Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jindřich Palát

О преобразованиях решений двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 73--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119860

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. et CSc. Miroslav Laitoch

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЕШЕНИЙ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

(Поступило в редакцию 31. 5. 1965 г.)

В настоящей работе исследуется вопрос взаимных преобразований решений квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка (g) и (G). Применяется метод работы [1].

1. Рассмотрим два квазилинейные уравнения

$$(\bar{a}(z)\,x + \bar{b}(z)\,y)\,z_x + (\bar{c}(z)\,x + \bar{d}(z)\,y)\,z_y = \bar{g}(z), \quad (\bar{g})$$

$$(\bar{A}(Z)\,X + \bar{B}(Z)\,Y)\,Z_X + (\bar{C}(Z)\,X + D(Z)X)\,Z_Y = \bar{G}(Z), \quad (\bar{G})$$

в которых предполагается, что $\bar{a}(z)$, $\bar{b}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{d}(z)$ и $\bar{g}(z) \neq 0$ непрерывные функции, определенные в интервале j и $\bar{A}(Z)$, $\bar{B}(Z)$, $\bar{C}(Z)$, $\bar{D}(Z)$ и $\bar{G}(Z) \neq 0$ непрерывные функции, определенные в интервале J. Вместо уравнений $(\bar{g})$ и $(\bar{G})$ будем рассматривать эквивалентные им уравнения

$$(a(z)\,x + b(z)\,y)\,z_x + (c(z)\,x + d(z)\,y)\,z_y = 1, \quad (g)$$

$$(A(Z)\,X + B(Z)\,Y)\,Z_X + (C(Z)\,X + D(Z)\,Y)\,Z_Y = 1, \quad (G)$$

в которых коэффициенты при x, y, X и Y равны соответствующим коэффициентам с чертой из уравнений $(\bar{g})$ и $(\bar{G})$, деленные соответственно $\bar{g}(z)$ и $\bar{G}(Z)$. Выпишем характеристические системы, соответствующие уравнениям (g) и (G)

$$(\bar{a}) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a(z)\,x + b(z)\,y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= c(z)\,x + \mathrm{d}(z)\,y, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} &= 1, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} &= A(Z)\,X + B(Z)\,Y, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T} &= C(Z)\,X + D(Z)\,Y, \\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T} &= 1. \end{aligned} \qquad (\bar{A})$$

Разделив в каждой из систем $(\bar{a})$ и $(\bar{A})$ первое и второе уравнение третьим, получаем системы двух уравнений

$$
(a)\qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= a(z)\,x + b(z)\,y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} &= c(z)\,x + \mathrm{d}(z)\,y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} &= A(Z)\,X + B(Z)\,Y, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T} &= C(Z)\,X + D(Z)\,Y. \end{aligned} \qquad (A)
$$

Как легко проверить, каждый первый интеграл системы (a) или (A) будет одновременно первым интегралом соответствующей системы $(\bar{a})$ или $(\bar{A})$.

Пусть $f_1(x, y, z) = c_1$ и $f_2(x, y, z) = c_2$ два независимые первые интегралы системы (a) и $F_1(X, Y, Z) = C_1$ и $F_2(X, Y, Z) = C_2$ два независимые первые интегралы системы (A). Тогда общее решение уравнения (g) и (G) имеет соответственно вид

$$
\varphi[f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z)] = 0, \qquad \Phi[F_1(X, Y, Z),\ F_2(X, Y, Z)] = 0,
$$

где φ и Φ произвольные дифференцируемые функции.

Напомним, что первые интегралы системы (a) и (A) можно получить из общего решения системы (a) и (A), если уравнения, дающие общее решение, разрешить относительно произвольных постоянных. Такое разрешение, как известно, всегда возможно и однозначно, если за произвольные постоянные взять начальные значения $x_0,\ y_0,\ z_0 \in j,\ X_0,\ Y_0,\ Z_0 \in J$.

2. Взаимные преобразования решений систем (a) и (A).

Перепишем системы (a) и (A) в матричный вид

$$
(a)\quad \begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{X}(Z) \\ \dot{Y}(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(Z) & B(Z) \\ C(Z) & D(Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(Z) \\ Y(Z) \end{pmatrix}, \quad (A)
$$

где штрихом обозначена производная относительно z и точкой производная относительно Z. Обозначим $R(z) = Z$ произвольную функцию, обладающую непрерывной производной $R'(z) \neq O$ и отображающую интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$ и $R(z_0) = Z_0 \in I$ для $z_0 \in i$. Тогда существует и обратная функция $R^{-1}(Z) = z$, отображающая интервал I на интервал i и $R^{-1}(Z_0) = z_0$. В дальнейшем согласно [1] важную роль играет следующая система дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\alpha'(z) &= b(z)\, \mathrm{e}^{\int_{z_0}^{z} \langle \mathrm{d}(t) - a(t) \rangle \,\mathrm{d}t}\, \gamma(z) - C[R(z)]\, R'(z)\, \mathrm{e}^{-\int_{R(z_0)}^{R(z)} \langle D[R(t)] - A[R(t)] \rangle R'(t)\,\mathrm{d}t}\, \beta(z), \\
\beta'(z) &= b(z)\, \mathrm{e}^{\int_{z_0}^{z} \langle \mathrm{d}(t) - a(t) \rangle \,\mathrm{d}t}\, \delta(z) - B[R(z)]\, R'(z)\, \mathrm{e}^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} \langle D[R(t)] - A[R(t)] \rangle R'(t)\,\mathrm{d}t}\, \alpha(z), \\
\gamma'(z) &= c(z)\, \mathrm{e}^{-\int_{z_0}^{z} \langle \mathrm{d}(t) - a(t) \rangle \,\mathrm{d}t}\, \alpha(z) - C[R(z)]\, R'(z)\, \mathrm{e}^{-\int_{R(z_0)}^{R(z)} \langle D[R(t)] - A[R(t)] \rangle R'(t)\,\mathrm{d}t}\, \delta(z), \\
\delta'(z) &= c(z)\, \mathrm{e}^{-\int_{z_0}^{z} \langle \mathrm{d}(t) - a(t) \rangle \,\mathrm{d}t}\, \beta(z) - B[R(z)]\, R'(z)\, \mathrm{e}^{-\int_{R(z_0)}^{R(z)} \langle D[R(t)] - A[R(t)] \rangle R'(t)\,\mathrm{d}t}\, \gamma(z).
\end{aligned} \qquad (T)
$$

Для выбранной функции $R(z)$ и при сделанных предположениях о коэффициентах уравнений (g) и (G) гарантируется существование и единственность решения $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ и $\delta(z)$ системы (T), в окрестности точки $z = z_0$, принимающего для $z = z_0$ заданные значения α_0, β_0, γ_0 и δ_0, которые определим ниже. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $X(Z)$, $Y(Z)$ есть решение системы (A), определенное в интервале J начальными условиями $X(Z_0) = X_0$, $Y(Z_0) = Y_0$ для $Z_0 \in I$. Тогда уравнения*

$$
\begin{aligned}
x(z) = {} & \alpha(z) \exp \Big\{ \int_{z_0}^{z} a(t)\, \mathrm{d}t - \int_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]\, R'(t)\, \mathrm{d}t \Big\} X[R(z)] + \\
& + \beta(z) \exp \Big\{ \int_{z_0}^{z} a(t)\, \mathrm{d}t - \int_{R(z)}^{R(z)} D[R(t)]\, R'(t)\, \mathrm{d}t \Big\}\, Y[R(z)], \\
y(z) = {} & \gamma(z) \exp \Big\{ \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}(t)\, \mathrm{d}t - \int_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]\, R'(t)\, \mathrm{d}t \Big\} X[R(z)] + \\
& + \delta(z) \exp \Big\{ \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}(t)\, \mathrm{d}t - \int_{R(z_0)}^{R(z)} D[R(t)]\, R'(t)\, \mathrm{d}t \Big\}\, Y[R(z)],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

определяют решение системы (a), причем начальные значения равны

$$
\begin{aligned}
x(z_0) &= x_0 = \alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0, \\
y(z_0) &= y_0 = \gamma_0 X_0 + \delta_0 Y_0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Доказательство: Преобразования

$$
\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\int_{z_0}^{z} a(t)\, \mathrm{d}t} & 0 \\ 0 & e^{\int_{z_0}^{z} d(t)\, \mathrm{d}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix},
\tag{3}
$$

$$
\begin{pmatrix} X(Z) \\ Y(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\int_{z_0}^{z} A(T)\, \mathrm{d}T} & 0 \\ 0 & e^{\int_{z_0}^{z} D(T)\, \mathrm{d}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(Z) \\ V(Z) \end{pmatrix},
\tag{4}
$$

переводят уравнения (a) и (A) в уравнения

$$
\begin{pmatrix} u'(z) \\ v'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b(z)\, e^{\int_{z^0}^{z} \langle \mathrm{d}(t) - a(t) \rangle\, \mathrm{d}t} \\ c(z)\, e^{-\int_{z_0}^{z} \langle \mathrm{d}(t) - a(t) \rangle\, \mathrm{d}t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix},
\tag{5}
$$

$$
\begin{pmatrix} \dot U(Z) \\ \dot V(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(Z)\, e^{\int_{z_0}^{z} \langle D(T) - A(T) \rangle\, \mathrm{d}T} \\ C(Z)\, e^{-\int_{z_0}^{z} \langle D(T) - A(T) \rangle\, \mathrm{d}T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(Z) \\ V(Z) \end{pmatrix},
\tag{6}
$$

причем начальные значения равны

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [1], решение уравнения (5) можно выразить с помощью уравнения (6) так, что

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U[R(z)] \\ V[R(z)] \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причем

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Складывая выражения (3), (7) и обратное (4), получаем, что

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt} & 0 \\ 0 & e^{\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\int_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]R'(t)\,dt} & 0 \\ 0 & e^{-\int_{R(z_0)}^{R(z)} D[R(t)]R'(t)\,dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[R(z)] \\ Y[R(z)] \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Этим выведены равенства (1). Из (8) вытекают равенства (2), так как, полагая в (8) $z = z_0$, получаем

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}.$$

Замечание: Начальные значения α_0, β_0, γ_0 и δ_0 решения системы (T) выберем так, чтобы $\alpha_0\delta_0 - \gamma_0\beta_0 = K_0 \neq 0$. Согласно [1] матрица

$$K(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}$$

такая, что производная определителя $|K(z)|$ равна нулю для $z \in i$. Это значит, что определитель $|K(z)|$ в интервале i постоянен и его значение $|K(z)| = |K(z_0)| = K_0 = \alpha_0\delta_0 - \gamma_0\beta_0 = K_0 \neq 0$. Следовательно, матрица $K(z)$ невырожденная, и для нее существует обратная матрица $K^{-1}(z)$. Тогда из [1] вытекает

Теорема 2. *Решение $X(Z)$, $Y(Z)$ системы (A), определенное начальными условиями $X(Z_0) = X_0$, $Y(Z_0) = Y_0$, удовлетворяет в интервале I $(I = R(i))$ по отношению к решению $\dot{x}(z)$, $y(z)$ системы (a), определенному начальными условиями* (2), *обратному соотношению относительно* (8)

$$\begin{pmatrix} X(Z) \\ Y(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\int_{z_0}^{z} A(T)\,dT} & 0 \\ 0 & e^{\int_{z_0}^{z} D(T)\,dT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta[R^{-1}(Z)]}{K_0} & \dfrac{-\beta[R^{-1}(Z)]}{K_0} \\ \dfrac{-\gamma[R^{-1}(Z)]}{K_0} & \dfrac{\alpha[R^{-1}(Z)]}{K_0} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{-\int_{R^{-1}(z_0)}^{R^{-1}(z)} a[R^{-1}(T)](R^{-1}(T))'\,dT} & 0 \\ 0 & e^{-\int_{R^{-1}(z_0)}^{R^{-1}(z)} d[R^{-1}(T)](R^{-1}(T))'\,dT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[R^{-1}(Z)] \\ y[R^{-1}(Z)] \end{pmatrix}, \tag{9}$$

т. е.

$$X(Z) = \frac{\delta[R^{-1}(Z)]}{K_0} \exp\left\{ \int\limits_{Z_0}^{Z} A(T)\,\mathrm{d}T - \int\limits_{R^{-1}(z_0)}^{R^{-1}(z)} a[R^{-1}(T)][R^{-1}(T)]'\,\mathrm{d}T \right\} x[R^{-1}(Z)] -$$

$$- \frac{\beta[R^{-1}(Z)]}{K_0} \exp\left\{ \int\limits_{Z_0}^{Z} A(T)\,\mathrm{d}T - \int\limits_{R^{-1}(z_0)}^{R^{-1}(z)} \mathrm{d}[R^{-1}(T)][R^{-1}(T)]'\,\mathrm{d}T \right\} y[R^{-}(Z)], \tag{10}$$

$$Y(Z) = \frac{-\gamma[R^{-1}(Z)]}{K_0} \exp\left\{ \int\limits_{Z_0}^{Z} D(T)\,\mathrm{d}T - \int\limits_{R^{-1}(Z_0)}^{R^{-1}(Z)} a[R^{-1}(T)][R^{-1}(T)]'\,\mathrm{d}T \right\} x[R^{-1}(Z)] +$$

$$+ \frac{\alpha[R^{-1}(Z)]}{K_0} \exp\left\{ \int\limits_{Z_0}^{Z} D(T)\,\mathrm{d}T - \int\limits_{R^{-1}(Z_0)}^{R^{-1}(Z)} \mathrm{d}[R^{-1}(T)][R^{-1}(T)]'\,\mathrm{d}T \right\} y[R^{-1}(Z)],$$

причем

$$X_0 = \frac{\delta_0}{K_0} x_0 - \frac{\beta_0}{K_0} y_0,$$

$$Y_0 = \frac{-\gamma_0}{K_0} x_0 + \frac{\alpha_0}{K_0} y_0.$$

3. Взаимное преобразование первых интегралов систем (a) и (A)

Теорема 3. *Пусть* $F_i(X, Y, Z) = C_i$ *есть первый интервал системы* (A). *Тогда*

$$f_i(x, y, z) = F_i\left[\left(\frac{(\delta(z)}{K_0} e^{-\int\limits_{z_0}^{z} a(t)\,\mathrm{d}t} x - \frac{\beta(z)}{K_0} e^{-\int\limits_{z_0}^{z} \mathrm{d}(t)\,\mathrm{d}t} y\right) e^{\int\limits_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]\,R'(t)\,\mathrm{d}t};\right.$$

$$\left.\left(\frac{-\gamma(z)}{K_0} e^{-\int\limits_{z_0}^{z} a(t)\,\mathrm{d}t} x + \frac{\alpha(z)}{K_0} e^{-\int\limits_{z_0}^{z} \mathrm{d}(t)\,\mathrm{d}t} y\right) e^{\int\limits_{R(z_0)}^{R(z)} D[R(t)]\,R'(t)\,\mathrm{d}t}, R(z)\right] \tag{11}$$

есть первый интеграл системы (a).

Доказательство: Возьмем любое решение $x(z)$, $y(z)$ систем (a) и подставим его в уравнение (11). Используя уравнения (10), в которых положим $Z = R(z)$ и $T = R(t)$, получаем, что

$$f_i(x, y, z) = F_i[X(R(z)), Y(R(z)], R(z)] = F_i[X(Z), Y(Z), Z] = C_i.$$

Замечание: В выражении (11) можно пренебречь множителем $1 : K_0$, так как, если $x(z)$, $y(z)$ есть решение однородной системы (a), то $K_0 x(z)$, $K_0 y(z)$ также является решением той же системы (a), и, следовательно, имеет место $f_i(K_0 x(z), K_0 y(z), z) = c_i$.

4. Взаимное преобразование общих интегралов уравнений (g) и (G)

Лемма: *Пусть* $F_1(X, Y, Z) = C_1$ *и* $F_2(X, Y, Z) = C_2$ *два независимые первые интегралы системы* (A).

Тогда преобразованные первые интегралы (11) $f_1(x, y, z) = c_1$ *и* $f_2(x, y, z) = c_2$ *системы* (a) *являются тоже независимыми.*

Утверждение леммы вытекает из того, что

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(X, Y)} \frac{1}{K_0} \exp\left\{ \int\limits_{R(z_0)}^{R(z)} \langle A[R(t)] + D[R(t)] \rangle R'(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{z_0}^{z} \langle a(t) + d(t) \rangle\, dt \right\} \not\equiv 0. \qquad (12)$$

Теорема 5. *Пусть* $F_1(X, Y, Z) = C_1$ *и* $F_2(X, Y, Z) = C_2$ *два независимые первые интегралы системы* (A).

Тогда

$$\varphi[f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z)] = 0,$$

где $f_1(x, y, z)$ *и* $f_2(x, y, z)$ *определены выражениями* (11) *и* φ*-дифференцируемая функция, есть общее решение уравнения* (g).

Доказательство: Согласно теореме 3, зная первые интегралы $F_1(X, Y, Z) = C_1$ и $F_2(X, Y, Z) = C_2$ системы (A), можно с помощью (11) построить первые интегралы $f_1(x, y, z) = c_1$ и $f_2(x, y, z) = c_2$ системы (a). В предыдущей лемме доказано, что из независимости первых интегралов $F_1(X, Y, Z) = C_1$ и $F_2(X, Y, Z) = C_2$ системы (A) вытекает независимость первых интегралов $f_1(x, y, z) = c_1$ и $f_2(x, y, z) = c_2$ системы (a). Этим утверждение теоремы доказано.

Пусть

$$\Phi[F_1(X, Y, Z),\ F_2(X, Y, Z)] = 0 \qquad (13)$$

есть общее решение уравнения (G). Тогда из теоремы 5 вытекает, что $\varphi[f_1(x, y, z)\ f_2(x, y, z)] = 0$, где φ-произвольная дифференцируемая функция, $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ определены (11), есть общее решение уравнения (g). Однако, для определенности будем сохранять внешнюю функцию и определим взаимное преобразование общих интегралов уравнений (g) и (G) следующим образом:

Определение: *Пусть* (13) *есть общий интеграл уравнения* (G).

Тогда

$$\Phi[f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z)] = 0, \qquad (14)$$

где $f_1(x, y, z)$ *и* $f_2(x, y, z)$ *определены выражениями* (11), *есть преобразованный общий интеграл* (13) *и общий интеграл уравнения* (g).

5. Пример

Используем выше изложенную теорию к тому, чтобы выразить общее решение уравнения

$$(ax + by)z_x + (cx + dy)\,z_y = z^\nu, \tag{15}$$

где a, b, c, d, ν, $(b^2 + c^2 > 0)$ произвольные вещественные числа, через общее решение более простого дифф. уравнения однородных функций первого порядка

$$XZ_X + YZ_Y = Z. \tag{16}$$

Предполагая, что $z \neq 0$ и $Z \neq 0$, приведем оба уравнения к виду (g) и (G)

$$\left(\frac{a}{z^\nu}x + \frac{b}{z^\nu}y\right)z_x + \left(\frac{c}{z^\nu}x + \frac{d}{z^\nu}y\right)z_y = 1, \tag{17}$$

$$\frac{X}{Z}Z_X + \frac{Y}{Z}Z_Y = 1. \tag{18}$$

Для уравнения (18) легко определить первые интегралы соответствующей характеристической системы. Например

$$F_1(X, Y, Z) = \frac{Z}{X} = C_1, \qquad F_2(X, Y, Z) = \frac{Z}{Y} = C_2$$

и

$$F_3(X, Y, Z) = \frac{Y}{Z} = C_3. \tag{19}$$

Общее решение уравнения (18) есть любая дифференцируемая однородная функция первого порядка. Например,

$$Z = X\Phi_1\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \text{и} \quad Z = Y\Phi_2\left(\frac{X}{Y}\right). \tag{20}$$

Для уравнений (17) и (18) целесообразно положить $R(z) = z = Z$. Тогда система (T) принимает для $\nu \neq 1$ вид

$$\begin{aligned}
\alpha'(z) &= b\omega z^{-\nu}\,e^{-\frac{a-d}{1-\nu}z^{1-\nu}}\,\gamma(z),\\
\beta'(z) &= b\omega z^{-\nu}\,e^{-\frac{a-d}{1-\nu}z^{1-\nu}}\,\delta(z),\\
\gamma'(z) &= c\omega^{-1}z^{-\nu}\,e^{\frac{a-d}{1-\nu}z^{1-\nu}}\,\alpha(z),\\
\delta'(z) &= c\omega^{-1}z^{-\nu}\,e^{\frac{a-d}{1-\nu}z^{1-\nu}}\,\beta(z),
\end{aligned} \tag{21}$$

где $\omega = e^{\frac{a-d}{1-\nu}z_0^{1-\nu}}$ и для $\nu = 1$

$$\begin{aligned}
\alpha'(z) &= bwz^{-a+d-1}\gamma(z),\\
\beta'(z) &= bwz^{-a+d-1}\delta(z),\\
\gamma'(z) &= cw^{-1}z^{a-d-1}\alpha(z),\\
\delta'(z) &= cw^{-1}z^{a-d-1}\beta(z),
\end{aligned} \tag{22}$$

где $w = z_0^{a-d}$.

Обе системы (21) и (22) распадаются на две одинаковые системы двух уравнений (первое вместе с третьим и второе вместе с четвертым) следующего типа

$$
\begin{aligned}
u'(z) &= b\omega z^{-\nu}\, e^{-\frac{a-d}{1-\nu} z^{1-\nu}} v(z),\\
v'(z) &= c\omega^{-1} z^{-\nu}\, e^{\frac{a-d}{1-\nu} z^{1-\nu}} u(z),
\end{aligned}
\tag{21'}
$$

$$
\begin{aligned}
u'(z) &= bwz^{-a+d-1} v(z),\\
v'(z) &= cw^{-1} z^{a-d-1} u(z).
\end{aligned}
\tag{22'}
$$

Рассмотрим сначала случай $\nu \neq 1$. Решим систему (21′). Исключая с помощью дифференцирования из системы (21′) функцию $v(z)$, получаем для определения функции $u(z)$ диф. уравнение второго порядка

$$
z^{2\nu} u'' + [z^{2\nu-1}\nu + z^{\nu}(a - d)]\, u' - bcu = 0. \tag{23}
$$

Полагая $u(z) = \eta(\xi)$, где $\xi = z^{1-\nu}$, получаем

$$
\eta''(\xi) + \frac{a-d}{1-\nu}\,\eta'(\xi) - \frac{bc}{(1-\nu)^2}\,\eta(\xi) = 0. \tag{24}
$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого зависит от значения $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$.

I. Пусть $\Delta > 0$. Тогда фундаментальная система решений уравнения (24) есть

$$
\eta_1 = \exp\left\{\left(d - a - \sqrt{\Delta}\,\mathrm{sgn}\,(1-\nu)\right)\frac{\xi}{2(1-\nu)}\right\},
$$

$$
\eta_2 = \exp\left\{\left(d - a + \sqrt{\Delta}\,\mathrm{sgn}\,(1-\nu)\right)\frac{\xi}{2(1-\nu)}\right\}.
$$

Полагая

$$
p = \frac{a-d}{2(1-\nu)}, \qquad q = \frac{s}{2(1-\nu)} \quad \text{и} \quad s = \sqrt{\Delta}\,\mathrm{sgn}\,(1-\nu), \tag{25}
$$

получаем, что фундаментальная система решений уравнения (23)

$$
u_1(z) = e^{-(p+q)z^{1-\nu}}, \qquad u_2(z) = e^{-(p-q)z^{1-\nu}}.
$$

Из второго уравнения системы (21′) находим, что

$$
v_1(z) = -\frac{(p+q)(1-\nu)}{b\omega} e^{(p-q)z^{1-\nu}}, \qquad v_2(z) = -\frac{(p-q)(1-\nu)}{b\omega} e^{(p+q)z^{1-\nu}}.
$$

Решение системы (21)

$$
\alpha(z) = e^{-(p+q)z^{1-\nu}}, \quad \beta(z) = e^{-(p-q)z^{1-\nu}},
$$

$$
\gamma(z) = -\frac{(p+q)(1-\nu)}{b\omega} e^{(p-q)z^{1-\nu}}, \qquad \delta(z) = -\frac{(p-1)(1-\nu)}{b\omega} e^{(p+q)z^{1-\nu}}.
$$

Определитель $K_0 = \frac{s}{b\omega}$. Пусть $F_i(X, Y, Z) = C$, есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (18). Тогда, согласно (11), $f_i(x, y, z) =$

$$= F_i\left[z\, e^{\frac{-a-d+s}{z(1-\nu)} z^{1-\nu}}\left(\frac{-a+d+s}{2}x - by\right);\; z\, e^{\frac{-a-d-s}{z(1-\nu)} z^{1-\nu}}\left(\frac{a-d+s}{2}x + by\right);\; z\right]$$

есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (17). Общему решению (20) уравнения (18) соответствует общее решение уравнения (17)

$$e^{\frac{a+d-s}{2(1-\nu)} z^{1-\nu}} + [(p-q)(1-\nu)x + by]\,\Phi_1\left[-\frac{(a-d+s)\,x + 2by}{(a-d-s)\,x + 2by}\, e^{\frac{-s}{(1-\nu)} z^{1-\nu}}\right] = 0.$$

Заметим, что второй член левой части является однородной функцией первого порядка относительно x, y.

II. Пусть $\Delta = 0$. Тогда фундаментальная система решений уравнения (24) при обозначениях (25)

$$\eta_1(\xi) = e^{-p\xi}, \qquad \eta_2(\xi) = \xi\, e^{-p\xi}.$$

Фундаментальная система решений уравнения (23)

$$u_1(z) = e^{-\,z^{1-\nu}}, \qquad u_2(z) = z^{1-\nu}\, e^{-pz^{1-\nu}}.$$

Из второго уравнения системы (21) находим, что

$$v_1(z) = -\frac{p(1-\nu)}{b\omega}\, e^{pz^{1-\nu}}, \qquad v_2(z) = \frac{(1-\nu) - p(1-\nu)\,z^{1-\nu}}{b\omega}\, e^{pz^{1-\nu}}.$$

Решение системы (21)

$$\alpha(z) = e^{-pz^{1-\nu}}, \qquad \beta(z) = z^{1-\nu}\, e^{-pz^{1-\nu}},$$

$$\gamma(z) = -\frac{p(1-\nu)}{b\omega}\, e^{pz^{1-\nu}}, \qquad \delta(z) = \frac{(1-\nu)\,(1-pz^{1-\nu})}{b\omega}\, e^{pz^{1-\nu}}.$$

Определитель $K_0 = \frac{1-\nu}{b\omega}$. Пусть $F_i(X, Y, Z) = C_i$ есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (18). Тогда, согласно (11),

$$f_i(x, y, z) = F_i\Big[z\, e^{-\frac{a+d}{2(1-\nu)} z^{1-\nu}}\,[(1-\nu)\,(1-pz^{1-\nu})\,x - byz^{1-\nu}];$$
$$z\, e^{-\frac{a+d}{2(1-\nu)} z^{1-\nu}}\,[p(1-\nu)\,x + by);\; z\Big]$$

есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (17). Общему решению (20) уравнения (18) соответствует общее решение уравнения (17)

$$e^{-\frac{a+d}{2(1-\nu)} z^{1-\nu}} - (p(1-\nu)\,x + by)\,\Phi_2\left[\frac{[(1-\nu)\,(1-pz^{1-\nu})\,x - byz^{1-\nu}]}{p(1-\nu)\,x + by}\right] = 0.$$

Второй член левой части является однородной функцией первого порядка относительно x, y.

II. Пусть $\Delta < 0$. Тогда фундаментальная система решений уравнения (24) при обозначениях (25) есть

$$\eta_1(\xi) = e^{-p\xi} \sin \bar{q}\xi, \qquad \eta_2(\xi) = e^{-p\xi} \cos \bar{q}\xi,$$

где $\bar{q} = \frac{\sqrt{-\Delta}\,\mathrm{sgn}\,(1-\nu)}{2(1-\nu)}$. Фундаментальная система решений уравнения (23)

$$u_1(z) = e^{-pz^{1-\nu}} \sin \bar{q}z^{1-\nu}, \qquad u_2(z) = e^{-pz^{1-\nu}} \cos \bar{q}z^{1-\nu}.$$

Из второго уравнения системы (21′) находим, что

$$v_1(z) = e^{pz^{1-\nu}} \left(-\frac{p(1-\nu)}{b\omega} \sin \bar{q}z^{1-\nu} + \frac{\bar{q}\,(1-\nu)}{b\omega} \cos \bar{q}z^{1-\nu}\right),$$

$$v_2(z) = e^{pz^{1-\nu}} \left(-\frac{p(1-\nu)}{b\omega} \cos \bar{q}z^{1-\nu} - \frac{\bar{q}(1-\nu)}{b\omega} \sin \bar{q}z^{1-\nu}\right).$$

Решение системы (21)

$$\alpha(z) = e^{-pz^{1-\nu}} \sin \bar{q}z^{1-\nu}, \qquad \beta(z) = e^{-pz^{1-\nu}} \cos \bar{q}z^{1-\nu},$$

$$\gamma(z) = -\frac{e^{pz^{1-\nu}}(1-\nu)}{b\omega}(p \sin \bar{q}z^{1-\nu} - \bar{q} \cos \bar{q}z^{1-\nu}),$$

$$\delta(z) = -\frac{e^{pz^{1-\nu}}(1-\nu)}{b\omega}(\bar{q} \sin \bar{q}z^{1-\nu} + p \cos \bar{q}z^{1-\nu}).$$

Определитель $K_0 = -\frac{\bar{q}\,(1-\nu)}{b\omega}$. Пусть $F_i(X, Y, Z) = C_i$, есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (18). Тогда, согласно (11), $f_i(x, y, z) =$

$$= F_i\Big[-z\, e^{-\frac{a+d}{2(1-\nu)}z^{1-\nu}}(1-\nu)\,(\bar{q} \sin \bar{q}z^{1-\nu} + p \cos \bar{q}z^{1-\nu})\, x + by \cos \bar{q}z^{1-\nu});$$

$$z\, e^{-\frac{a+d}{(1-\nu)}z^{1-\nu}}((1-\nu)\,(p \sin \bar{q}z^{1-\nu} - \bar{q} \cos \bar{q}z^{1-\nu})\, x + by \sin \bar{q}z^{1-\nu}),\ z\Big]$$

есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (17). Общему решению (20) уравнения (18) соответствует общее решение уравнения (17)

$$e^{\frac{a+d}{2(1-\nu)}z^{1-\nu}} + [(1-\nu)\,(\bar{q} \sin \bar{q}z^{1-\nu} + p \cos \bar{q}z^{1-\nu})\, x +$$

$$+ by \cos \bar{q}z^{1-\nu}]\; \Phi_1\left[\frac{(1-\nu)\,(\bar{q} \sin \bar{q}z^{1-\nu} + p \cos \bar{q}z^{1-\nu})\, x + by \cos \bar{q}z^{1-\nu}}{(1-\nu)\,(p \sin \bar{q}z^{1-\nu} - \bar{q} \cos \bar{q}z^{1-\nu})\, x + by \sin \bar{q}z^{1-\nu}}\right] = 0.$$

Второй член левой части является однородной функцией первого порядка относительно x, y.

Теперь рассмотрим случай $\nu = 1$. Решим систему (22'). Исключая с помощью дифференцирования из этой системы функцию $v(z)$, получаем для определения функции $u(z)$ уравнение Эйлера

$$z^2u'' + (a - d + 1)\, zu' - bcu = 0. \tag{26}$$

Решение этого уравнения зависит от значения $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$. Поступая аналогично предыдущему случаю, получаем следующие результаты:

I. Пусть $\Delta > 0$. Тогда решение системы (22) возьмем в виде

$$\alpha(z) = z^{\frac{-a+d+\sqrt{\Delta}}{2}}, \qquad \beta(z) = z^{\frac{-a+d-\sqrt{\Delta}}{2}},$$

$$\gamma(z) = \frac{-a + d + \sqrt{\Delta}}{2bw} z^{\frac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2}}, \qquad \delta(z) = \frac{-a + d - \sqrt{\Delta}}{2bw} z^{\frac{a-d-\sqrt{\Delta}}{2}}.$$

Определитель $K_0 = \dfrac{-\sqrt{\Delta}}{bw}$. Пусть $F_i(X, Y, Z) = C_i$ есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (18). Тогда, согласно (11),

$$f_i(x, y, z) = F_i\Big[z^{\frac{-a-d-\sqrt{\Delta}+2}{2}}((-a + d - \sqrt{\Delta})\, x - 2by),$$
$$z^{\frac{-a-d+\sqrt{\Delta}+2}{2}}((a - d - \sqrt{\Delta})\, x + 2by),\ z\Big]$$

есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (17). Общему решению (20) уравнения (18) соответствует общее решение уравнения (17)

$$z^{\frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2}} + [(a - d + \sqrt{\Delta})\, x + 2by]\, \Phi_1\left[\frac{(-a + d + \sqrt{\Delta})\, x - 2by}{(a - d + \sqrt{\Delta})\, x + 2by}\right] = 0.$$

II. Пусть $\Delta = 0$. Тогда решение системы (22) возьмем в виде

$$\alpha(z) = z^{\frac{-a+d}{2}}, \qquad \beta(z) = z^{\frac{-a+d}{2}} \ln |z|,$$

$$\gamma(z) = \frac{-a + d}{2bw} z^{\frac{a-d}{2}}, \qquad \delta(z) = \frac{2 + (d - a) \ln |z|}{2bw} z^{\frac{a-d}{2}}.$$

Определитель $K_0 = b^{-1}w^{-1}$. Пусть $F_i(X, Y, Z) = C_i$ есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (18). Тогда, согласно (11),

$$f_i(x, y, z) = F_i\Big[z^{\frac{-a-d+2}{2}}[(2 + (d - a) \ln |z|)\, x - 2by \ln |z|],$$
$$z^{\frac{-a-d+2}{2}}[(a - d)\, x + 2by],\ z\Big]$$

есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (17). Общему решению (20) уравнения (18) соответствует общее решение уравнения (17)

$$z^{\frac{a+d}{2}}-[(a-d)x+2by]\Phi_2\left[\frac{(2+(d-a)\ln|z|)x-2by\ln|z|}{(a-d)x+2by]}\right]=0.$$

III. Пусть $\Delta<0$. Тогда решение системы (22) возьмем в виде

$$\alpha(z)=z^{\frac{-a+d}{2}}\cos\lambda(z),\qquad \beta(z)=z^{\frac{-a+d}{2}}\sin\lambda(z),$$

$$\gamma(z)=z^{\frac{-a+d}{2}}\left(\frac{-a+d}{2bw}\cos\lambda(z)-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2bw}\sin\lambda(z)\right),$$

$$\delta(z)=z^{\frac{a-d}{2}}\left(\frac{-a+d}{2bw}\sin\lambda(z)+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2bw}\cos\lambda(z)\right),$$

где $\lambda(z)=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln|z|$. Определитель $K_0=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2bw}$. Пусть $F_i(X,Y,Z)=C_i$ есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (18). Тогда, согласно (11), $f_i(x,y,z)=$

$$F_i\Big[z^{\frac{-a-d+2}{2}}\big(\{(d-a)\sin\lambda(z)+\sqrt{-\Delta}\cos\lambda(z)\}x-2by\sin\lambda(z)\big),$$
$$z^{\frac{-a-d+2}{2}}\big(\{(a-d)\cos\lambda(z)+\sqrt{-\Delta}\sin\lambda(z)\}x+2by\sin\lambda(z)\big),\ z\Big]$$

есть первый интеграл характеристической системы, соответствующей уравнению (17). Общему решению (20) уравнения (18) соответствует общее решение уравнения (17)

$$z^{\frac{a+d}{2}}-[\{(d-a)\sin\lambda(z)+\sqrt{-\Delta}\cos\lambda(z)\}x-$$
$$-2by\sin\lambda(z)]\,\Phi_1\left[\frac{\big((a-d)\cos\lambda(z)+\sqrt{-\Delta}\sin\lambda(z)\big)x+2by\cos\lambda(z)}{\big((d-a)\sin\lambda(z)+\sqrt{-\Delta}\cos\lambda(z)\big)x-2by\sin\lambda(z)}\right]=0.$$

6. Взаимное преобразование решений задач Коши уравнений (g) и (G)

Пусть дана начальная кривая

$$X=\Psi_1(\tau),\qquad Y=\Psi_2(\tau),\qquad Z=\Psi_3(\tau),\tag{26}$$

где функции $\Psi_1(\tau)$, $\Psi_2(\tau)$, $\Psi_3(\tau)$ определены и непрерывны в интервале L, в котором существует производная $\Psi_3'(\tau)\neq 0$ и $\Psi_3(\tau)\subset I$ для $\tau\in L$. О начальной кривой (26) предполагается, что она не является характеристической, значит не является решением системы (A). Пусть

$$F_1(X,Y,Z)=C_1,\qquad F_2(X,Y,Z)=C_2,\tag{27}$$

есть два независимые первые интегралы системы (A). Если в равенства (27) подставить начальную кривую (26), то левые части этих равенств не могут быть одновременно постоянными. Предположим, что обе левые части являются после подстановки τ функциями τ и что нам удалось этот параметр исключить из системы (27). Таким образом, установим искомую связь между постоянными C_1 и C_2

$$\Psi(C_1, C_2) = 0, \tag{28}$$

где Ψ определенная функция. Итак, интегральная поверхность, проходящая через начальную кривую (26), определена уравнением

$$\Psi[F_1(X, Y, Z), \; F_2(X, Y, Z)] = 0. \tag{29}$$

Подвергнем начальную кривую такому же преобразованию, как решение системы (A) в теореме 1. Пусть для $\tau_0 \in L$, $\Psi_3(\tau_0) = Z_0 \in I$. Определим преобразование начальной кривой (26) следующим образом

$$\varphi_3(\tau) = R^{-1}[\Psi_3(\tau)]$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1[\varphi_3(\tau)] \\ \varphi_2[\varphi_3(\tau)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} a(\varphi_3)\, d\varphi_3} & 0 \\ 0 & e^{\int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} d(\varphi_3)\, d\varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\varphi_3) & \beta(\varphi_3) \\ \gamma(\varphi_3) & \delta(\varphi_3) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{-\int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} A[R(\varphi_3)]\, R'(\varphi_3)\, d\varphi_3} & 0 \\ 0 & e^{-\int_{R(\varphi_3^0)}^{(R\varphi_3)} D[R(\varphi_3)]\, R'(\varphi_3)\, d\varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(\Psi_3) \\ \Psi_2(\Psi_3) \end{pmatrix} \tag{30}$$

значит

$$x = \varphi_1[\varphi_3(\tau)] = \alpha(\varphi_3) \exp\{ \int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} a(\varphi_3)\, d\varphi_3 - \int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} A[R(\varphi_3)]\, R'(\varphi_3)\, d\varphi_3 \}\, \Psi_1[\Psi_3(\tau)] +$$

$$+ \beta(\varphi_3) \exp\{ \int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} a(\varphi_3)\, d\varphi_3 - \int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} D[R(\varphi_3)]\, R'(\varphi_3)\, d\varphi_3 \}\, \Psi_2[\Psi_3(\tau)],$$

$$y = \varphi_2[\varphi_3(\tau)] = \gamma(\varphi_3) \exp\{ \int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} d(\varphi_3)\, d\varphi_3 - \int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} D[R(\varphi_3)]\, R'(\varphi_3)\, d\varphi_3 \}\, \Psi_1[\Psi_3(\tau)] +$$

$$+ \delta(\varphi_3) \exp\{ \int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} d(\varphi_3)\, d\varphi_3 - \int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} D[R(\varphi_3)]\, R'(\varphi_3)\, d\varphi_3 \}\, \Psi_2[\Psi_3(\tau)], \tag{31}$$

$$z = \varphi_3(\tau) = R^{-1}[\Psi_3(\tau)],$$

где $\varphi_3^0 = R^{-1}[\Psi_3(\tau_0)]$.

Теорема 6. *Пусть* (29) *определяет интегральную поверхность уравнения* (G), *проходящую через начальную кривую* (26).

Тогда уравнение

$$\Psi[f_1(x, y, z), \; f_2(x, y, z)] = 0, \tag{32}$$

где, согласно (11), $f_1(x, y, z)$ *и* $f_2(x, y, z)$ *первые интегралы системы* (a), *определяет ту интегральную поверхность уравнения* (g), *которая проходит через преобразованную кривую* (31).

Доказательство: То, что (32) определяет решение уравнение (g), сказано в теореме 5. Покажем еще, что интегральная поверхность, определенная равенством (32), проходит через преобразованную начальную кривую (31). Согласно (11), $f_i(x, y, z) =$

$$= F_i\left[\left(\frac{\delta(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt}x - \frac{\beta(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} d(t)\,dt}y\right)e^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]\,R'(t)\,dt},\right.$$

$$\left.\left(-\frac{\gamma(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt}x + \frac{\alpha(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} d(t)\,dt}y\right)e^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} D[R(t)]\,R'(t)\,dt},\; R(z)\right]$$

($i = 1, 2$) являются первыми интегралами системы (a). Выразим первые два аргумента этих функций в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\delta(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt}x - \dfrac{\beta(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} d(t)\,dt}y\right)e^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]\,R'(t)\,dt} \\ \left(\dfrac{-\gamma(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt}x + \dfrac{\alpha(z)}{K_0}\,e^{-\int_{z_0}^{z} d(t)\,dt}y\right)e^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} D[R(t)]\,R'(t)\,dt} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} A[R(t)]\,R'(t)\,dt} & 0 \\ 0 & e^{\int_{R(z_0)}^{R(z)} D[R(t)]\,R'(t)\,dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta(z)}{K_0} & \dfrac{-\beta(z)}{K_0} \\ \dfrac{-\gamma(z)}{K_0} & \dfrac{\alpha(z)}{K_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\int_{z_0}^{z} a(t)\,dt} & 0 \\ 0 & e^{-\int_{z_0}^{z} d(t)\,dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$$

Полагая в этом равенстве $x = \varphi_1(\tau)$, $y = \varphi_2(\tau)$, $z = \varphi_3(\tau)$ и используя (30), получаем

$$\begin{pmatrix} e^{\int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} A[R(\varphi_3)]\,R'(\varphi_3)\,d\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} D[R(\varphi_3)]\,R'(\varphi_3)\,d\varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta(\varphi_3)}{K_0} & \dfrac{-\beta(\varphi_3)}{K_0} \\ \dfrac{-\gamma(\varphi_3)}{K_0} & \dfrac{\alpha(\varphi_3)}{K_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} a(\varphi_3)\,d\varphi_3} & 0 \\ 0 & e^{-\int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} d(\varphi_3)\,d\varphi_3} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{\int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} a(\varphi_3)\,d\varphi_3} & 0 \\ 0 & e^{\int_{\varphi_3^0}^{\varphi_3} d(\varphi_3)\,d\varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\varphi_3) & \beta(\varphi_3) \\ \gamma(\varphi_3) & \delta(\varphi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} A[R(\varphi_3)]\,R'(\varphi_3)\,d\varphi_3} & 0 \\ 0 & e^{-\int_{R(\varphi_3^0)}^{R(\varphi_3)} D[R(\varphi_3)]\,R'(\varphi_3)\,d\varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(\Psi_3) \\ \Psi_2(\Psi_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Psi_1(\Psi_3) \\ \Psi_2(\Psi_3) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$f_i(\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \varphi_3(\tau)) = F_3(\Psi_1(\tau),\ \Psi_2(\tau),\ \Psi_3(\tau)) \tag{33}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}&\Psi[f_1(\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \varphi_3(\tau)),\ f_2(\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \varphi_3(\tau))] = \\ &= \Psi[F_1(\Psi_1(\tau),\ \Psi_2(\tau),\ \Psi_3(\tau)),\ F_2(\Psi_1(\tau),\ \Psi_2(\tau),\ \Psi_3(\tau))] = 0,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что из равенств (33) вытекает, что если кривая (26) не является характеристической для системы (A), то кривая (31) не является характеристической для системы (a) и наоборот.

Если одно из равенств (27) таково, что его левая часть после подстановки начальной кривой не зависит от параметра τ, то это равенство определяет искомую интегральную поверхность уравнения (G) и соответствующий преобразований первый интеграл определяет интегральную поверхность уравнения (g), проходящую через преобразованную кривую (31). Таким образом, мы установили, что решение задачи Коши для уравнения (G) и кривой (26) и решение задачи Коши для уравнения (g) и кривой (21) между собой эквивалентны.

Замечание: Очевидно, что все выше изложенное можно перенести на уравнения

$$z_x + (a(x)\, y + b(x)\, z)\, z_y = c(x)\, y + d(x)\, z,$$
$$Z_X + (A(X)\, Y + B(X)\, Z)\, Z_Y = C(X)\, Y + D(X)\, Z,$$

и

$$(a(y)\, x + b(y)\, z)\, z_x + z_y = c(y)\, x + d(y)\, z,$$
$$(A(Y)\, X + B(Y)\, Z)\, Z_X + Z_Y = C(Y)\, X + D(Y)\, Z,$$

так как характеристические системы этих уравнений имеют вид систем (a) и (A).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olumucensis" F. R. N., Tom 9, 1962.

[2] *Трикоми, Ф.:* Лекции по уравнениям в частных производных. Москва, 1957.

SHRNUTÍ

TRANSFORMACE ŘEŠENÍ DVOU PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU

JINDŘICH PALÁT

Tento článek se zabývá vzájemnou transformací obecných řešení kvazilineárních rovnic (g) a (G). Výsledky se ilustrují na příkladě rovnic (15) a (16). V závěru jsou studovány vzájemné transformace řešení Cauchyovy úlohy pro rovnice (g) a (G).