitity $\chi^{L(1)}$ a tenzoru kvadratické susceptibilitity $\chi^{NL(2)}$, je možno za pomoci definice střední volné energie \bar{F} studovat vlastnosti symetrie tenzorů susceptibilitity vyšších řádů (viz [6], [15]).

Tabulka 1

	Soustava, třída	Prvky symetrie (osy symetrie označeny Z_1, Z_2, Z_3)	Složky tenzoru suscepti- bility druhého stupně vzhledem k soustavě $Z_1,$ Z_2, Z_3
	Typické krystaly		
Dvojosé krystaly	1 Soustava triklinická, třída C_1 KJO ₃	bez symetrických prvků	χ_{klm} má všechny složky různé od nuly
	2 Soustava monoklinická, třída C_2 (CH ₂ NH ₂ CO ₂ H) ₃ ·H ₂ SO ₄	osa symetrie z_3 druhého řádu	$\chi_{311}, \chi_{322}, \chi_{333}$ $\chi_{113}, \chi_{223}, \chi_{123}$ χ_{213}, χ_{312}
	3 Soustava monoklinická, třída C_s LiH ₃ (S ₆ O ₃) ₂	rovina symetrie z_1, z_2	různé od nuly jsou ty složky tenzoru χ_{klm} , které neobsahují index 3 anebo jej obsahují dvakrát
	4 Soustava rhombická třída D_2 krystaly Segnetovy soli	tři vzájemně kolmé osy symetrie druhého řádu	$\chi_{123}, \chi_{312}, \chi_{231}$
	5 Soustava rhombická třída C_{2v} N ₂ NO ₂	osa symetrie z_3 druhého řádu, dvě roviny symetrie, obsahující osu z_3 (jednou z těchto rovin je rovina z_1, z_2)	$\chi_{311}, \chi_{322}, \chi_{333}$ χ_{113}, χ_{223}
Jednoosé krystaly	6 Soustava tetragonální, třída S_4 C(CH ₂ OH) ₄	otočením kolem osy z_3 o 90° stává se krystal zrcadlově symetrickým podle roviny z_1, z_2 vzhledem k původní poloze	$\chi_{312}, \chi_{123} = \chi_{213}$ $\chi_{311} = -\chi_{322}$ $\chi_{131} = -\chi_{232}$
	7 Soustava tetragonální, třída C_4	osa symetrie z_3 čtvrtého řádu	$\chi_{311} = \chi_{322}$ $\chi_{333}, \chi_{113} = \chi_{223}$ $\chi_{123} = -\chi_{213}$

Jednoosé krystaly	8	Soustava tetragonální, třída D_{2d} $KH_2A_3O_4$, $R_3H_2PO_4$, $NH_4H_2AsO_4$ a umělé krystaly KDP a ADP	tři vzájemně kolmé osy symetrie druhého řádu z_1 , z_2 , z_3 a dvě roviny symetrie obsahující osu z_3	$\chi_{123} = \chi_{213}$ χ_{321}
	9	Soustava tetragonální, třída D_4	osa symetrie z_3 čtvrtého řádu a čtyři osy symetrie druhého řádu, ležící v rovině z_1, z_2	$\chi_{123} = -\chi_{213}$
	10	Soustava tetragonální, třída C_4 B_aTiO_3	osa symetrie z_3 čtvrtého řádu, čtyři roviny symetrie obsahující osu z_3 (jednou z nich je rovina z_1, z_2)	$\chi_{311} = \chi_{322}$ $\chi_{333}, \chi_{113} = \chi_{223}$
	11	Soustava trigonální, třída C_3	osa symetrie z_3 třetího řádu	$\chi_{333}, \chi_{113} = \chi_{223}$ $\chi_{111} = -\chi_{122} = -\chi_{212}$ $\chi_{311} = \chi_{322}$ $\chi_{123} = -\chi_{213}$ $\chi_{211} = -\chi_{222} = \chi_{112}$
	12	Soustava trigonální, třída D_3 krystal křemene α -modifikace	osa symetrie z_3 třetího řádu a tři osy symetrie druhého řádu v rovině z_1, z_2 , z nichž jednou je osa z_1	$\chi_{111} = -\chi_{122} = -\chi_{212}$ $\chi_{123} = -\chi_{213}$
	13	Soustava trigonální, třída C_{3v} turmalin, GASH	osa symetrie z_3 třetího řádu tři roviny symetrie, obsahující osu z_3 (jednou z nich je rovina z_1, z_2)	$\chi_{333}, \chi_{113} = \chi_{223}$ $\chi_{111} = -\chi_{122} = -\chi_{212}$ $\chi_{311} = \chi_{322}$
	14	Soustava hexagonální, třída C_{3h}	osa symetrie z_3 třetího řádu a rovina symetrie z_1, z_2	$\chi_{212} = -\chi_{111} = \chi_{122}$ $\chi_{112} = \chi_{211} = -\chi_{222}$
	15	Soustava hexagonální, třída D_{3h}	osa symetrie z_3 třetího řádu tři osy symetrie druhého řádu, z nichž jednou je osa z_1 a rovina symetrie z_1, z_2	$\chi_{212} = -\chi_{111} = \chi_{122}$

Jednoosé krystaly	16	Soustava hexagonální, třída C_6	osa symetrie z_3 šestého řádu	$\chi_{333}, \chi_{113} = \chi_{223}$ $\chi_{311} = \chi_{313}$ $\chi_{123} = -\chi_{213}$
	17	Soustava hexagonální, třída D_6 krystal křemene β -modifikace	osa symetrie z_3 šestého řádu a šest os symetrie druhého řádu v rovině z_1, z_2	$\chi_{123} = -\chi_{213}$
	18	Soustava hexagonální, třída C_{6v} ZnO, CdS, CdSe	osa symetrie z_3 šestého řádu šest rovin symetrie, obsahující osu z_3 (jednou z nich je rovina z_1, z_2)	$\chi_{333}, \chi_{113} = \chi_{223}$ $\chi_{311} = \chi_{322}$
Izotropní krystaly	19	Soustava kubická, třída T NaClO ₃ , NaBrO ₃	tři vzájemně kolmé osy symetrie druhého řádu a čtyři diagonální osy třetího řádu	$\chi_{123} = \chi_{312} = \chi_{231}$
	20	Soustava kubická, třída Td ZnS, CuCl, CdS, ZnO, ZnSe, GaAs, hexamethylentetramin	prvky symetrie třídy T a šest rovin symetrie, z nichž každá obsahuje dvě ze čtyř os symetrie třetího řádu	$\chi_{123} = \chi_{312} = \chi_{231}$

IV. Generace harmonických frekvencí v nelineárním prostředí

1. Vlnová rovnice v nelineárním prostředí

Řešení Maxwellových rovnic (II.27) v oblasti nelineárního prostředí vede k soustavě nehomogenních diferenciálních rovnic, jejichž řešení v obecném případě nelze stanovit. V této práci se omezíme pouze na oblast malých nelinearit, kde členy lineární polarizace podstatně převyšují ostatní členy rozvoje (III.2). Velmi podrobnou diskusi těchto otázek může čtenář nalézt v [13].

V oblasti malé disperse lze pro účely fenomenologického popisu generace vyšších harmonických frekvencí zaměnit kvazimonochromatické vlnové funkce funkcemi monochromatických elektromagnetických vln, které se periodicky mění s časem.

Uvažujeme-li prostředí, ve kterém dochází pouze k dipólové polarizaci, obdržíme řešením (II.27) soustavu nehomogenních diferenciálních rovnic

$$\text{grad div } \vec{E}(\omega_j) - \Delta \vec{E}(\omega_j) - \omega_j^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}(\omega_j) = \omega_j^2 \mu_0 \vec{P}(\omega_j), \quad (\text{IV.1})$$

při čemž pro vektor polarizace $\vec{P}(\omega_j)$ platí

$$\vec{P}(\omega_j) = \chi^{L(1)}(\omega_j) \cdot \vec{E}(\omega_j) + \sum_{\omega_k, \omega_l} \chi^{NL(2)}(\omega_j = \omega_k + \omega_l) : \vec{E}(\omega_k) \vec{E}(\omega_l) + \dots$$

$$+ \sum_{\omega_k, \omega_l} \chi^{NL(2)}(\omega_j = \omega_k - \omega_l) : \vec{E}(\omega_k) \vec{E}^*(\omega_l) + \dots \quad (\text{IV.2})$$

Vektory elektrické intenzity $\vec{E}(\omega_j)$ chápeme zde jako periodické časové funkce, jejichž amplitudy se mění pomalu s časem a platí pro ně

$$\vec{E}(\omega, t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \vec{A}(t) e^{-i\omega t} dt = \vec{E}^*(-\omega, t). \quad (\text{IV.3})$$

Integrační interval T volíme tak, aby platilo $\omega T \gg 1$ a funkce $\vec{E}(\omega, t)$ nezávisela na T (viz [15]).

Označíme

$$\epsilon(\omega_j) = \epsilon_0 + \chi^{L(1)}(\omega_j) \quad (\text{IV.4})$$

tenzor lineární permitivity. Soustavu nehomogenních diferenciálních rovnic (IV.1) můžeme potom psát ve tvaru

$$\text{grad div } \vec{E}(\omega_j) - \Delta \vec{E}(\omega_j) - \omega_j^2 \mu_0 \epsilon(\omega_j) \cdot \vec{E}(\omega_j) = \omega_j^2 \mu_0 \vec{P}^{NL}(\omega_j). \quad (\text{IV.5})$$

Řešení těchto rovnic nelze v obecném případě provést. Ke každému řešení těchto rovnic je totiž nutno brát v úvahu určité okrajové podmínky, kterými je obvykle stav na rozhraní mezi nelineárním a lineárním prostředím. Rovnice (IV.5) představují vlastně soustavu vzájemně svázaných vlnových rovnic, kde koeficienty vazby jsou tenzory nelineární susceptibilitě $\chi^{(n)}$. Šíří-li se v nelineárním prostředí vlny s frekvencemi $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \dots$ s vlnovými vektory $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \dots$ a s kmito-směrovými vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$, budí tyto vlny nelineární dipólovou polarizaci $\vec{P}^{NL(n)}(\omega_s)$ s frekvencí ω_s a vlnovým vektorem \vec{k}_s , kteréžto veličiny jsou lineárními kombinacemi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ a $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \dots$, tj.

$$\omega_s = \sum_i \lambda_i^{(s)} \omega_i \quad (\text{IV.6})$$

$$\vec{k}_s = \sum_i \lambda_i^{(s)} \vec{k}_i. \quad (\text{IV.7})$$

a $\lambda_i^{(s)}$ jsou celočíselné kombinační koeficienty.

Vektor nelineární polarizace $\vec{P}^{NL(n)}(\omega_s)$ můžeme pak zapsat ve tvaru

$$\vec{P}^{NL(n)}(\omega_s, \vec{r}, t) = \vec{P}_0^{NL(n)}(\omega_s) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_s t)}, \quad (\text{IV.8})$$

kde

$$\vec{P}_0^{NL(n)}(\omega_s) = \chi^{NL(n)}(\omega_s) = \sum_i \lambda_i^{(s)} \omega_i \prod_i (\mathbf{e}_i A_i)^{|\lambda_i^{(s)}|} \quad (\text{IV.9})$$

a

$$n = \sum_i |\lambda_i^{(s)}|.$$

Pro záporné indexy $\lambda_i^{(s)}$ je nutno zaměnit amplitudu A_i výrazem komplexně sdruženým.

Při řešení rovnic (IV.5) byla by situace ještě o to složitější, že každá kombinační frekvence se sama zúčastňuje při vzniku dalších kombinačních frekvencí.

Praktický význam mají ovšem pouze případy s malým počtem frekvencí, například při řešení úlohy generace druhé harmonické frekvence bereme v úvahu pouze dvě frekvence ω a 2ω .

Obecné řešení rovnic (IV.5) obsahuje vždy řešení homogenní vlnové rovnice, kterou obdržíme, položíme-li pravou stranu (IV.5) rovnu nule a partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice, které je vlastně lineární kombinací všech rovinných vln, jež se mohou šířit v lineárním prostředí a lineární kombinací jejich frekvencí je frekvence ω_s .

Okrajové podmínky pro řešení rovnic (IV.5) určujeme následovně. Souřadnou soustavu bez újmy na obecnosti orientujeme tak, že její souřadnicová osa z splývá s rovinou rozhraní mezi lineárním a nelineárním prostředím a počátek souřadné soustavy volíme v rovině rozhraní. Vzhledem k platnosti zákona o zachování impulzů musejí být tangenciální složky vlnových vektorů v rovině rozhraní spojité a pro vlnový vektor \mathbf{k}_s , který odpovídá kombinační relaci $\vec{\mathbf{k}}_s = \sum_i \lambda_i^{(s)} \vec{\mathbf{k}}_i$ platí tedy

$$k_{s,x} = \sum_i \lambda_i^{(s)} k_{i,x}, \quad k_{s,y} = \sum_i \lambda_i^{(s)} k_{i,y} \quad (\text{IV.10})$$

Směr šíření vlny nelineární polarizace určuje pak složka vlnového vektoru $k_{s,z}$, pro kterou však relace (IV.10) neplatí.

2. Generace druhé harmonické frekvence na rozhraní lineárního a nelineárního prostředí

Většina dielektrik, která vykazují nelineární vlastnosti, jsou anizotropní krystaly. Nelze se tedy při řešení rovnic (IV.5) omezit na izotropní prostředí a je nutno řešit tyto rovnice pro prostředí anizotropní. Některé vlastnosti procesu generace vyšších harmonických frekvencí mohou však být objasněny i při zkoumání izotropních prostředí. Poněvadž složitost matematických výrazů byla by na újmu přehlednosti výkladu, omezíme se v tomto odstavci na případ izotropních prostředí.

Bez újmy na obecnosti volíme souřadnou soustavu tak, že dopadající paprsek leží v rovině x, z , takže tangenciální složka $k_{s,y}$ je rovna nule.

Diferenciální rovnice, popisující generaci druhé harmonické frekvence, obdržíme z (IV.5)

$$\text{grad div } \vec{E}(\omega) - \Delta \vec{E}(\omega) - \omega^2 \mu_0 \epsilon(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) = \omega^2 \mu_0 \vec{P}^{NL}(\omega) \quad (\text{IV.11})$$

$$\text{grad div } \vec{E}(2\omega) - \Delta \vec{E}(2\omega) - 4\omega^2 \mu_0 \epsilon(2\omega) \cdot \vec{E}(2\omega) = 4\omega^2 \mu_0 \vec{P}^{NL}(2\omega), \quad (\text{IV.12})$$

kde vektory nelineární dipólové polarizace $\vec{P}^{NL}(\omega)$ a $\vec{P}^{NL}(2\omega)$ jsou dány výrazy

$$\vec{P}^{NL}(\omega) = \chi^{NL(2)}(\omega = 2\omega - \omega) : \vec{E}(2\omega) \vec{E}^*(\omega) \quad (\text{IV.11a})$$

$$\vec{P}^{NL}(2\omega) = \chi^{NL(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (\text{IV.12a})$$

V počátečním stadiu procesu generace je amplituda druhé harmonické frekvence velmi malá, takže můžeme prakticky amplitudu základní generující frekvence považovat v rovině rozhraní za zadanou. Pravá strana rovnice (IV.11) je ve srovnání se členy na levé straně velmi malá, takže postačí řešit homogenní rovnici, která v izotropním prostředí nabude tvaru

$$-\Delta \vec{E}(\omega) - \omega^2 \mu_0 \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) = 0. \quad (\text{IV.13})$$

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru neomezené rovinné vlny

$$\vec{E}(\omega) = \vec{A}_0(\omega) e^{i[\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} - \omega t]}, \quad (\text{IV.14})$$

kde jsme označili \vec{A}_0 amplitudu dopadající vlny v rovině rozhraní $z = 0$.

Pro absolutní hodnotu vlnového vektoru $\vec{k}(\omega)$ platí

$$|k(\omega)| = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} n(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega), \quad (\text{IV.15})$$

kde $n(\omega)$ je označen index lomu vlny základní frekvence.

Energetické přeměny v rovině rozhraní jsou vzhledem k absolutní velikosti $\chi^{NL(2)}$ velmi malé, takže můžeme s velkou přesností brát odrazivost a propustnost vlny základní generující frekvence stejnou, jako by prostředí pro tuto frekvenci bylo lineárním. Pole generující frekvence ω považujeme tedy za všestranně zadané a k popisu procesu generace druhé harmonické frekvence v rovině rozhraní postačí řešit rovnici (IV.12).

Řešení homogenní vlnové rovnice

$$-\Delta \vec{E}(2\omega) - 4\omega^2 \mu_0 \epsilon(2\omega) \vec{E}(2\omega) = 0 \quad (\text{IV.16})$$

bereme opět ve tvaru rovinné vlny

$$\vec{E}_h(2\omega) = \vec{A}_0(2\omega) e^{i[\vec{k}(2\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]}, \quad (\text{IV.17})$$

kde absolutní hodnota vlnového vektoru $\vec{k}(2\omega)$ je udána výrazem

$$|k(2\omega)| = 2\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(2\omega)} = \frac{2\omega}{c} n(2\omega). \quad (\text{IV.18})$$

Pro tangenciální složky vlnových vektorů $\vec{k}(\omega)$ a $\vec{k}(2\omega)$ platí vzhledem k (IV.10)

$$2 k_x(\omega) = k_x(2\omega) \quad (\text{IV.19})$$

a za předpokladu, že vlnový vektor dopadající vlny leží v rovině z, x

$$k_y(\omega) = k_y(2\omega) = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Protože budící elektromagnetickou vlnu o frekvenci ω považujeme za zadanou, můžeme vypočítat z (IV.12a) vektor nelineární polarizace $\vec{P}^{NL}(2\omega)$

$$\vec{P}^{NL}(2\omega) = \vec{P}_0^{NL}(2\omega) e^{i[2\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]}, \quad (\text{IV.21})$$

kde jsme označili

$$\vec{P}_0^{NL}(2\omega) = A_0^2(\omega) \chi^{NL(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{\epsilon}(\omega) \vec{\epsilon}(\omega). \quad (\text{IV.21})$$

Partikulární řešení rovnice (IV.12) hledáme opět ve tvaru rovinné elektromagnetické vlny, takže vychází

$$\vec{E}_p(2\omega) = \frac{4\omega^2 \mu_0 P_0^{NL}(2\omega)}{4|k(\omega)|^2 - |k(2\omega)|^2} \left[\vec{p} - 4 \frac{\vec{k}(\omega)(\vec{k}(\omega) \cdot \vec{p})}{|k(2\omega)|^2} \right] e^{i[2\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]} \quad (\text{IV.22})$$

Zde jsme označili \vec{p} jednotkový vektor ve směru nelineární polarizace $\vec{P}^{NL}(2\omega)$.

Celkové řešení rovnice (IV.12) obsahuje řešení homogenní rovnice $\vec{E}_h(2\omega)$ a partikulární řešení $\vec{E}_p(2\omega)$

$$\vec{E}(2\omega) = \left\{ \vec{A}_0(2\omega) e^{i\vec{k}(2\omega) \cdot \vec{r}} + \frac{4\omega^2 \mu_0 P_0^{NL}(2\omega)}{4|k(\omega)|^2 - |k(2\omega)|^2} \left[\vec{p} - 4 \frac{\vec{k}(\omega)(\vec{k}(\omega) \cdot \vec{p})}{|k(2\omega)|^2} \right] e^{i2\vec{k}(\omega) \cdot \vec{r}} \right\} e^{-2i\omega t}. \quad (\text{IV.23})$$

První člen na pravé straně výrazu (IV.23) představuje šíření „vlastní“ vlny o frekvenci 2ω , která se šíří stejně jako v lineárním prostředí, druhý člen představuje „vynucenou“ vlnu druhé harmonické frekvence. Fáze obou vln jsou obecně různé v důsledku disperse prostředí a i směry šíření se obecně liší.

„Odražená“ vlna druhé harmonické frekvence postrádá druhý člen ve výrazu (IV.23) vzhledem k tomu, že první prostředí je prostředím lineárním, a tudíž v něm nedochází k nelineární polarizaci. Označíme-li vlnový vektor „odražené“ vlny druhé harmonické frekvence $\vec{k}''(2\omega)$, při čemž platí

$$|k''(2\omega)| = 2\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(2\omega)} = \frac{2\omega}{c} n(2\omega), \quad (\text{IV.24})$$

můžeme pro tuto vlnu psát

$$\vec{E}^R(2\omega) = \vec{A}^R(2\omega) e^{i[\vec{k}''(2\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]}. \quad (\text{IV.25})$$

Dále označíme vlnový vektor „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence $\vec{k}'(2\omega)$

$$|\vec{k}'(2\omega)| = 2\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'(2\omega)} = \frac{2\omega}{c} n'(2\omega) \quad (\text{IV.26})$$

a vlnový vektor propuštěné vlny základní frekvence $\vec{k}'(\omega)$

$$|\vec{k}'(\omega)| = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'(\omega)} = \frac{\omega}{c} n'(\omega). \quad (\text{IV.27})$$

„Propuštěnou“ vlnu druhé harmonické frekvence v rovině rozhraní můžeme pak zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \vec{E}^T(2\omega) = & \vec{A}_0^T(2\omega) e^{i[\vec{k}'(2\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]} + \\ & + \frac{4\omega^2 \mu_0 P_0^{NL}(2\omega)}{4|\vec{k}'(\omega)|^2 - |\vec{k}'(2\omega)|^2} \left[\vec{p} - \frac{4\vec{k}'(\omega)(\vec{k}'(\omega) \cdot \vec{p})}{|\vec{k}'(2\omega)|^2} \right] e^{i[2\vec{k}'(\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]}. \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

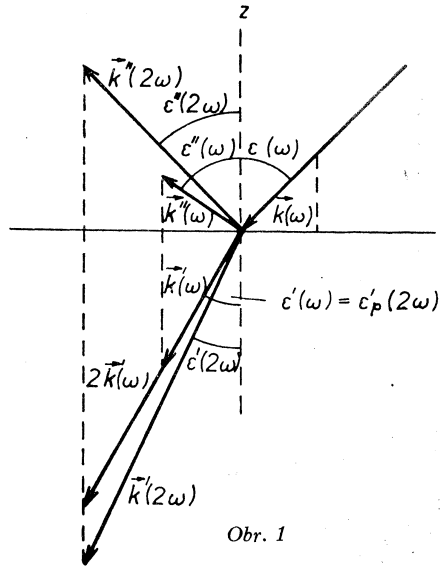
Situace na rozhraní je tedy následující:

Dopadající vlna základní frekvence ω se na rozhraní částečně odrazí a částečně je propuštěna. Nepatrná část energie propuštěné vlny základní frekvence budí v nelineárním prostředí nelineární dipólovou polarizaci a v důsledku toho vzniká odražená a propuštěná vlna o frekvenci 2ω , při čemž propuštěná vlna se rozpadá na část vlastní s vlnovým vektorem $\vec{k}'(2\omega)$ a část vynucenou s vlnovým vektorem $2\vec{k}'(\omega)$ (viz obr. 1.)

Označíme úhly dopadu, odrazu a lomu základní frekvence ω $\varepsilon(\omega)$, $\varepsilon''(\omega)$, $\varepsilon'(\omega)$ a úhly „odrazu“ a „lomu“ druhé harmonické frekvence 2ω $\varepsilon''(2\omega)$, $\varepsilon'(2\omega)$, $\varepsilon'_p(2\omega)$ (viz obr. 1.).*

Pro druhou harmonickou frekvenci můžeme z podmínky zachování tangenciálních složek vlnových vektorů (IV.19) odvodit jakési zákony „odrazu“ a „lomu“. Ze vztahů (IV.19) a (IV.24) dostáváme pro „odraženou“ vlnu druhé harmonické frekvence

$$n(2\omega) \sin \varepsilon''(2\omega) = n(\omega) \sin \varepsilon(\omega), \quad (\text{IV.29})$$



Obr. 1

*) Úhly dopadu, odrazu a lomu jsou zde označovány písmenem ε z důvodů konvence, zavedené v české literatuře. Rovněž tak z důvodů konvence je písmenem ε označována permitivita.

z (IV.19) a (IV.27) pro „lomenou“ vlastní vlnu druhé harmonické frekvence šířící se ve směru $\vec{k}'(2\omega)$

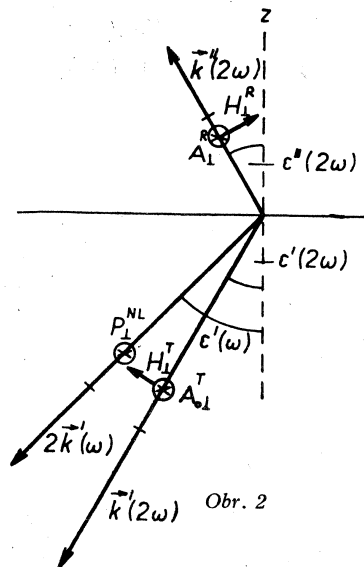
$$n'(2\omega) \sin \varepsilon'(2\omega) = n(\omega) \sin \varepsilon(\omega) \quad (\text{IV.30})$$

a z (IV.19) a (IV.26) pro „lomenou“ vynucenou vlnu druhé harmonické frekvence, šířící se ve směru $2\vec{k}'(\omega)$

$$n'(\omega) \sin \varepsilon'_p(2\omega) = n(\omega) \sin \varepsilon(\omega) . \quad (\text{IV.31})$$

Jak z výrazu (IV.31), tak z obr. 1. vidíme, že vynucená vlna druhé harmonické frekvence šíří se stejným směrem, jako vlna základní frekvence.

Nyní nás bude zajímat, jaká část energie vlny základní frekvence ω se přemění v energii vlny druhé harmonické frekvence 2ω . Jedná se tedy o to, vypočítat amplitudy „odražené“ a „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence na rozhraní mezi lineárním a nelineárním prostředím.



Obr. 2

Pro složky $E_{\perp}^R(2\omega)$, $E_{\perp}^T(2\omega)$, $P_{\perp}^{NL}(2\omega)$ (viz obr. 2.) v rovině rozhraní $z = 0$ dostáváme pomocí (IV.23) a (IV.19) podmínku spojitosti pro amplitudy elektrického vektoru druhé harmonické frekvence

$$A_{0\perp}^T(2\omega) + \frac{4\omega^2 \mu_0 P_{0\perp}^{NL}(2\omega)}{4|k'(\omega)|^2 - |k'(2\omega)|^2} = A_{\perp}^R(2\omega) \quad (\text{IV.32})$$

a podmínku spojitosti pro amplitudy magnetického vektoru

$$\begin{aligned} & -n(2\omega) A_{\perp}^R(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega) = \\ & = n'(2\omega) A_{0\perp}^T(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega) + \frac{4\omega^2 \mu_0 n'(\omega) P_{0\perp}^{NL}(2\omega) \cos \varepsilon'(\omega)}{4|k'(\omega)|^2 - |k'(2\omega)|^2} . \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Odtud lze vypočítat amplitudu „odražené“ vlny druhé harmonické frekvence

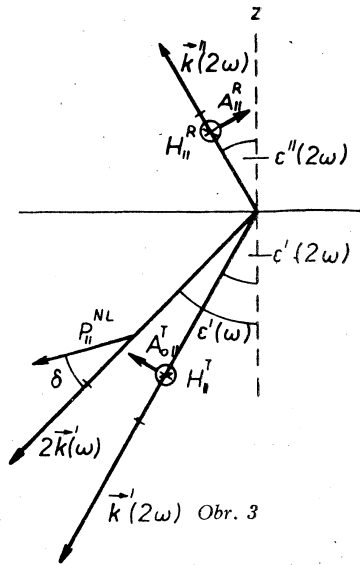
$$A_{\perp}^R(2\omega) = -\frac{P_{0\perp}^{NL}(2\omega)}{\varepsilon_0[n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} \frac{[n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega) - n'(\omega) \cos \varepsilon'(\omega)]}{[n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega) + n(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega)]} \quad (\text{IV.34})$$

a amplitudu vlastní části „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence

$$A_{0\perp}^T(2\omega) = -\frac{P_{0\perp}^{NL}(2\omega)}{\varepsilon_0[n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} \frac{[n'(\omega) \cos \varepsilon'(\omega) + n(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega)]}{[n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega) + n(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega)]}. \quad (\text{IV.35})$$

ε_0 je zde označena permitivita vakua.

Podobným způsobem lze vypočítat amplitudy „odražené“ a „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence v rovině dopadu x, z . Vzhledem k tenzorové závislosti vektorů $\vec{P}^{NL}(2\omega)$ a $\vec{E}(\omega)$ nelze předpokládat, že by vektor $\vec{P}^{NL}(2\omega)$ byl kolmý k vlnovému vektoru $\vec{k}'(\omega)$.



Nechť vektor $\vec{P}^{NL}(2\omega)$ svírá s vektorem $\vec{k}'(\omega)$ úhel δ . Podmínky spojitosti nabudou potom tvaru:

pro elektrický vektor

$$-A_{||}^R(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega) = A_{||}^T(2\omega) \cos \varepsilon'(\omega) + \quad (\text{IV.36})$$

$$+ \frac{4\omega^2 \mu_0 P_{0||}^{NL}(2\omega) \cos \varepsilon'(\omega) \sin \delta}{4|k'(\omega)|^2 - |k'(2\omega)|^2} - \frac{4\omega^2 \mu_0 P_{0||}^{NL}(2\omega) \sin \varepsilon'(\omega) \cos \delta}{|k'(2\omega)|^2}$$

a pro magnetický vektor

$$n(2\omega) A_{\parallel}^R(2\omega) = n'(2\omega) A_{0\parallel}^T(2\omega) + \quad (IV.37)$$

$$+ \frac{4\omega^2 \mu_0 n'(\omega) P_{0\parallel}^{NL}(2\omega) \sin \delta}{4|k'(\omega)|^2 - |k'(2\omega)|^2}.$$

Odtud vypočítáme složky amplitudy v rovině dopadu „odražené“ a vlastní části „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence (IV.38)

$$A_{\parallel}^R(2\omega) = \frac{P_{0\parallel}^{NL}(2\omega) \sin \varepsilon'(\omega) \sin^2 \varepsilon'(2\omega) \sin [\varepsilon'(\omega) + \varepsilon'(2\omega) + \delta]}{\varepsilon_0 n(2\omega) \sin \varepsilon''(2\omega) \sin [\varepsilon'(2\omega) + \varepsilon'(\omega)] \sin [\varepsilon'(2\omega) + \varepsilon''(2\omega)] \times \cos [\varepsilon'(2\omega) - \varepsilon''(2\omega)]}$$

$$A_{0\parallel}^T(2\omega) = - \frac{P_{0\parallel}^{NL}(2\omega)}{\varepsilon_0 [n(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega) + n'(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega)]} \times \quad (IV.39)$$

$$\times \left\{ - \frac{n(2\omega) n'^2(2\omega) \sin [\varepsilon'(\omega) + \delta]}{n'^2(2\omega) [n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{n'(\omega) [n'^2(2\omega) \cos \varepsilon''(2\omega) \sin \delta - n^2(2\omega) \sin \varepsilon''(2\omega) \cos \delta]}{n'^2(2\omega) [n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} \right\}.$$

Poněvadž první prostředí považujeme za lineární, je zřejmé, že „odražená“ vlna druhé harmonické frekvence se bude šířit v lineárním prostředí beze změny amplitudy ve směru vlnového vektoru $\vec{k}''(2\omega)$. Vzhledem k tomu, že v lineárním prostředí nedochází k vzájemnému působení základní frekvence a druhé harmonické frekvence, můžeme amplitudu, udanou složkami $A_{\perp}^R(2\omega)$, $A_{\parallel}^R(2\omega)$, považovat za amplitudu vlny druhé harmonické frekvence, kterou zjistíme při pozorování odraženého světla, jež se odráží na nelineárním prostředí. První pozorování druhé harmonické frekvence v odraženém světle bylo provedeno J. Ducuinem a N. Blombergenem [11] v r. 1963. Jako nelineárního prostředí bylo použito krystalu GaAs a monokrystalu telur. V obou případech odražející krystal absorbuje jak základní, tak odraženou frekvenci. Zajímavé je, že při pozorování „odražené“ vlny druhé harmonické frekvence pozorujeme u složky $E_{\parallel}^R(2\omega)$ pro určitý úhel dopadu úplné vymizení této složky podobně, jako je tomu u Brewsterova efektu. Toto je patrné i z výrazu (I. 38).

Odražená vlna druhé harmonické frekvence má intenzitu řádově 10^6 krát menší, nežli je intenzita dopadajícího záření [13].

Jak jsme viděli, výrazy pro amplitudu „odražené“ vlny druhé harmonické frekvence na rozhraní lineárního a nelineárního prostředí udávají intenzitu této vlny. Totéž nelze ovšem říci o amplitudách $A_{0\perp}^T$ a $A_{0\parallel}^T$.

„Propuštěná“ vlna druhé harmonické frekvence se totiž dále šíří v nelineárním prostředí, takže dochází ke stálému působení mezi vlnou základní frekvence a vlnou druhé harmonické frekvence.

Vezmeme například složku $E_{\perp}^T(2\omega)$. Pro tuto složku dostáváme pomocí (IV.28) a (IV.32)

$$E_{\perp}^T(2\omega) = \left\{ A_{\perp}^R(2\omega) + \frac{P_{\perp}^{NL}(2\omega)}{\varepsilon_0 [n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} \times \quad (IV.40)$$

$$\times [e^{i[2\vec{k}'(\omega) \cdot \vec{r} - \vec{k}'(2\omega) \cdot \vec{r}]} - 1] \right\} e^{i[\vec{k}'(2\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]}.$$

Vzhledem k podmínce (IV.19) platí

$$\begin{aligned} \vec{2k}'(\omega) \cdot \vec{r} - \vec{k}'(2\omega) \cdot \vec{r} &= [2k'_z(\omega) - k'_z(2\omega)] z = \\ &= \frac{2\omega}{c} [n'(\omega) \cos \varepsilon'(\omega) - n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega)] z \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

a můžeme tedy vztah (IV.40) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} E_{\perp}^T(2\omega) &= \left\{ A_{\perp}^R(2\omega) + \frac{P_{\perp}^{NL}(2\omega)}{\varepsilon_0 [n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[e^{i \frac{2\omega}{c} [n'(\omega) \cos \varepsilon'(\omega) - n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega)] z} - 1 \right] \right\} \times \\ &\quad \times e^{i [\vec{k}'(2\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]} \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Omezíme-li se na malé hodnoty z , pro které platí

$$\frac{2\omega}{c} [n'(\omega) \cos \varepsilon'(\omega) - n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega)] z \ll 1$$

dostáváme pro „propuštěnou“ vlnu druhé harmonické frekvence

$$\begin{aligned} E_{\perp}^T(2\omega) &= \left\{ A_{\perp}^R(2\omega) + i \frac{\frac{2\omega}{c} P_{\perp}^{NL}(2\omega)}{\varepsilon_0 [n'^2(\omega) - n'^2(2\omega)]} \times \right. \\ &\quad \left. \times [n'(\omega) \cos \varepsilon'(\omega) - n'(2\omega) \cos \varepsilon'(2\omega)] z \right\} e^{i [\vec{k}'(2\omega) \cdot \vec{r} - 2\omega t]} \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

Z výrazů (IV.42) a (IV.43) je patrné, že počáteční amplituda „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence je rovna amplitudě „odražené“ vlny druhé harmonické frekvence. Druhá část výrazu (IV.43), fázově posunutá o 90° , roste úměrně se vzdáleností od rozhraní. V blízkosti rozhraní roste intenzita úměrně se z^2 , pokud se zachovávají konstantní fázové posuvy mezi základní elektromagnetickou vlnou a vlnou dipólové polarizace.

3. Podmínky pro synchronisaci fází základní vlny a vlny druhé harmonické frekvence

Z výrazu (IV.42) vidíme, že amplituda „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence je funkcí normálové vzdálenosti od roviny rozhraní z . „Propuštěná“ vlna druhé harmonické frekvence představuje tedy v obecném případě nehomogenní elektromagnetickou vlnu, u které plochy konstantní amplitudy jsou rovnoběžné s rovinou rozhraní.

Reálnou část amplitudy „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence,

kteřá závisí na vzdálenosti z , můžeme pro případ kolmého dopadu zapsat ve tvaru

$$A(2\omega, z) = A_0(2\omega) \cos \frac{2\omega}{c} [n'(\omega) - n'(2\omega)] z. \quad (\text{IV.44})$$

Vzhledem k tomu, že se tato vlna šíří v nelineárním prostředí, je nutno předpokládat, že všechny body prostředí jsou generátory druhé harmonické frekvence. Celková amplituda vlny druhé harmonické frekvence je ve vzdálenosti l od roviny rozhraní dána součtem všech příspěvků elementárních generátorů, tj.

$$A(2\omega, l) = \int_0^l A_{l-z}(2\omega, z) dz. \quad (\text{IV.45})$$

Za předpokladu, že pole základní frekvence je zadané a že všechny body nelineárního prostředí se na generaci druhé harmonické frekvence podílejí stejnými příspěvky, tj.

$$A_{l-z}(2\omega) = A_0(2\omega)$$

můžeme pro neabsorpční prostředí poměrně snadno vypočítat hodnotu integrálu (IV.45):

$$A(2\omega, l) = A_0(2\omega) \frac{\sin \frac{2\omega}{c} \Delta l}{\frac{2\omega}{c} \Delta}, \quad (\text{IV.46})$$

kde je označeno

$$\Delta = n'(\omega) - n'(2\omega).$$

Hodnota výrazu (IV.46) se značně liší od nuly tehdy, jestliže je splněna podmínka

$$\frac{2\omega \Delta}{c} l \approx \frac{\pi}{2}. \quad (\text{IV.47})$$

Vzdálenost, která vyhovuje podmínce (IV.47) bývá nazývána koherentní délkou a označíme ji l_{koh} . Pro tuto vzdálenost vychází

$$l_{koh} = \frac{\lambda_0(\omega)}{2[n'(\omega) - n'(2\omega)]}, \quad (\text{IV.48})$$

kde $\lambda_0(\omega)$ je označena vlnová délka základní frekvence ve vakuu.

Pro většinu nelineárních prostředí se hodnota l_{koh} v oblasti normální disperse pohybuje v rozmezí od 10^{-4} do 10^{-3} m. Jsou-li ke generaci druhé harmonické frekvence použity nelineární destičky, jejichž tloušťka je větší, nežli l_{koh} , amplituda „propuštěné“ vlny druhé harmonické frekvence se periodicky mění s tloušťkou destičky, jak ukázal Terhuna [7].

Periodická závislost amplitudy druhé harmonické frekvence na tloušťce nelineární destičky je důsledkem rozfázování vlny základní frekvence a druhé har-

monické frekvence. U izotropních látek nelze docílit synchronisace fází obou vln vzhledem k dispersi prostředí. Fáze vln základní frekvence a druhé harmonické frekvence lze však dobře synchronisovat v anizotropních krystalech, jak ukázali Giordmaine [4], Marker, Terhune, Nisenhoff a Savage [9].

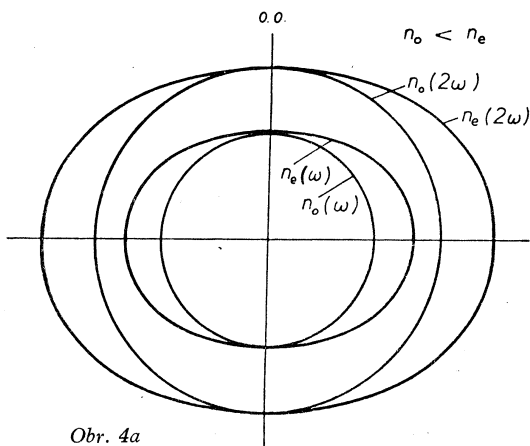
Přidržíme se i nadále představy, že druhá harmonická frekvence je generována jedinou vlnou základní frekvence ω , nikoliv tedy působením dvou vln šířících se různými směry.

V tomto případě je podmínkou synchronisace rovnost normálových indexů lomu základní frekvence a druhé harmonické frekvence

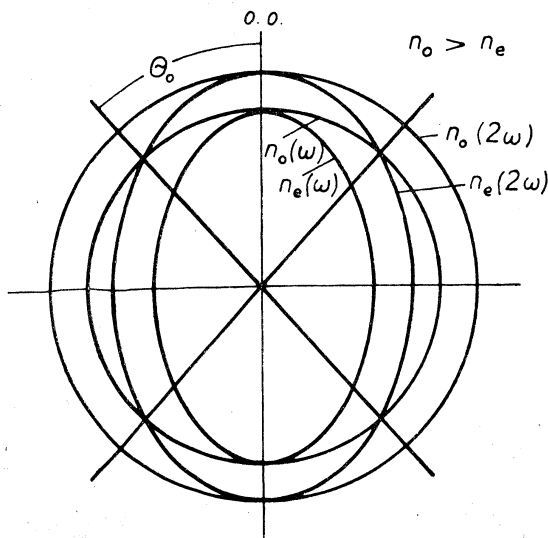
$$n'(\omega) = n'(2\omega). \quad (\text{IV.49})$$

Vzhledem k tenzorovému charakteru susceptibility $\chi^{NL(2)}$ dochází v jednoosých krystalech ke vzájemnému působení mezi řádnými i mimořádnými paprsky obou frekvencí.

Indexy $n'(\omega)$ a $n'(2\omega)$ mohou tedy být indexy lomu jak paprsku řádného, tak paprsku mimořádného. Závislost indexů lomu na směru šíření je znázorněna pro pozitivní krystal křemene ($n_e(\omega) > n_o(\omega)$) na obr. 4a a pro negativní krystal KPD ($n_e(\omega) < n_o(\omega)$) na obr. 4b. Z obr. 4b vidíme, že u krystalu KPD může dojít k synchronisaci obou vln a to tehdy, jestliže vlna



Obr. 4a



Obr. 4b

základní frekvence odpovídá paprsku řádnému s indexem lomu $n_o(\omega)$ a vlna druhé harmonické frekvence odpovídá paprsku mimořádnému s charakteristickými indexy lomu $n_o(2\omega)$, $n_e(2\omega)$. Směr, ve kterém dochází k synchronizaci, svírá s optickou osou krystalu úhel θ_0 , udaný výrazem

$$\sin \theta_0 = \frac{n_e(2\omega)}{n_o(\omega)} \sqrt{\frac{n_o^2(\omega) - n_o^2(2\omega)}{n_e^2(2\omega) - n_o^2(2\omega)}}. \quad (\text{IV.50})$$

Při odchylce od tohoto směru o malý úhel $\Delta\theta$ v rovině hlavního řezu vzrůstá fázová diference Δk úměrně s odchylkou podle vzorce

$$\Delta k = \frac{2\omega}{c} \frac{\sqrt{[n_o^2(2\omega) - n_o^2(\omega)] [n_e^2(2\omega) - n_o^2(2\omega)]}}{n_o(2\omega) n_e(2\omega)} \Delta\theta. \quad (\text{IV.51})$$

Jsou možné i složitější kombinace, při nichž dochází k synchronizaci, jestliže generaci druhé harmonické frekvence způsobují dvě vlny základní frekvence, které se šíří různými směry (viz [4], [7], [9], [14]).

4. Vzájemné působení vlny základní frekvence a vlny druhé harmonické frekvence

Jak bylo ukázáno v předcházejícím odstavci, není možno docílit v izotropním prostředí synchronizaci fázových rychlostí vln základní a druhé harmonické frekvence. Nemělo by proto smysl uvažovat při studiu vzájemného působení obou vln prostředí izotropní, jak jsme učinili v článku 2. tohoto odstavce. Budeme tedy studovat vzájemné působení vlny základní frekvence a vlny druhé harmonické frekvence v prostředí anizotropním.

Dopadající vlna základní frekvence se dělí v anizotropním prostředí na dvě vlny základní frekvence, které odpovídají dvěma vzájemně kolmým kmitosměrům a tyto vlny generují obecně šest vln druhé harmonické frekvence. Při studiu vzájemného působení má však význam pouze případ, kdy jsou pro vlnu základní frekvence a vlnu druhé harmonické frekvence splněny synchronizační podmínky, např. v jednoosých krystalech jsou tyto podmínky splněny pro vzájemné působení mezi vlnou základní frekvence odpovídající paprsku řádnému a vlnou druhé harmonické frekvence odpovídající paprsku mimořádnému, jestliže normálové směry šíření obou vln svírají s optickou osou krystalu úhel θ_0 , udaný (IV.50). Pro takový případ postačí uvažovat působení dvou vln, popsanych rovnicemi

$$\text{grad div } \vec{E}_v(\omega_v) - \Delta \vec{E}_v(\omega_v) - \omega_v^2 \mu_0 \epsilon(\omega_v) \cdot \vec{E}_v(\omega_v) = \omega_v^2 \mu_0 \vec{P}^{NL}(\omega_v),$$

kde

$$v = 1, 2$$

$$\omega_v = \omega, 2\omega.$$

Z okrajových podmínek pro vlnové vektory (IV.10) máme

$$k_{2,x}(2\omega) = 2 k_{1,x}(\omega), \quad k_{2,y}(2\omega) = 2 k_{1,y}(\omega) \quad (\text{IV.53})$$

$$\Delta k = k_{2,z}(2\omega) - 2 k_{1,z}(\omega).$$

O diferenci Δk budeme prozatím předpokládat, že je různá od nuly.

Homogenním rovnicím (IV.52) vyhovují řešení ve tvaru rovinných vln

$$\vec{E}_\nu(\omega_\nu) = \vec{e}_\nu(\omega_\nu) A_\nu(\omega_\nu) e^{i[\vec{k}_\nu(\omega_\nu) \cdot \vec{r} - \omega_\nu t]}, \quad (\text{IV.54})$$

kde jsme označili $\vec{e}_\nu(\omega_\nu)$ jednotkový kmitosměrový vektor.

Jak bylo ukázáno v odst. 2. tohoto článku, je amplituda vlny druhé harmonické frekvence $A_2(2\omega)$, a tedy v důsledku platnosti zákona o zachování energie i amplituda základní frekvence $A_1(\omega)$, pouze funkcí souřadnice z , která zde opět představuje normálu na rozhraní. V důsledku slabé vazby mezi oběma vlnami můžeme předpokládat, že platí

$$\frac{\partial^2 A_\nu(\omega_\nu)}{\partial z^2} \rightarrow 0.$$

Je známo, že v anizotropním prostředí směr šíření energie, udaný Poyntingovým vektorem

$$\vec{G}_\nu(\omega_\nu) = \vec{E}_\nu(\omega_\nu) \times \vec{H}_\nu(\omega_\nu), \quad (\text{IV.55})$$

$$|G_\nu(\omega_\nu)| = \frac{|k_\nu(\omega_\nu)| \cos \delta_\nu(\omega_\nu)}{\mu_0 \omega_\nu} A_\nu(\omega_\nu) A_\nu^*(\omega_\nu)$$

není totožný s normálovým směrem, udaným vlnovým vektorem $\vec{k}_\nu(\omega_\nu)$ (viz obr. 5). Označíme úhel, který tyto směry svírají $\delta_\nu(\omega_\nu)$, dále pak označíme úhly lomu $\varepsilon'_\nu(\omega_\nu)$, plochy konstantní amplitudy $\sum_{A_\nu(\omega_\nu)}$ a plochy konstantní fáze $\sum_{\varphi_\nu(\omega_\nu)}$

Řešením nehomogenních rovnic (IV.54) obdržíme dvě rovnice

$$\begin{aligned} & -2i|k_1| \cos \delta_1 \cos(\varepsilon'_2 - \delta_1) \frac{\partial A_1}{\partial z} = \\ & = \omega^2 \mu_0 \vec{e}_1 \cdot \chi^{NL(2)}(\omega = 2\omega - \omega) : \vec{e}_2 \vec{e}_1 A_2 A_1^* e^{i\Delta k z} \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

$$\begin{aligned} & -2i|k_2| \cos \delta_2 \cos(\varepsilon'_1 - \delta_2) \frac{\partial A_2}{\partial z} = \\ & = (2\omega)^2 \mu_0 \vec{e}_2 \cdot \chi^{NL(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{-i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

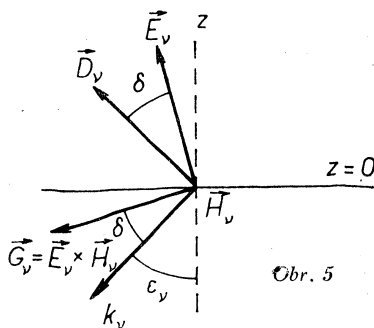
kteří popisují změnu amplitudy obou vln.

Vzhledem k symetrickým vlastnostem tenzoru $\chi^{NL(2)}$ platí

$$2\chi_{ijj}^{NL(2)}(2\omega = \omega + \omega) = \chi_{jij}^{NL(2)}(\omega = 2\omega - \omega),$$

takže rovnice (IV.56) a (IV.57) můžeme za použití (IV.55) zapsat v jediné rovnici

$$|G_1(\omega)| \cos[\varepsilon'_1(\omega) - \delta_1(\omega)] - |G_2(2\omega)| \cos[\varepsilon'_2(2\omega) - \delta_2(2\omega)] = W. \quad (\text{IV.58})$$



Tato rovnice představuje zákon o zachování energie, přesněji řečeno zákon o zachování toků energie ve směru normály z . Veličina W je úplný výkon, protékající jednotkovou ploškou ve směru normály z . V neabsorpčním prostředí je tento výkon konstantní a dochází tedy pouze k systematické výměně energie mezi vlnou základní frekvence a vlnou druhé harmonické frekvence.

Pro další řešení rovnic (IV.56) a (IV.57) označme

$$A_1(z) = \varrho_1(z) e^{i\varphi_1(z)} \quad (IV.59)$$

$$A_2(z) = \varrho_2(z) e^{i\varphi_2(z)}. \quad (IV.60)$$

Dosazením těchto veličin do rovnic (IV.56) a (IV.57) a oddělením reálných a imaginárních částí obdržíme tři rovnice, které plně popisují změnu amplitudy i fáze obou vln

$$\frac{d\varrho_1}{dz} = - \frac{2\omega^2 \mu_0 K}{|k_1| \cos^2 \delta_1} \varrho_1 \varrho_2 \sin \Theta \quad (IV.61)$$

$$\frac{d\varrho_2}{dz} = \frac{4\omega^2 \mu_0 K}{|k_2| \cos^2 \delta_2} \varrho_1^2 \sin \Theta \quad (IV.62)$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \Delta k - 4\omega^2 \mu_0 K \left[\frac{\varrho_2}{|k_1| \cos^2 \delta_1} - \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2 |k_2| \cos^2 \delta_2} \right] \cos \Theta \quad (IV.63)$$

Zde jsme označili

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \vec{e}_1 \cdot \chi^{NL(2)}(\omega = 2\omega - \omega) : \vec{e}_2 \vec{e}_1 = \\ &= \frac{1}{2} \vec{e}_2 \cdot \chi^{NL(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{e}_1 \vec{e}_1 \end{aligned}$$

a

$$\Theta = 2\varphi_1(z) - \varphi_2(z) + \Delta kz.$$

Řešení těchto rovnic je v obecném případě značně obtížné a vede na eliptické integrály. Jejich přesné řešení a diskusi může čtenář nalézt v [6].

V této práci provedeme řešení pouze pro případ, kdy amplituda vlny druhé harmonické frekvence ϱ_2 v rovině rozhraní $z = 0$ je rovna nule a současně je splněna podmínka synchronisace fázových rychlostí obou vln, tj. $\Delta k = 0$. Předpoklad, že amplituda vlny druhé harmonické frekvence v rovině rozhraní je rovna nule není zcela správný, jak bylo ukázáno v odst. 2. tohoto článku. U průhledných krystalů v oblasti normální disperse je však amplituda „propuštěné“ i „odražené“ vlny druhé harmonické frekvence v rovině rozhraní velmi malá ve srovnání s amplitudou vlny základní frekvence, takže předpoklad $\varrho_2(0) = 0$ prakticky vyhovuje podmínkám při experimentu. Armstrong a Blombergen [6] ukázali, že za uvedených předpokladů amplitudy obou vzájemně působících vln jsou reálné a platí

$$\varphi_1(z) = 0, \varphi_2(z) = \frac{\pi}{2}.$$

Rovnice (IV.61) a (IV.62) nabývají pak tvaru

$$\frac{d\varrho_1}{dz} = -C_1\varrho_2\varrho_1 \quad (\text{IV.64})$$

$$\frac{d\varrho_2}{dz} = C_2\varrho_1^2, \quad (\text{IV.65})$$

kde jsme označili

$$C_1 = \frac{2K\omega\mu_0 c}{n \cos^2 \delta_1}, \quad C_2 = \frac{2K\omega\mu_0 c}{n \cos^2 \delta_2}.$$

Ze zákona o zachování energie (IV.58) plyn pro $\varrho_1(z)$ a $\varrho_2(z)$

$$\varrho_1^2(z) - \varrho_1^2(0) = -\frac{\cos^2 \delta_2}{\cos^2 \delta_1} \varrho_2^2(z). \quad (\text{IV.66})$$

Dosazením (IV.66) do rovnic (IV.64) a (IV.65) obdržíme pak integrací

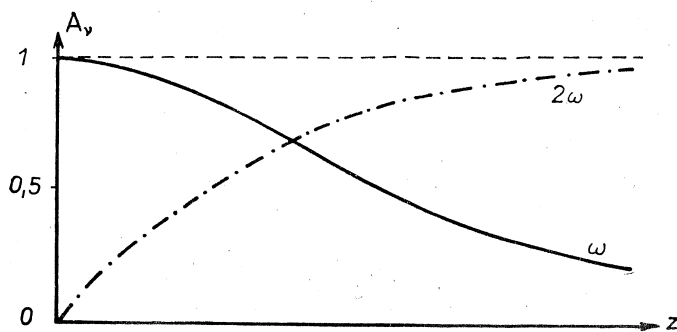
$$\varrho_1(z) = \frac{\varrho_1(0)}{\cosh [C \varrho_1(0) z]} \quad (\text{IV.67})$$

$$\varrho_2(z) = \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \varrho_1(0) \operatorname{tgh} [C \varrho_1(0) z], \quad (\text{IV.68})$$

kde

$$C = \frac{2K \omega \mu_0 c}{n \cos \delta_1 \cos \delta_2}.$$

Průběh amplitud vlny základní frekvence a vlny druhé harmonické frekvence je znázorněn na obr. 6.



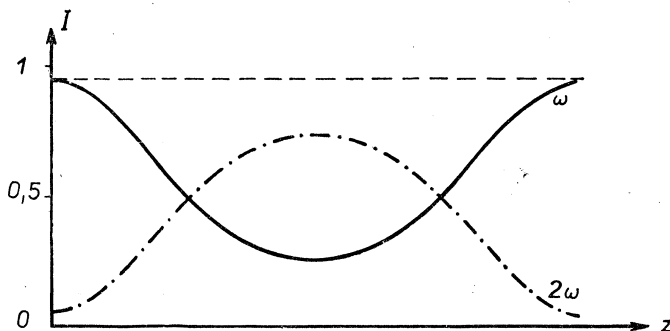
Obr. 6

Vidíme tedy, že amplituda vlny druhé harmonické frekvence roste se vzdáleností z na úkor amplitudy vlny základní frekvence.

Experimentální ověření bylo provedeno Terhunem [10], který použil jako nelineárního prostředí umělý krystal KDP. Maximální výkon druhé harmonické

frekvence, kterého bylo při pokusu dosaženo, byl 20 procent výkonu základní frekvence. Jak vidíme ze vztahů (IV.67) a (IV.68) existuje teoreticky možnost přeměny veškeré energie vlny základní frekvence v energii vlny druhé harmonické frekvence. Vzniká otázka, proč takováto úplná přeměna nebyla dosud v praxi realizována. Je celá řada důvodů, které znemožňují takovouto úplnou přeměnu energie. Například je to nedostatečná fokusace světelného paprsku, odlišnost směrů šíření energie obou paprsků a v důsledku toho vznikající okrajové efekty, difrakce světla apod.

Jak jsme již podotkli, řešení rovnic (IV.61), (IV.62) a (IV.63) je v obecném případě značně složité. Pro případ, že je docílena synchronisace fázových rychlostí obou vln a počáteční amplitudy jsou libovolné, je průběh výkonů v závislosti na normálové vzdálenosti od rozhraní z znázorněn na obr. 7. (viz [6].)



Obr. 7

Jestliže není splněna synchronizační podmínka, amplituda druhé harmonické frekvence se periodicky mění, při čemž periodičita roste s rozfázováním obou vln kz .

Na závěr tohoto odstavce podotýkáme, že mimo generace druhé harmonické frekvence v důsledku nelineární dipólové polarizace prostředí, byla pozorována rovněž generace druhé harmonické frekvence jako důsledek kvadrupólové polarizace [8]. Tyto efekty jsou obvykle velmi malé a je je možno zesílit, jestliže umístíme krystal do elektrostatického pole. Generace druhé harmonické frekvence na základě kvadrupólové polarizace má především význam pro studium nelineárních vlastností krystalů se středem inverze, u kterých tenzor nelineární dipólové polarizace $\chi^{NL(2)}$ má všechny složky nulové.

5. Generace harmonických frekvencí vyšších řádů

Vzhledem k (III.4) jsou nelineární efekty vyšších řádů v oblasti normální disperse podstatně menší, nežli nelineární efekty druhého řádu. Nelineární efekty, které vznikají na rozhraní mezi lineárním a nelineárním prostředím, jsou proto zanedbatelně malé a můžeme tedy předpokládat, že amplitudy generovaných vln vyšších harmonických frekvencí jsou v rovině rozhraní rovny nule. Ke generaci měřitelných veličin dochází teprve v určité hloubce prostředí v důsledku systematické výměny energie mezi vlnami základních frekvencí a vlnou harmonické frekvence.

V obecném případě předpokládáme, že n vln základních frekvencí ω_i způsobuje generaci harmonické frekvence ω_n , při čemž platí

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n \omega_i. \quad (\text{IV.69})$$

Označíme-li $\vec{k}_i(\omega_i)$ vlnové vektory, odpovídající základním frekvencím a $\vec{k}_n(\omega_n)$ vlnový vektor harmonické frekvence, platí pro tyto vlnové vektory okrajové podmínky (IV.10)

$$k_{n,x}(\omega_n) = \sum_{i=1}^n k_{i,x}(\omega_i); \quad k_{n,y}(\omega_n) = \sum_{i=1}^n k_{i,y}(\omega_i) \quad (\text{IV.70})$$

a

$$\Delta k = k_{n,z}(\omega_n) - \sum_{i=1}^n k_{i,z}(\omega_i). \quad (\text{IV.71})$$

Proces generace harmonické frekvence popisuje pak soustava $n + 1$ nehomogenních vlnových rovnic typu (IV.1), které vedou na n rovnic pro komplexní amplitudy základních frekvencí

$$\frac{dA_i}{dz} = - \frac{i \omega_i^2 \mu_0}{\cos \delta_i \cos (\varepsilon'_i - \delta_i)} \left(e^{i \Delta k z} K A_n \prod_{j=1}^{n-1} A_j^* + e^{-i \Delta k_{i,r} z} \sum_r C_{i,r} \prod_{l,m} A_l A_m^* \right) \quad (\text{IV.72})$$

a jednu rovnici pro komplexní amplitudu harmonické frekvence

$$\frac{dA_n}{dz} = - \frac{i \omega_n^2 \mu_0}{\cos \delta_n \cos (\varepsilon'_n - \delta_n)} \left(e^{-i \Delta k z} K \prod_{i=1}^n A_i + e^{-i \Delta k_{n,r} z} \sum_r C_{n,r} \prod_{l,m} A_l A_m^* \right), \quad (\text{IV.73})$$

kde jsme označili úžené tenzorové součiny $(n + 1)$. řádu

$$\begin{aligned} K &= \vec{e}_i \chi^{NL(n)} \left(\omega_i = \omega_n - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j \right) \vec{e}_n \prod_{j=1}^{n-1} \vec{e}_j = \\ &= \vec{e}_n \chi^{NL(n)} \left(\omega_n = \sum_{i=1}^n \omega_i \right) \prod_{i=1}^n \vec{e}_i \end{aligned}$$

a

$$\dot{C}_{i,r} = \vec{e}_i \chi^{NL(n)} \left(\omega_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(r)} \omega_j \right) \prod_{j=1}^n \vec{e}_j$$

$\lambda_j^{(r)}$ jsou zde celočíselné kombinační koeficienty a

$$\Delta k_{i,r} = k_{i,z}(\omega_i) - \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(r)} k_{j,z}(\omega_j).$$

Bereme-li v úvahu generaci n -té harmonické frekvence, generované pouze jedinou vlnou základní frekvence, n rovnic pro amplitudy A_i splývá v jedinou rovnici a stačí tedy brát v úvahu dvě rovnice pro amplitudu základní frekvence a amplitudu harmonické frekvence.

Například pro generaci třetí harmonické frekvence 3ω , buzené vlnou základní frekvence ω , redukuje se rovnice (IV.72) a (IV.73) na dvě rovnice

$$\frac{dA_1}{dz} = - \frac{i \omega^2 \mu_0}{\cos \delta_1 \cos(\varepsilon'_1 - \delta_1)} (e^{iAkz} K A_3 A_1^* A_1^* + \quad \quad \quad \text{(IV.74)}$$

$$+ C_{1,1} A_1 A_1^* A_1 + C_{1,2} A_1 A_3 A_3^*)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{9 i \omega^2 \mu_0}{\cos \delta_3 \cos(\varepsilon'_3 - \delta_3)} (e^{-iAkz} K A_1 A_1 A_1 + \quad \quad \quad \text{(IV.75)}$$

$$+ C_{3,1} A_3 A_3 A_3^*),$$

kde

$$\Delta k = k_z(3\omega) - 3 k_z(\omega)$$

a

$$K = \vec{e}_3 \cdot \chi^{NL(3)}(3\omega = \omega + \omega + \omega) \quad \vec{e}_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 =$$

$$= \vec{e}_1 \cdot \chi^{NL(3)}(\omega = 3\omega - \omega - \omega) \quad \vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_1$$

$$C_{1,1} = \vec{e}_1 \cdot \chi^{NL(3)}(\omega = \omega - \omega + \omega) \quad \vec{e}_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1$$

$$C_{1,2} = \vec{e}_1 \cdot \chi^{NL(3)}(\omega = \omega - 3\omega + 3\omega) \quad \vec{e}_1 \vec{e}_3 \vec{e}_3$$

$$C_{3,1} = \vec{e}_3 \cdot \chi^{NL(3)}(3\omega = 3\omega + 3\omega - 3\omega) \quad \vec{e}_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3.$$

Položíme-li

$$A_1(z) = \varrho_1(z) e^{i\varphi_1(z)} \quad \quad \quad \text{(IV.76)}$$

$$A_3(z) = \varrho_3(z) e^{i\varphi_3(z)} \quad \quad \quad \text{(IV.77)}$$

obdržíme po oddělení reálných a imaginárních částí tři rovnice, které popisují generaci třetí harmonické frekvence v nelineárním prostředí

$$\frac{d\varrho_1}{dz} = - \frac{3\omega^2 \mu_0 K}{|k_1| \cos^2 \delta_1} \varrho_1^2 \varrho_3 \sin \theta \quad \quad \quad \text{(IV.78)}$$

$$\frac{d\varrho_3}{dz} = \frac{9 \omega^2 \mu_0 K}{|k_3| \cos^2 \delta_3} \varrho_3^3 \sin \theta \quad \quad \quad \text{(IV.79)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} = \Delta k + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d \ln(\varrho_3 \varrho_1^3)}{dz} + \\ + 9 \mu_0 \omega^2 \left[\frac{3 C_{1,2}}{|k_3| \cos^2 \delta_3} - \frac{C_{1,1}}{|k_1| \cos^2 \delta_1} \right] \varrho_1^2 + \\ + 9 \mu_0 \omega^2 \left[\frac{C_{3,1}}{|k_3| \cos^2 \delta_3} - \frac{C_{1,2}}{|k_1| \cos^2 \delta_1} \right] \varrho_3^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.80})$$

kde

$$\theta = 3 \varphi_1(z) - \varphi_3(z) + \Delta k z.$$

Zde jsme předpokládali šíření ve směru normály k rovině rozhraní z .

Řešení těchto rovnic je značně obtížné, neboť hodnoty $\varrho_1(\omega)$ a $\varrho_3(3\omega)$ mění se v důsledku kvadratického Kerrova jevu, který způsobují členy u koeficientů $C_{i,r}$ na pravé straně v rovnicích (IV.74) a (IV.75). Přesné řešení těchto rovnic za předpokladu, že je splněna synchronizační podmínka, má význam pouze akademický.

Experimentálně pozoroval generaci třetí harmonické frekvence Terhune [12] v izotropních kapalinách, v kubických krystalech a ve vápenci.

V. Závěr

Generace vyšších harmonických frekvencí spadá do oblasti výzkumu nové fyzikální disciplíny, zvané nelineární optika. Tato disciplína zkoumá všechny optické jevy, které kvalitativně závisejí na intenzitě světla. V nelineárních fenomenologické teorii vystupují pak v Maxwellových rovnicích vektory elektrické a magnetické indukce \vec{D} a \vec{B} jako nelineární funkce vektorů elektrické a magnetické intenzity \vec{E} a \vec{H} .

Význam nelineární optiky je velmi široký. Nejen že značně přispívá k obohacení poznatků o mikrostrukturu látek, ale má velký význam pro rozšíření poznatků o struktuře světla, například v oblasti výzkumu koherence světla. Rovněž velký význam má nelineární optika pro konstrukci kvantových generátorů světla.

Nelineární optika je jednou z disciplín moderní fyziky, ve které se v současné době velmi intenzivně pracuje. Zůstává tedy stále otevřenou oblastí vědeckého výzkumu, jak po stránce teoretické, tak po stránce experimentální.