Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Josef Šimek

Konstrukce kuželoseček odvozené z prostorových útvarů

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 59--71

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119859`

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Josef Metelka

KONSTRUKCE KUŽELOSEČEK ODVOZENÉ Z PROSTOROVÝCH ÚTVARŮ

JOSEF ŠIMEK

(Předloženo dne 28. května 1965)

Ve Sborníku Vysoké školy pedagogické v Olomouci, přírodovědná řada, obor matematika, fyzika a chemie, ročník 1958 a 1959, jsem uveřejnil dvě práce, v nichž jsem se zabýval některými konstrukcemi kuželoseček odvozenými ze vztahů prostorových útvarů. Tato práce na ně navazuje a je jejich pokračováním.

V této práci pojednám o dalších takových konstrukcích kuželoseček odvozených z prostorových útvarů, mezi jejichž určovacími prvky je dáno jedno ohnisko F; ostatní 3 určovací prvky jsou body a tečny. Podle toho, v jakém počtu jsou dané body a tečny ve zbývajících třech prvcích, rozdělil jsem tyto úlohy do čtyř typů.

Typ I. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: F, A', B', C'.
Typ II. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: F, a', B', C'.
Typ III. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: F, a', b', C'.
Typ IV. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: F, a', b', c'.

Při řešení úloh všech uvedených typů používám vlastností kuželoseček, vyplývajících z rovinných řezů na rotační kuželové ploše s osou kolmou k průmětně. Přitom se zabývám jen konstrukcemi jednoduchých kuželoseček. Ze zobrazovacích metod deskriptivní geometrie používám kolmého promítání na jednu průmětnu.

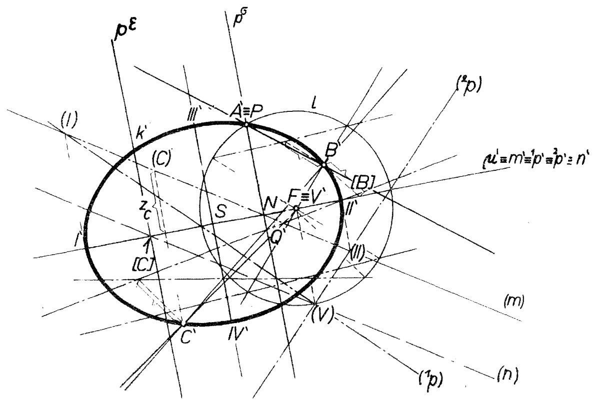
Každá z úloh uvedených čtyř typů je zástupcem skupiny úloh, které se řeší obdobným způsobem. Tyto úlohy uvádím vždy po řešení základní úlohy příslušného typu a jejich řešení ponechávám čtenáři jako cvičení.

Typ 1. Úloha 1a. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, a body A', B', C' (obr. 1).

Řešení. Ohnisko F považujeme za pravoúhlý průmět vrcholu $V(V' \equiv F)$ nějaké rotační kuželové plochy K (dále jen kuželová plocha K) s osou o kolmou k průmětně π, dané body A', B', C' za pravoúhlé průměty bodů A, B, C ležících na této kuželové ploše K. Hledaná kuželosečka k' je pravoúhlý průmět kuželosečky k, v níž protíná rovina $\sigma \equiv (A, B, C)$ kuželovou plochu K.

Opíšeme kružnici l se středem v ohnisku $F \equiv V'$ a s libovolným poloměrem r, např. $r = FA'$. Kružnici l prohlásíme za řídící kružnici kuželové plochy K a rovinu kružnice l, za průmětnu π, v níž leží body F, A', B', C'. Souřadnici z vrcholu V zvolíme rovnou poloměru řídící kružnice l.

Sestrojíme stopu p^{σ} roviny $\sigma \equiv (A, B, C)$; $p^{\sigma} \equiv PQ$, kde $P \equiv A'$ je stopník přímky AB (A leží v π) a Q je stopník přímky BC, který sestrojíme takto: pomocí povrchových přímek kuželové plochy K zjistíme souřadnice z bodů B a C. Sklopíme-li promítací rovinu přímky BC, je ve sklopení $Q \equiv B'C' \,.\, [B]\,[C]$. Přímka PQ je hledaná stopa p^{σ} roviny σ. Nyní proložíme osou o kuželové plochy K rovinu $\mu \perp p^{\sigma}(F \in \mu';\ \mu' \perp p^{\sigma})$. Rovina μ protíná kuželovou



Obr. 1

plochu K ve dvou povrchových přímkách ^1p a ^2p ($^1p' \equiv {}^2p' \equiv \mu'$), rovinu σ ve spádové přímce $m(m' \equiv \mu')$, s níž jsou incidentní hlavní vrcholy I, II kuželosečky k. Rovinu μ se spádovou přímkou m a s oběma povrchovými přímkami ^1p a ^2p sklopíme kolem její stopy do průmětny π; ve sklopení je $(m) \equiv N(C)$, $(m)\,.\,(^1p) \equiv (I)$, $(m)\,.\,(^2p) \equiv (II)$; $(I)\,I' \perp m'$ a $(II)\,II' \perp m'$. Body I' a II' jsou vrcholy hlavní osy kuželosečky k'. Abychom vyšetřili druh kuželosečky k', uvažme vrcholovou rovinu $\varepsilon \parallel \sigma$. Rovina μ ji protíná ve spádové přímce $n \parallel m$ a incidentní s vrcholem $V(n' \equiv \mu')$. Ve sklopení roviny μ je $(V) \in (n)$ a $(n) \parallel (m)$, stopa $p^{\varepsilon} \parallel p^{\sigma}$ je incidentní se stopníkem $1 \equiv n' \,.\, (n)$. Je vidět, že vrcholová rovina $\varepsilon \parallel \sigma$ má s kuželovou plochou K společný jen vrchol V. Protíná tedy rovina σ kuželovou plochu K v elipse k, jejíž pravoúhlý průmět je elipsa k'. Ohniskem F, hlavní osou $I'II'$ je tato elipsa k' dostatečně určena.

Kuželosečka k' jako výsledek provedené konstrukce nezávisí na volbě souřadnice z vrcholu V kuželové plochy K. Zvolíme-li totiž jinou kuželovou plochu ^1K s vrcholem ^1V o souřadnici ^1z, změní se souřadnice z všech bodů ležících na kuželové ploše K včetně bodů A, B, C a tedy také všech bodů roviny $\sigma \equiv (A, B, C)$ v poměru $\frac{z}{^1z}$. To znamená, že kuželosečky $k \equiv K \,.\, \sigma$ a $^1k \equiv {}^1K \,.\, \sigma$

leží na téže promítací válcové ploše a mají tudíž týž pravoúhlý průmět, tj. $k' \equiv {}^1k'$. Výsledek konstrukce nezávisí ani na volbě poloměru r řídící kružnice l, neboť za řídící kružnici kuželové plochy K můžeme volit každou její povrchovou kružnici. Různou volbou řídící kružnice při konstantní poloze vrcholu V vlastně posunujeme průmětnou ve směru k ní kolmém.

Třemi různými body A, B, C na kuželové ploše K, jejichž průměty A', B', C' nemohou ležet v jedné přímce, je určena jednoznačně rovina σ, která protíná kuželovou plochu K v kuželosečce k, jejímž pravoúhlým průmětem je kuželosečka k', téhož druhu s ohniskem v bodě $F \equiv V'$ a procházející body A', B', C'.

Každý bod na kuželové ploše K je svým pravoúhlým průmětem určen dvojznačně (vyjímajíc vrchol V), např. pravoúhlému průmětu A' přísluší na kuželové ploše K dva body A a ${}^1A$ souměrně položené podle vrcholové roviny φ kuželové plochy K, rovnoběžné s průmětnou π. Je tedy průměty A', B', C' určeno v prostoru celkem 8 rovin σ, z nichž jsou vždy dvě souměrné položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K, např. roviny $\sigma \equiv (A, B, C)$ a ${}^1\sigma \equiv ({}^1A, {}^1B, {}^1C)$. Proto pravoúhlým průmětem průseků k a ${}^1k$ těchto dvou rovin σ a ${}^1\sigma$ s kuželovou plochou K je jediná kuželosečka $k' \equiv {}^1k'$, jež je jedním řešením úlohy. Úloha má tedy celkem 4 řešení.

Kuželosečka k a tedy i hledaná kuželosečka k', jakožto její pravoúhlý průmět, může být elipsa (v našem případě), parabola nebo hyperbola, podle toho, je-li odchylka průsečné roviny σ od průmětny π menší, rovna nebo větší než odchylka povrchových přímek kuželové plochy K od průmětny π. Tyto tři případy se projeví polohou stopy p^ε vrcholové roviny ε kuželové plochy K (obr. 1), jejíž sklopená spádová přímka n incidentní s vrcholem V kuželové plochy K je označena (n) $[(n) \,.\, n' \equiv 1,\ 1 \in p^\varepsilon,\ p^\varepsilon \parallel p^\sigma]$.

Jsou-li dva z bodů A', B', C' body úběžnými, dostáváme úlohu, která se řeší obdobným způsobem jako předcházející úloha.

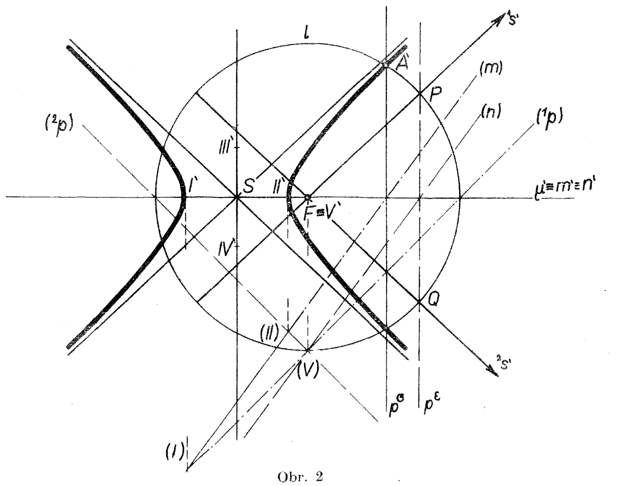
Úloha 1b. Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, bod A' a směry asymptot ${}^1s'$, ${}^2s'$ (obr. 2).

Řešení. Ohnisko F považujeme opět za pravoúhlý průmět vrcholu V kuželové plochy K s osou o kolmou k průmětně π, bod A' za pravoúhlý průmět bodu A ležícího na kuželové ploše K a směry asymptot ${}^1s'$, ${}^2s'$, procházející ohniskem F (to lze vždy zařídit), pokládáme za pravoúhlé průměty povrchových přímek ${}^1s$ a ${}^2s$ kuželové plochy K. Hledaná hyperbola k' je pravoúhlý průmět hyperboly k, v níž seče kuželovou plochu K rovina σ, procházející bodem A a rovnoběžná s rovinou vrcholovou $\varepsilon \equiv ({}^1s \,.\, {}^2s)$.

Kuželovou plochu K určíme řídící kružnicí l, opsanou ze středu $F \equiv V'$ poloměrem $r = FA'$; její poloměr zvolíme za souřadnici z vrcholu V, její rovinu za průmětnu π.

Je-li $p^\varepsilon \equiv PQ$ stopa vrcholové roviny $\varepsilon \equiv ({}^1s \,.\, {}^2s)$ kuželové plochy K, kde P je stopník povrchové přímky ${}^1s$, bod Q stopník povrchové přímky ${}^2s$ kuželové plochy K, pak stopa p^σ roviny $\sigma \parallel \varepsilon$ prochází bodem A' (A leží v π) a je rovnoběžná s p^ε. Nyní osou o kuželové plochy K proložíme rovinu $\mu \perp p^\sigma (F \in \mu',$ $\mu' \perp p^\sigma)$ a dále pokračujeme jako v předcházející úloze. Hledaná hyperbola k' je určena hlavní osou $I'II'$, ohniskem F a směry asymptot ${}^1s'$, ${}^2s'$; tím je dostatečně určena.

Každá z přímek ${}^1s'$ a ${}^2s'$ je průmětem dvou povrchových přímek kuželové plochy K, jimiž jsou určeny čtyři vrcholové roviny ε. Bod A' je průmětem dvou bodů A, ${}^1A$ na kuželové ploše K. Každým z bodů A, ${}^1A$, které nejsou incidentní se žádnou z daných povrchových přímek ${}^1s$, ${}^2s$ kuželové plochy K, lze vésti čtyři roviny $\sigma \parallel \varepsilon$, tedy celkem osm rovin σ. Z těchto rovin jsou vždy dvě souměrně položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K, pravoúhlé průměty jejich hyperbolických řezů s kuželovou plochou K splývají a úloha má 4 řešení.



Obr. 2

Obdobným způsobem se řeší úloha:

a) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, body A', B' a směr jedné asymptoty ${}^1s'$.

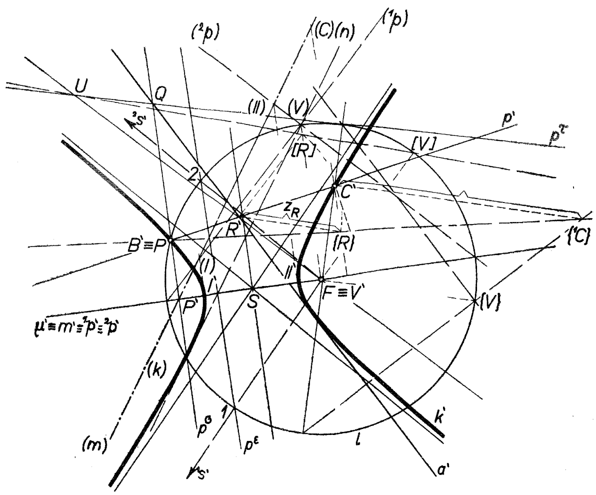
Typ II. Úloha 2a. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, tečna a', body B', C' (obr. 3).

Řešení. Ohnisko F pokládáme opět za pravoúhlý průmět vrcholu V kuželové plochy K s osou o kolmou k průmětně, tečnu a' za pravoúhlý průmět jisté tečny a kuželové plochy K, přímku $B'C'$ za pravoúhlý průmět sečny BC kuželové plochy K. Hledaná kuželosečka k' je pravoúhlý průmět kuželosečky k, v níž seče rovina $\sigma = (a \,.\, BC)$ kuželovou plochu K.

Kolem ohniska $F \equiv V'$ opíšeme kružnici l, např. poloměrem $r = FB'$. Kružnici l považujeme za řídící kružnici kuželové plochy K, její poloměr zvolíme za souřadnici z vrcholu V kuželové plochy K, její rovinu za průmětnu π.

Sestrojíme stopu p^σ roviny $\sigma \equiv (a \,.\, BC)$; $p^\sigma \equiv PQ$, kde $P \equiv B'$ je stopník přímky BC (B leží v π) a bod Q je stopník tečny a', který určíme takto: sestrojíme stopu p^τ tečné roviny $\tau \equiv (a, V)$ kuželové plochy K; stopa p^τ je tečnou kružnice l incidentní se stopníkem U přímky VR ($R \equiv a \,.\, BC$; $z_R = R'\{R\}$ určíme sklopením promítací roviny přímky BC; $V'R' \,.\, [V]\,[R] \equiv U$); $p^\tau \,.\, a' = Q$.

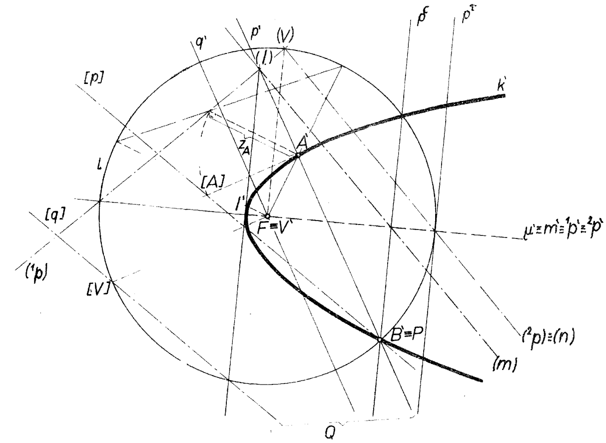
Nyní proložíme osou o kuželové plochy K rovinu $\mu \perp p^\sigma$; tato rovina seče rovinu σ ve spádové přímce $m(m' \equiv \mu')$, kuželovou plochu K ve dvou povrchových přímkách ${}^1p$, ${}^2p$ (${}^1p' \equiv {}^2p' \equiv \mu'$). Rovinu μ se spádovou přímkou m a s oběma povrchovými přímkami ${}^1p$ a ${}^2p$ sklopíme kolem její stopy do π [$(m) \equiv P'(C)$, kde $(C) \dashv \mu' = C'\{{}^1C\} = z_C$; $(m) \,.\, ({}^1p) \equiv (I)$, $(m) \,.\, ({}^2p) \equiv (II)$; $(I)\,I' \perp m'$, $(II)\,II' \perp m'$]; I' a II' jsou vrcholy hlavní osy kuželosečky k'. Sestrojíme-li ve sklopení $(n) \parallel (m)$ bodem (V), pak je zřejmé, že vrcholová rovina $\varepsilon \parallel \sigma$ protíná kuželovou plochu K ve dvou povrchových přímkách ${}^1s$, ${}^2s$. Proto rovina $\sigma \parallel \varepsilon$ protíná kuželovou plochu K v hyperbole k, jejíž pravoúhlý průmět je hledaná hyperbola k'. Ohniskem F, hlavní osou $I'II'$ a směry asymptot ${}^1s'$, ${}^2s'$ ($p^\varepsilon \,.\, l = 1, 2$; $1V' \equiv {}^1s'$, $2V' \equiv {}^2s'$) je hyperbola k' určena.



Obr. 3

Přímka $B'C'$ je pravoúhlým průmětem čtyř sečen kuželové plochy K, a to BC, ${}^1B{}^1C$, ${}^1BC$ a $B{}^1C$, přímka a' je pravoúhlým průmětem dvou tečen a, ${}^1a$ kuželové plochy K. Každá ze dvou tečen a, ${}^1a$ protíná předcházející čtyři sečny ve čtyřech bodech R, jejichž pravoúhlým průmětem je bod $R' \equiv a' \,.\, B'C'$.

Dostáváme celkem 8 rovin σ, z nichž vždy dvě jsou souměrně položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K. Řezy k a ${}^1k$ těchto dvou rovin s kuželovou plochou K mají týž pravoúhlý průmět, tj. $k' \equiv {}^1k'$. Úloha má tedy 4 řešení, přičemž výsledná kuželosečka může být opět elipsa, hyperbola (v našem případě) nebo parabola, z týchž důvodů jako v úloze 1a.



Obr. 4

Je-li tečna a' přímkou úběžnou, pak dostáváme další úlohu typu II, kterou si také rozřešíme.

Úloha 2b. Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F a body A', B' (obr. 4).

Řešení. Užijeme opět kuželové plochy K; ohnisko F považujeme za pravoúhlý průmět vrcholu V této kuželové plochy K s osou o kolmou k průmětně, přímku $A'B' \equiv p'$ za pravoúhlý průmět sečny $p = AB$ kuželové plochy K. Hledaná parabola k', je pravoúhlým průmětem paraboly k, v níž kuželovou plochu K seče rovina σ, procházející přímkou $p = AB$ a rovnoběžná s jednou povrchovou přímkou kuželové plochy K.

Opíšeme kružnici l se středem v $F \equiv V'$ poloměrem, např. FB'; kružnici l zvolíme za řídící kružnici, její poloměr za souřadnici z vrcholu V kuželové plochy K; rovinu kružnice l zvolíme zase za průmětnu π.

Sestrojíme stopu p^σ roviny σ, procházející přímkou $p \equiv AB$ a protínající kuželovou plochu K v parabole. Stopa p^σ prochází bodem $P \equiv B'$ (B leží v π) a je rovnoběžná se stopou p^τ tečné roviny τ kuželové plochy K, rovnoběžné s přímkou $p \equiv AB$. Stopu p^τ tečné roviny τ sestrojíme takto: vrcholem V kuželové plochy K vedeme přímku $q \parallel p \equiv AB$ ($V' \in q'$, $q' \parallel p'$) a vyšetříme její stopník Q; sklopíme promítací roviny přímek $p \equiv AB$, q a ve sklopení sestrojíme $[V] \in [q]$, $[q] \parallel [p]$; potom je $q' \cdot [q] \equiv Q$. Tečna z bodu Q ke kružnici l je stopa p^τ. Stopa p^σ roviny σ prochází bodem $P \equiv B'$ a je rovnoběžná s p^τ.

Nyní sestrojíme osou o kuželové plochy K rovinu $\mu \perp p^\sigma (F \in \mu', \mu' \perp p^\sigma)$ a dále pokračujeme stejně jako v předchozích úlohách.

Přímka $p' \equiv A'B'$ je sice pravoúhlým průmětem čtyř přímek, a to AB, ${}^1A{}^1B$, $A{}^1B$, ${}^1AB$, ale jen každou z přímek AB a ${}^1A{}^1B$ lze proložit dvě roviny σ, které protínají kuželovou plochu K v parabole (přímkami $A{}^1B$ a ${}^1AB$ nelze proložit roviny, které by protínaly kuželovou plochu K v parabole, protože body průsečné paraboly nemohou ležet na obou částech kuželové plochy K, ve které ji rozděluje vrchol V). Z těchto 4 rovin jsou vždy dvě souměrně položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K; průseky v těchto dvou rovinách ležící mají týž pravoúhlý průmět. Úloha má dvě řešení.

Obdobným způsobem se řeší i další úlohy tohoto typu:

a) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, tečna a', bod B' a směr jedné asymptoty ${}^1s'$.

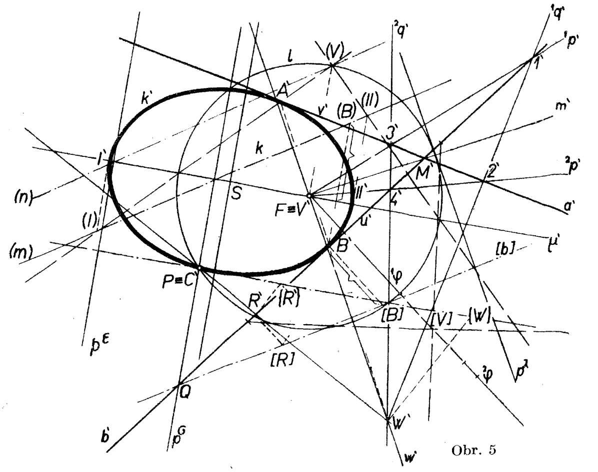
b) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, tečna a' směry asymptot ${}^1s'$ a ${}^2s'$.

c) Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, tečna a' s bodem dotyku A' a bod B'.

d) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, tečna a' s bodem dotyku A' a směr jedné asymptoty ${}^1s'$.

e) Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F, bod A' a směr osy s.

Typ III. Úloha 3. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, tečny a', b', bod C' (obr. 5).



Obr. 5

Řešení. Ohnisko $F \equiv V'$ pokládáme opět za pravoúhlý průmět vrcholu V kuželové plochy K s osou o kolmou k průmětně, různoběžné tečny a', b' za pravoúhlé průměty jistých dvou různoběžných tečen a, b kuželové plochy K, bod C' za pravoúhlý průmět bodu C, ležícího na kuželové ploše K i v rovině tečen a, b. Hledaná kuželosečka k' je pravoúhlým průmětem kuželosečky k, v níž rovina $\sigma \equiv (a \,.\, b,\ C)$ seče kuželovou plochu K.

Kuželovou plochu K určíme např. řídící kružnicí l se středem $F \equiv V'$ a poloměrem FC'; její poloměr zvolíme opět za souřadnici z vrcholu V, její rovinu za průmětnu π.

Vyšetříme stopu p^σ roviny $\sigma \equiv (a \,.\, b,\ C)$. Stopa $p^\sigma \equiv PQ$, kde $P \equiv C'$ (C leží v π) a stopník Q např. tečny b sestrojíme takto: promítací roviny tečen a, b protínají kuželovou plochu K v hyperbolách u, v, které leží ještě na druhé kvadratické kuželové ploše L, jejíž vrchol W leží na průsečnici w tečné roviny λ kuželové plochy K ve společném bodě M obou hyperbol u, v, s vrcholovou rovinou $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K($V' \in w'$, $w' \parallel p^\lambda$). Libovolná rovina ϱ proložená přímkou w seče kuželovou plochu K ve dvou povrchových přímkách ${}^1p$, ${}^2p$ (${}^1p'$, ${}^2p'$ jsou souměrné podle přímky $m' \equiv V'M'$), hyperbolu u v bodech 1, 4, hyperbolu v v bodech 2, 3 ($1' \equiv {}^1p' \,.\, u'$, $4' \equiv {}^2p' \,.\, u'$; $2' \equiv {}^2p' \,.\, v'$, $3' \equiv {}^1p' \,.\, v'$). Rovina ϱ protíná také druhou kuželovou plochu L ve dvou povrchových přímkách ${}^1q \equiv 12$, ${}^2q \equiv 34$ (${}^1q' \equiv 1'2'$, ${}^2q' \equiv 3'4'$), které procházejí vrcholem W na přímce w(${}^1q' \,.\, {}^2q' \,.\, w' \equiv W'$). Tečná rovina sestrojená bodem C ke kuželové ploše L je hledanou rovinou řezu σ; $W'C' \,.\, b' = R'$, určíme $z_R = R'\{R\}$. Nyní sklopíme promítací rovinu tečny b a ve sklopení sestrojíme z bodu $[R]$ tečnu $[b]$ k hyperbole $[u]$ (známe pro ni střed $[V]$, asymptoty, hlavní osu a ohniska ${}^1\varphi$, ${}^2\varphi$); potom $b' \,.\, [b] \equiv Q$ je stopník tečny b, PQ je stopa p^σ roviny σ. Označíme-li $[B]$ dotykový bod tečny $[b]$ s hyperbolou $[u]$, je pata kolmice spuštěné z $[B]$ na b' bod dotyku B' tečny b' s kuželosečkou k'; přímka $W'B'$ vytíná na tečně a' dotykový bod A'. Nyní sestrojíme osou o kuželové plochy K opět rovinu $\mu \perp p^\sigma$ a pokračujeme stejně jako v úloze 1a.

Bod C' je průmětem dvou bodů C a ${}^1C$ na kuželové ploše K; z každého z nich lze vésti dvě tečné roviny ke kuželové ploše L. Z těchto čtyř rovin jsou vždy dvě souměrně položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K; průseky ležící v těchto dvou rovinách mají týž pravoúhlý průmět. Úloha má dvě řešení. Výsledná kuželosečka může být elipsa (v našem případě), hyperbola nebo parabola.

Obdobně se řeší další úlohy tohoto typu:

a) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, tečny a', b' směr jedné asymptoty ${}^1s'$.

b) Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F, tečna a', bod C'.

c) Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, tečna a' s bodem dotyku A', další tečna b'.

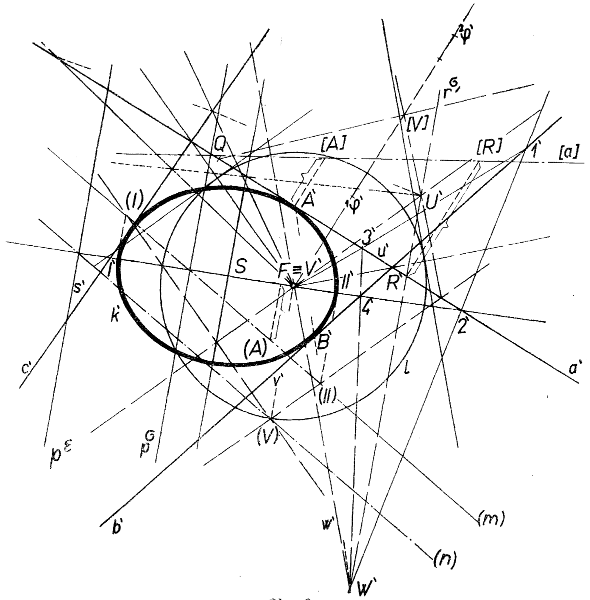
d) Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F, tečna a' s bodem dotyku A'.

e) Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F, tečna a', směr osy s.

Typ IV. Úloha 4. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, tečny a', b', c' (obr. 6).

Řešení. Zvolíme opět kuželovou plochu K s osou o kolmou k průmětně, jejíž pravoúhlý průmět vrcholu V je v ohnisku F. Přímky a', b', c' považujeme za pravoúhlé průměty jistých tří tečen a, b, c kuželové plochy K, ležících v téže rovině σ. Hledaná kuželosečka k' je pravoúhlý průmět kuželosečky k, v níž rovina σ seče kuželovou plochu K.

Za řídící kružnici l kuželové plochy K zvolíme kružnici se středem $F \equiv V'$ o libovolném poloměru r, její rovinu zvolíme za průmětnu π a její poloměr r za souřadnici z vrcholu V.



Obr. 6

Stopu p^σ rovina σ, v níž leží tečny a, b, c sestrojíme takto: promítací roviny tečen a, b, c protínají kuželovou plochu K v hyperbolách u, v, s, z nichž, např. hyperboly u, v leží ještě na druhé kvadratické kuželové ploše L s vrcholem W, hyperboly u, s na kvadratické kuželové ploše M, s vrcholem U. Vrcholy W a U kuželových ploch L a M, ležící ve vrcholové rovině $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K, sestrojíme stejným způsobem jako v předcházející úloze. Společná tečná rovina obou kuželových ploch L a M (mají společnou kuželosečku u) je hledaná rovina řezu σ; její stopa na vrcholové rovině $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K je $r^\sigma \equiv UW$, neboť vrcholy W a U leží ve vrcholové rovině $\varphi (r^{\sigma\prime} \equiv U'W')$. Sestrojíme nyní např. stopník Q tečny a stejným způsobem jako v předcházející úloze. Stopa p^σ roviny řezu σ na průmětně π je incidentní se stopníkem Q a je rovnoběžná s $r^{\sigma\prime}$. Dále pokračujeme jako v předchozích úlohách.

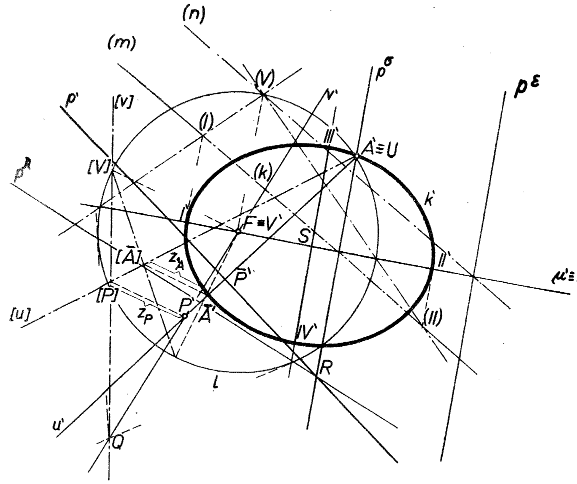
Kuželové plochy L a M o společné hyperbole u mají dvě společné tečné roviny σ, souměrně položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K; obě roviny protínají kuželovou plochu K v kuželosečkách k a ${}^1k$, které mají týž pravoúhlý průmět k'. Úloha má jediné řešení. Výsledná kuželosečka k' může být zase elipsa (v našem případě), hyperbola nebo parabola.

Obdobným způsobem se řeší i tato úloha:

a) Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F a tečny a', b'.

Touto metodou lze řešit ještě některé další úlohy o kuželosečkách (mimo již uvedené 4 typy), v jejichž určovacích prvcích jsou dány mimo ohnisko F, bod (nebo tečnu), např. pól s příslušnou polárou. Rozřešme si dvě takové úlohy.

Úloha 5. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, bod A', pól P' s polárou p' (obr. 7).



Obr. 7

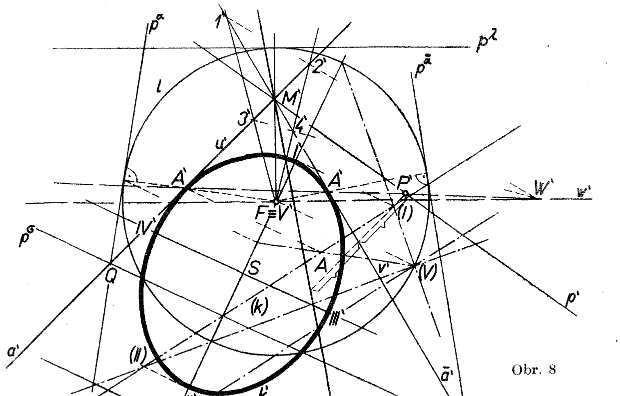
Řešení. Opíšeme kružnici l se středem v ohnisku F poloměrem např. $r = FA'$; kružnici l pokládáme za řídící kružnici kuželové plochy K s osou kolmou k průmětně, její poloměr r zvolíme za souřadnici z vrcholu $V(V' \equiv F)$ a její rovinu za průmětnu π. Daný bod A' považujeme za kolmý průmět bodu A

kuželové plochy K, přímku $u' \equiv A'P'$ za kolmý průmět jisté sečny $u \equiv AP$ kuželové plochy K, přímku p' za kolmý průmět jisté přímky p, ležící v polární rovině λ bodu P vzhledem ke kuželové ploše K. Hledaná kuželosečka k' je pravoúhlým průmětem kuželosečky k, v níž rovina $\sigma \equiv (p \,.\, AP)$ seče kuželovou plochu K.

Sestrojíme stopu p^σ roviny $\sigma \equiv (p \,.\, AP)$; $p^\sigma \equiv UR$, kde $U \equiv A'$ je stopník přímky $u \equiv AP$ a R je stopník přímky p, který určíme takto: vyšetříme nejdříve druhý průsečík $\bar{A}$ přímky $u \equiv AP$ s kuželovou plochou K; jeho kolmý průmět $\bar{A}'$ určíme pomocí vztahu $(P'\bar{P}'A'\bar{A}') = -1$. Sestrojíme-li nyní stopu p^λ polární roviny λ bodu P vzhledem ke kuželové ploše K (p^λ je polára stopníku Q přímky $v \equiv PV$ vzhledem ke kružnici l), pak v průsečíku přímky p' se stopou p^λ je stopník R přímky p; $p^\sigma \equiv UR$. Dále pokračujeme jako v předcházejících úlohách.

Přímka $u' \equiv A'\bar{A}'$ je pravoúhlým průmětem čtyř sečen kuželové plochy K, bod $P' \in A'\bar{A}'$ je pravoúhlým průmětem čtyř bodů P (bod P neleží ve vrcholové rovině $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K), přímka $v' \equiv V'P'$ je pravoúhlým průmětem čtyř přímek $v \equiv VP$, z nichž každá má stopník Q (Q' leží vždy na $v' \equiv V'P'$); ke každému z nich přísluší polára p^λ vzhledem ke kružnici l. Tyto čtyři poláry protínají p' ve čtyřech bodech R, které spojeny se stopníkem U dávají čtyři stopy $p^\sigma \equiv UR$. Úloha má 4 řešení; výsledná kuželosečka k' může být zase elipsa (v našem případě), parabola nebo hyperbola.

Úloha 6. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno ohnisko F, tečna a', pól P' s polárou p' (obr. 8).



Obr. 8

Řešení. Opíšeme kružnici l libovolným poloměrem se středem v ohnisku $F \equiv V'$; kružnici l považujeme opět za řídící kružnici kuželové plochy K s osou o kolmou k průmětně; poloměr kružnice l zvolíme za souřadnici z vrcholu V, její rovinu za průmětnu π. Danou přímku a' pokládáme za kolmý průmět jisté tečny a kuželové plochy K, bod P' za kolmý průmět nějakého bodu P a přímku p' za kolmý průmět nějaké přímky p, ležící v polární rovině λ bodu P vzhledem ke kuželové ploše K. Hledaná kuželosečka k' je pravoúhlým průmětem kuželosečky k, v níž rovina $\sigma \equiv (a \,.\, p;\, P)$ protíná kuželovou plochu K.

Sestrojíme stopu p^σ roviny $\sigma \equiv (a \,.\, p;\, P)$; $p^\sigma \equiv QR$, kde Q je stopník přímky a, R je stopník přímky $\bar{a}$, jejíž obraz $\bar{a}'$ sestrojíme pomocí vztahu $(p'\overline{p}'a'\bar{a}') = -1$. Oba stopníky Q, R určíme takto: promítací roviny tečen a, $\bar{a}$ protínají kuželovou plochu K v hyperbolách u, v, které leží ještě na druhé kuželové ploše L s vrcholem W(W' sestrojíme jako v úloze 3). Rovina řezu σ je tečnou rovinou kuželové plochy L podél povrchové přímky PW, jejíž průmět $P'W'$ protíná a', $\bar{a}'$ v dotykových bodech A', $\bar{A}'$. Stopy p^α, $p^{\bar{\alpha}}$ tečných rovin α, $\overline{\alpha}$ kuželové plochy K podél povrchových přímek AV, $\bar{A}V$ protínají a' $\bar{a}'$ v hledaných stopnících Q a R. Dále již pokračujeme jako v předcházející úloze.

Úloha má jediné řešení, neboť přímka $W'P'$ je průmětem dvou povrchových přímek WP a W^1P kuželové plochy L; podél nich se dotýkají kuželové plochy L dvě roviny σ, ${}^1\sigma$ souměrně položené podle vrcholové roviny $\varphi \parallel \pi$ kuželové plochy K. Obě tyto roviny σ a ${}^1\sigma$ protínají kuželovou plochu K v kuželosečkách k a ${}^1k$, které mají týž pravoúhlý průmět, tj. $k' \equiv {}^1k'$.

Obdobně se řeší také tyto úlohy:

a) Sestrojte hyperbolu, je-li dáno ohnisko F, směr jedné asymptoty ${}^1s'$, pól P' s polárou p'.

b) Sestrojte parabolu, je-li dáno ohnisko F, pól P' s polárou p'.

Na závěr poznamenávám, že konstrukce kuželoseček z daných prvků byly již mnohokrát řešeny užitím různých geometrických zobrazení, jako afinitou, kolineací apod., zvláště pak užitím projektivní geometrie. Konstrukce kuželoseček z daných prvků řešené metodou projektivní geometrie jsou často složité a dosti náročné, vyžadují hlubších znalostí této disciplíny a mnohdy i značných zkušeností v práci s imaginárními elementy.

Naproti tomu konstrukce kuželoseček z daných prvků řešené metodou odvozenou z prostorových útvarů jsou velmi názorné, někdy i zcela jednoduché a vyžadují jen základní znalosti z deskriptivní geometrie. V deskriptivní geometrii (v užším pojetí) vycházíme zpravidla od prostorových útvarů a snažíme se setrojit jejich obrazy v rovině. Při řešení uvedených úloh o kuželosečkách chápeme naopak dané určovací prvky jako průměty, tj. rovinné útvary, a hledíme k nim přiřadit příslušné prvky v prostoru. Jsou tedy všechny uvedené úlohy o konstrukcích kuželoseček z daných prvků, řešené touto metodou, pěkným příkladem „opačné cesty“, velmi málo užívané v deskriptivní geometrii, tj. cesty „od průmětu k útvaru v prostoru“. Mimoto všechny uvedené úlohy o kuželosečkách velmi značně přispívají k pěstování prostorové představivosti v deskriptivní geometrii.

LITERATURA

[1] *Holubář, C.:* O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů, Cesta k vědění, svazek 47.
[2] *Kadeřávek, F.—Klíma, J.—Kounovský, J.:* Deskriptivní geometie, I. díl.
[3] *Kounovský, J.—Vyčichlo, F.:* Deskriptivní geometrie.

ZUSAMMENFASSUNG

VON RAUMGEBILDEN ABGELEITETE KONSTRUKTIONEN DER KEGELSCHNITTE

JOSEF ŠIMEK

Einige Aufgaben über die Konstruktion der Kegelschnitte, die durch einen Brennpunkt F und durch einige Punkte und Tangenten gegeben sind, lassen sich auch durch einfache, von Raumgebilden abgeleitete Konstruktionen lösen. Diese Konstruktionen gründen sich auf folgenden Gedanken: Den Brennpunkt F fassen wir als die senkrechte Projektion der Spitze V einer gewissen Rotationskegelfläche K mit einer zur Projektionsebene senkrechten Achse auf, die gegebenen Punkte als senkrechte Projektionen der Punkte der Kegelfläche K und die gegebenen Tangenten als senkrechte Projektionen gewisser Tangenten der Kegelfläche K. Der gesuchte Kegelschnitt k' ist die Orthogonalprojektion des Kegelschnittes k, in dem die durch Punkte und Tangenten der Kegelfläche K bestimmte Ebene σ unsere Rotationskegelfläche K schneidet.

Bei diesen Konstruktionen wird von verschiedenen Abbildungsmethoden die Orthogonalprojektion auf eine Ebene verwendet und einige Eigenschaften der Kegelschnitte, die aus Ebeneschnitten der Rotationskegelfläche folgen, ausgenützt.

Durch dieses Verfahren werden vier Type der Konstruktionsaufgaben der Kegelschnitte gelöst, und zwar:

Zeichne einen Kegelschnitt aus a) F, A', B', C'; b) F, a', B', C'; c) F, a', b', C'; d) F, a', b', c' (der Brennpunkt wird durch F, die Punkte des Kegelschnittes werden durch grosse und die Tangenten durch kleine Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet).

Zum Schluss werden mit dieser Methode noch zwei Aufgaben über die Konstruktion der Kegelschnitte gelöst, welche ausser durch den Brennpunkt F durch einen Punkt (oder eine Tangente) noch durch den Pol P und die Polare p bestimmt sind.