Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Pavel Chmela

Formulace zákona lomu na rozhraní jednoosých krystalů

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 129--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119840

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKYANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra teoretické fyziky a astronomie
Vedoucí katedry: prof. RNDr. et DSc. Bedřich Havelka

FORMULACE ZÁKONA LOMU NA ROZHRANÍ JEDNOOSÝCH KRYSTALŮ

PAVEL CHMELA

(Došlo dne 13. dubna 1965)

Úvod

Při průchodu světla prostředím jednoosého krystalu, které je speciálním případem obecného anisotropního prostředí, dělí se procházející paprsek na paprsek řádný a paprsek mimořádný. Oba paprsky jsou polarizovány v rovinách vzájeně kolmých a to tak, že rovina kmitosměru mimořádného paprsku je určena optickou osou krystalu a směrem šíření.

Řádný paprsek se šíří ve všech směrech stejnou rychlostí v_0 a elementární vlnoplochou šíření v *Huygensově* principu je zde koule. Pro řádný paprsek platí tedy *Snellův* zákon, při čemž index lomu $n_0 = \dfrac{c}{v_0}$.

Mnohem složitější je případ paprsku mimořádného. Ve směru optické osy krystalu šíří se mimořádný paprsek stejnou rychlostí, jako paprsek řádný, tj. v_0, ve směru kolmém k optické ose je rychlost šíření v_e. Elementární vlnoplochou šíření je rotační elipsoid, jehož poloosy tvoří rychlosti v_0 a v_e. Volíme-li pravoúhlou souřadnou soustavu x', y', z', tak, že směr osy z' je totožný s optickou osou krystalu, lze psát rovnici rotačního elipsoidu ve tvaru

$$\frac{x'^2}{v_e^2} + \frac{y'^2}{v_e^2} + \frac{z'^2}{v_0^2} = 1. \tag{1}$$

Uvažujeme-li šíření rovinné vlnoplochy v krystalu, není normálový směr šíření totožný se směrem šíření energie, ale oba směry svírají spolu určitý úhel γ, který je funkcí směru šíření.

Často bývá definována tzv. normálová rychlost v_n a rychlost šíření energie v. Je zřejmé, že mezi oběma rychlostmi platí vztah

$$v_n = v \cos \gamma, \tag{2a}$$

a nebo definujeme-li příslušné indexy lomu $n_n = \dfrac{c}{v_n}$ a $n = \dfrac{c}{v}$

$$n = n_n \cos \gamma. \tag{2b}$$

Normálový směr šíření mimořádného paprsku bývá v krystalooptice často považován za základní (podrobný výpočet provádí *Szivessy* [1], str. 698). Vycházíme-li z tohoto směru, lze analyticky vyjádřit například dráhový rozdíl při průchodu světla optickými kompenzátory. Toto vyjádření vždy předpokládá, že kompenzátor je postaven kolmo k optické ose soustavy a nebo velmi málo nakloněn.

Při tomto vyjádření se vychází ze vztahu pro normálovou rychlost

$$v_n^2 = v_0^2 \cos^2 \vartheta' + v_e^2 \sin^2 \vartheta', \tag{3}$$

kde ϑ' je odchylka normálového směru šíření od optické osy krystalu, a dále z platnosti *Snellova* zákona pro normálový směr šíření

$$n_n \sin \varepsilon'_{en} = \sin \varepsilon, \tag{4}$$

kde jsme označili ε úhel dopadu a ε'_{en} úhel lomu, odpovídající normálovému směru šíření mimořádného paprsku.

Pomocí vztahů ze sférické trigonometrie (viz, *Francon* [2]), je možno dospět ke vztahu

$$n_n \cos \varepsilon'_{en} = \frac{(n_0^2 - n_e^2) \sin 2\psi \cos \vartheta \sin \varepsilon}{2g^2 n_e^2 n_0^2} + \frac{1}{g} \sqrt{1 - \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varepsilon - \frac{1}{g^2 n_e^2 n_0^2} \cos^2 \vartheta \sin^2 \varepsilon}, \tag{5}$$

kde

$$g^2 = \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \psi + \frac{1}{n_0^2} \cos^2 \psi.$$

ψ je úhel výbrusu a ϑ azimut roviny dopadu vzhledem k rovině hlavního řezu.

Vztah (5) je velmi důležitý například při výpočtu dráhových rozdílů na dvojlomných planparalelních destičkách, postavených kolmo k optické ose soustavy.

V některých případech však nelze vystačit s vlastnostmi normálového směru. Například jedná-li se o dvojlomné členy, na které dopadá světlo pod značnými úhly dopadu, při výpočtu zdvojení mezi paprskem řádným a mimořádným nebo při přesném studiu totální reflexe.

Proto se ukazuje velmi užitečné analyticky formulovat zákon lomu pro mimořádný paprsek na rozhraní jednoosých krystalů.

Formulace zákona lomu

Při formulaci zákona lomu pro mimořádný paprsek na rozhraní jednoosých krystalů vyjdeme z *Huygensova* principu. Pro výpočet budeme uvažovat lom rovinné vlnoplochy na rovinném rozhraní.

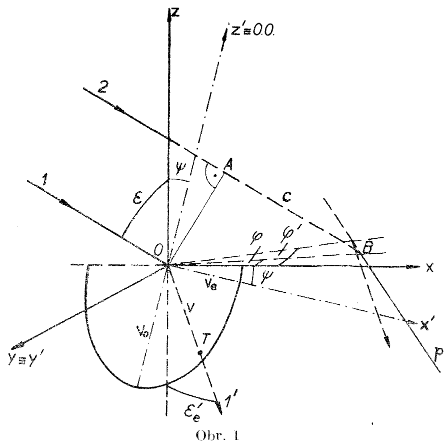
Nejprve je třeba určit velikost rychlosti v v libovolném směru šíření energie. Tato je dána velikostí průvodiče na rotačním elipsoidu (1). Označíme-li Φ odchylku směru šíření energie od optické osy krystalu, obdržíme pro rychlost v vztah

$$v^2 = \frac{1}{\frac{1}{v_e^2} \sin^2 \Phi + \frac{1}{v_0^2} \cos^2 \Phi}. \tag{6}$$

Pro výpočet budeme volit novou soustavu x, y, z tak, že rovina x, y je totožná s rovinou výbrusu a osa z tvoří normálu na výburs. Optická osa krystalu nechť leží v rovině x, z. Tato soustava vznikla vlastně otočením původní soustavy x', y', z', ve které rovnice rotačního elipsoidu měla tvar (1) o úhel ψ kolem osy y' (viz obr. 1), takže mezi oběma soustavami platí transformační vztahy

$$x' = x \cos \psi - z \sin \psi$$
$$y' = y$$
$$z' = x \sin \psi + z \cos \psi. \tag{7}$$

Nechť rovina dopadu svírá s osou x azimut φ. V rovině dopadu volíme dva paprsky 1 a 2 a to tak, že paprsek 1 dopadá do počátku souřadné soustavy O. Paprsek 2 volíme tak, že vzdálenost od paty kolmice, spuštěné z O na paprsek 2, A do bodu B, ve kterém protíná paprsek 2 rovinu výbrusu x, y, AB je rovna rychlosti světla ve vakuu c. Přímka p, která leží v rovině výbrusu x, y a je kolmá k paprsku 2, je vlastně průsečnicí roviny výbrusu x, y a rovinné světelné vlnoplochy v okamžiku 1 sekundu po tom, kdy světelná vlnoplocha dospěla do bodu O. V okamžiku, kdy se dopadající vlnoplocha nachází v přímce p, rozšířil se rozruch z bodu O na rotační elipsoid, jehož rovnice je v čárkované soustavě dána vztahem (1). Lomená světelná vlnoplocha odpovídající mimořádnému paprsku je tedy dána tečnou rovinou k rotačnímu elipsoidu, proloženou přímkou p. Hledaný lomený paprsek $1'$ je určen počátkem O a bodem dotyku T.



Obr. 1

Je nutno podotknout, že rovina lomu není v tomto případě totožná s rovinou dopadu a že tedy azimut φ' nebude stejný jako azimut roviny dopadu φ.

Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že úloha stanovení zákona lomu pro mimořádný paprsek se nyní redukuje na zjištění souřadnic bodu dotyku $T(x_t', y_t', z_t')$.

Tečná rovina k rotačnímu elipsoidu, proložená přímkou p musí splňovat dva předpoklady:

1. Musí ležet ve svazku rovin, určených rovinou výbrusu x, y a rovinou dopadající světelné vlnoplochy v okamžiku 1 sekundu po průchodu počátkem O, tj. ve svazku určeném rovinami

$$z = O \tag{8}$$

a

$$\sin \varepsilon \cos \varphi \, x + \sin \varepsilon \sin \varphi \, y + \cos \varepsilon \, z + c = O. \tag{9}$$

Volíme-li dva libovolné parametry λ a μ lze psát rovnici roviny svazku, určeného přímkou p ve tvaru

$$\lambda \sin \varepsilon \cos \varphi \, x + \lambda \sin \varepsilon \sin \varphi \, y + (\lambda \cos \varepsilon + \mu) \, z + \lambda c = 0.$$

2. Označíme-li souřadnice bodu dotyku T v čárkované soustavě x'_t, y'_t, z'_t, potom v čárkované soustavě lze psát rovnici tečné roviny konstruované k rotačnímu elipsoidu v bodě T ve tvaru

$$\frac{x'_t x'}{v_e^2} + \frac{y'_t y'}{v_e^2} + \frac{z'_t z'}{v_0^2} = 1. \tag{11}$$

V soustavě nečárkované po úpravě dostáváme:

$$\left[\frac{x_t \cos^2 \psi - z_t \sin \psi \cos \psi}{v_e^2} + \frac{x_t \sin^2 \psi + z_t \sin \psi \cos \psi}{v_0^2}\right] x +$$
$$+ \left[\frac{z_t \cos^2 \psi + x_t \sin \psi \cos \psi}{v_0^2} + \frac{z_t \sin^2 \psi - x_t \sin \psi \cos \psi}{v_e^2}\right] z +$$
$$+ \frac{y_t}{v_e^2} y - 1 = 0. \tag{12}$$

Porovnáním koeficientů v rovnicích (10) a (12) a připojením rovnice rotačního elipsoidu v nečárkované soustavě dostaneme pět rovnic pro neznámé x_t, y_t, z_t, λ a μ:

$$\lambda \sin \varepsilon \cos \varphi = \left(\frac{1}{v_e^2} \cos^2 \psi + \frac{1}{v_0^2} \sin^2 \psi\right) x_t + \left(\frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v_e^2}\right) \sin \psi \cos \psi \, z_t, \tag{13}$$

$$\lambda \sin \varepsilon \sin \varphi = \frac{y_t}{v_e^2}, \tag{14}$$

$$\lambda \cos \varepsilon + \mu = \left(\frac{1}{v_e^2} \sin^2 \psi + \frac{1}{v_0^2} \cos^2 \psi\right) z_t + \left(\frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v_e^2}\right) \sin \psi \cos \psi \, x_t, \tag{15}$$

$$\lambda c = -1, \tag{16}$$

$$\frac{(x_t \cos \psi - z_t \sin \psi)^2}{v_e^2} + \frac{y_t^2}{v_e^2} + \frac{(x_t \sin \psi + z_t \cos \psi)^2}{v_0^2} = 1. \tag{17}$$

Řešením těchto rovnic obdržíme výrazy pro x_t, y_t, z_t ve tvaru

$$r_x = \frac{x_t}{c} = A\varrho - B \sin\varepsilon \cos\varphi \tag{18}$$

$$r_y = \frac{y_t}{c} = -\frac{\sin\varepsilon \sin\varphi}{n_e^2} \tag{19}$$

$$r_z = \frac{z_t}{c} = A \sin\varepsilon \cos\varphi - D\varrho\,, \tag{20}$$

kde

$$\varrho = \frac{A}{D} \sin\varepsilon \cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{1 - \frac{\sin^3\varepsilon}{n_e^2} \left(\frac{1}{n_o^2 D} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}$$

$$A = \frac{(n_0^2 - n_e^2)}{n_0^2 n_e^2} \sin\psi \cos\psi$$

$$B = \frac{1}{n_0^2} \sin^2\psi + \frac{1}{n_e^2} \cos^2\psi$$

$$D = \frac{1}{n_0^2} \cos^2\psi + \frac{1}{n_e^2} \sin^2\psi.$$

Hledané vztahy pro ε_e' a φ' zjistíme pak snadno přechodem k polárním souřadnicím:

$$\sin\varepsilon_e' = sgn\ (\sin\varepsilon) \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \tag{21}$$

$$\mathrm{tg}\ \varphi' = \frac{r_y}{r_x}\,. \tag{22}$$

Index lomu ve směru šíření energie je dán vztahem

$$n' = \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}\,. \tag{23}$$

přesnou orientaci úhlu φ' určíme pak následovně:

$\varphi' \in (\ 0°,\ 90°)$	pro	$r_x > o\,,\ r_y > o$
$\varphi' \in (\ 90°,\ 180°)$	pro	$r_x < o\,,\ r_y > o$
$\varphi' \in (180°,\ 270°)$	pro	$r_x < o\,,\ r_y < o$
$\varphi' \in (270°,\ 360°)$	pro	$r_x > o\,,\ r_y < o$

Vztahy pro ε_e' a φ' jsou dosti složité. Jejich použití v obecných případech je velmi obtížné. Velmi se však zjednoduší ve speciálních případech výbrusů pro $\psi = 0°$, $\psi = 45°$, $\psi = 90°$. V obecném případě je možno těchto vztahů dobře použít pro stanovení mezného úhlu při úplném odrazu, nebo při výpočtu zdvojení v případě kolmého průchodu světla dvojlomnou planparalelní destičkou.

Při použití počítacích strojů složitost vztahů není pro přesné řešení problémů optiky krystalů na obtíž.

LITERATURA

[1] *Szivessy, G.:* Kristalloptik, Handbuch der Physik, Band XX, Licht als Wellenbewegung (Berlin 1928).

[2] *Françon, M.:* Interférences, diffraction et polarisation, Handbuch der Physik, Band XXIV (Berlin—Göttingen—Heidlberg 1956).

ZUSAMMENFASSUNG

DIE FORMULATION DES BRECHUNGSGESETZES AN DER GRENZE DER EINACHSIGEN KRISTALLE

PAVEL CHMELA

In dieser Arbeit wird genaue Formulation des Brechungsgesetzes für den ausserordentlichen Strahl an der Grenze der einachsigen Kristalle durchgeführt. Bei der Rechnung geht man vom *Huygensscher* Prinzip aus. Die Ausrechnung wird im rechtwinkligen Koordinatensystem durchgeführt, und zwar so, dass die z — Achse mit der Normale an der Ausschliffsebene identisch ist und die optische Achse in der xz-Ebene liegt.

Der Brechungswinkel des ausserordentlichen Strahls ε_r' wird durch die Beziehung (21), das Azimut φ' durch die Beziehung (22) und der Strahlenindex in der gegebenen Richtung n' durch die Beziehung (23) gegeben.