Jan Voráček

Poznámka o postupných aproximacích řešení obyčejné diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 4 (1963), No. 1, 75--80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119803`

1963 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 12.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: doc. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

POZNÁMKA O POSTUPNÝCH APROXIMACÍCH ŘEŠENÍ OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y' = f(x, y)$

JAN VORÁČEK

(Předloženo dne 26. října 1962)

V práci se zkoumá konvergence jistého druhu postupných aproximací k řešení diferenciální rovnice 1. řádu. K řešení této otázky se používá známé věty o invariantním prvku při zobrazení úplného metrického prostoru do sebe (tzv. věty Banach—Cacciopoli—Tichonovovy). Ukazuje se, že při vhodné volbě metriky se dá konvergence dokázat za dosti obecných předpokladů.

1. Buď dána diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na intervalu $\{x_0 \leqq x \leqq x_0 + a; -\infty \leqq y \leqq +\infty\}$ $(0 < a \leqq +\infty)$ a splňuje zde nerovnost

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq L(x) | y_1 - y_2 |, \tag{2}$$

kde $L(x)$ je funkce nezáporná a spojitá na $\langle x_0, x_0 + a)$. Předpokládejme dále, že funkce

$$J(x) = \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| \, e^{-\int_t^x L(u)\mathrm{d}u} \, \mathrm{d}t$$

je na intervalu $\langle x_0, x_0 + a)$ omezená.

Definujme nyní posloupnost postupných aproximací $\{y_n\}$ vzorci $y_{n+1} = F(y_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, kde

$$F(y_n) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} L(u)\mathrm{d}u} + \int_{x_0}^{x} [L(u)\, y_n(u) + f(u, y_n(u))]\, e^{-\int_u^x L(t)\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}u \tag{3}$$

Operátor F budeme v dalším studovat na prostorech U_s, C_ϱ.

Poznámka: Položíme-li $L(x) = \text{const}$, dostaneme posloupnost uvedenou v [1], kde se však předpokládá existence a omezenost $\frac{\partial f}{\partial y}$. Posloupnost $\{y_n\}$ postupných aproximací, kterou jsme právě definovali je vytvořena tak, že odpovídá Čaplyginově metodě přibližné integrace diferenciálních rovnic. Předpokládáme-li např. existenci $\frac{\partial f}{\partial y}$, dá se snadno dokázat, že pro $\frac{\partial f}{\partial y} \geqq 0$ je $\{y_n\}$ neklesající.

Z množiny funkcí, spojitých na $\langle x_0, x_0 + a)$ vyberme takové, pro něž je výraz

$$\sup_{x_0 \leqq x < x_0 + a} \left(|\varphi(x)|\, e^{-\alpha \int_{x_0}^{x} L(t)\,\mathrm{d}t} \right) \quad (\alpha > 1) \tag{4}$$

konečný. V této množině definujme normu výrazem (4) a metriku obvyklým způsobem $\varrho(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$. Dostáváme tak úplný metrický prostor U_s ([2]). Na U_s uvažujme nyní operátor (3). Pro $|F(\varphi)|$ pak dostáváme odhad ($\varphi \in U_s$):

$$|F(\varphi) \leqq |y_0| + 2 \int_{x_0}^{x} L(u)\, |\varphi(u)|\, \mathrm{e}^{-\int_u^x L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u + |y_0| \int_{x_0}^{x} L(u)\, e^{-\int_u^x L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u +$$

$$+ J(x) \leqq 2 \left[|y_0| + \frac{\|\varphi\|}{\alpha} \int_{x_0}^{x} \alpha\, L(u)\, e^{\alpha \int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u \right] + J(x) <$$

$$< e^{\alpha \int_u^x L(t)\mathrm{d}t} \left[2\, |y_0| + \frac{2\, \|\varphi\|}{\alpha} + J(x) \right].$$

Z toho pak podle (4) plyne $F(\varphi) \in U_s$, takže (3) zobrazuje U_s do sebe. Zcela analogicky vypočteme

$$|F(\varphi) - F(\psi)| \leqq \frac{2}{\alpha} \|\varphi - \psi\| \int_{x_0}^{x} \alpha\, L(u)\, e^{\alpha \int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u \leqq \frac{2}{\alpha}\, \varrho(\varphi, \psi)\, e^{\alpha \int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t},$$

z čehož

$$\varrho(F(\varphi), F(\psi)) \leqq \frac{2}{\alpha}\, \varrho(\varphi, \psi).$$

Zvolíme-li tedy $\alpha > 2$, budou splněny všechny předpoklady věty o invariantním prvku pro zobrazení (3). Tento prvek, který existuje právě jeden, označme $f_0(x)$, takže máme

$$f_0(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} \left[L(u)\, f_0(u) + f(u, f_0(u)) \right] e^{-\int_u^x L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u \tag{5}$$

a derivací

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}x}=-L(x)\left\{y_0\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x}L(t)\mathrm{d}t}+\int\limits_{x_0}^{x}[L(u)f_0(u)+f(u,f_0(u))]e^{-\int\limits_{u}^{x}L(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u\right\}+L(x)f_0(x)+f[x,f_0(x)].$$

Podle (5) vidíme, že $f_0(x)$ je řešením (1), které splňuje i počáteční podmínku.

2. Konvergence posloupnosti $\{y_n\}$ k řešení (1) se dá dokázat i tehdy, nahradíme-předpoklad (2) předpokladem

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,(x - x_0) \leqq L(x)\,|y_1 - y_2|. \tag{6}$$

Při tom nechť $f(x, y)$ je spojitá na intervalu $\{x_0 \leqq x \leq \alpha_0 + a; -\infty < y < +\infty\}$, $(0 < a < +\infty)$, a $L(x)$ buď taková spojitá a nezáporná funkce na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$, že existuje kladné $q < 1$, pro něž platí $\max\limits_{x_0\leqq x\leqq x_0+a} L(x) = M \leqq \frac{q}{a+1}$.

K důkazu konvergence použijeme zobecněné věty o invariantním prvku, jak je uvedena v [3]. Pro pohodlí čtenáře uveďme toto zobecnění:

Na množině E definujme zobecněnou metriku, která má vlastnosti 1., 2., 3., z def. 14 v [4], připusťme však existenci takových prvků φ, ψ v E, že $\varrho(\varphi, \psi) = +\infty$. Konverguje-li v E_ϱ každá fundamentální posloupnost, nazveme E_ϱ zobecněným úplným prostorem. Operátor F, který zobrazuje E_ϱ do sebe má právě jeden invariantní prvek, má-li tyto vlastnosti: (φ, ψ, y_0 prvky z E_ϱ)

$$\text{(C1)} \qquad \varrho(F(\varphi), F(\psi)) \leqq q\varrho(\varphi, \psi), \qquad (q < 1).$$

(C2) Je-li $y_{n+1} = F(y_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, existuje přirozené N tak, že pro všechna $n > N$ je $\varphi(y_{n+1}, y_n)) < +\infty$.

(C3) Jsou-li φ, ψ dva invariantní prvky, $\varphi = F(\varphi)$, $\psi = F(\psi)$, je $\varrho(\varphi, \psi) < \infty$.

Na množině C funkcí spojitých na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ definujme zobecněnou metriku vztahem

$$\|\varphi - \psi\| = \varrho(\varphi, \psi) = \sup_{x_0\leqq x\leqq x_0+a} \frac{|\varphi - \psi|}{x - x_0}\, e^{-\alpha\int\limits_{x_0}^{x}L(t)\mathrm{d}t} \quad (\alpha > 0). \tag{7}$$

Dostáváme tak zobecněný úplný prostor C_ϱ. Platí totiž především

$$\frac{|\varphi - \psi|}{x - x_0}\, e^{-\alpha\int\limits_{x_0}^{x}L(t)\mathrm{d}t} \geqq |\varphi - \psi| \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x}L(t)\mathrm{d}t},$$

takže je-li $\{y_n\}$ fundamentální posloupnost v C_ϱ, existuje $y \in C_\varrho$ tak, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ stejnoměrně na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje přirozené K tak, že pro všechna přirozená r platí $\varrho(y_k, y_{k+r}) < \frac{\varepsilon}{2^2}$. Položme nyní $K = n_1$ a k n_i

definujme n_{i+1} tak, aby pro všechna přirozená r platilo $\varrho(y_{n_{i+1}}, y_{n_{i+1}+r}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$. Máme ovšem

$$y - y_K = \sum_{i=1}^{\infty} y_{n_{i+1}} - y_{n_i};$$

takže podle (7) platí pro všechna $x \in \langle x_0, x_0 + a\rangle$

$$| y - y_K | \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} e^{\alpha\int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t} (x - x_0)$$

a tedy $\varrho(y, y_K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $S > K$ pak máme $\varrho(y, y_S) \leq \varrho(y, y_K) + \varrho(y_K, y_S) < \varepsilon$.

Operátor (3) zřejmě zobrazuje C_ϱ do sebe.

Vlastnost (C1) operátoru (3) je zřejmá, platí-li $\varrho(\varphi, \psi) = +\infty$. Předpokládejme tedy $\varrho(\varphi, \psi) < +\infty$. Potom máme

$$| F(\varphi) - F(\psi) | \leq \| \varphi - \psi \| \int_{x_0}^{x} L(u) (u - x_0 + 1) e^{\alpha\int_{x_0}^{u} L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u \leq$$

$$\leq \varrho(\varphi, \psi) L(\xi) (a + 1) e^{\alpha\int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t} (x - x_0).$$

Přitom je $\xi \in (x_0, x_0 + a)$. Podle předpokladů o funkci $L(x)$ a podle (7) je tedy

$$\varrho(F(\varphi), F(\psi)) \leq q\varrho(\varphi, \psi), \qquad (q < 1).$$

Vlastnost (C2) se dá dokázat odhadem funkce $| F(\varphi) - \varphi |$. Přitom zřejmě můžeme φ předpokládat ve tvaru

$$\varphi = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} L(t)\mathrm{d}t} + \psi(x),$$

kde $\psi(x)$ je integrál ze spojité funkce. Potom máme např.

$$| F(\varphi) - \varphi | \leq \int_{x_0}^{x} | L(u) \varphi(u) + f(u, \varphi(u)) | e^{-\int_{u}^{x} L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u + | \psi(x) | \leq (Q + R) (x - x_0).$$

Vlastnost (C3) se dá dokázat zcela analogicky, neboť platí

$$| F(\varphi) - F(\psi) | \leq \int_{x_0}^{x} \left[L(u) | \varphi - \psi | + L(u) \frac{| \varphi - \psi |}{u - x_0} \right] e^{-\int_{u}^{x} L(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u. \qquad (8)$$

Protože $\varphi' = f(x, \varphi)$, $\psi' = f(x, \psi)$, jsou derivace $\varphi'(x)$ a $\psi'(x)$ spojité; dále je $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$. Máme tedy podle (8)

$$| F(\varphi) - F(\psi) | \leqq \int_{x_0}^{x} L(u) (| \varphi - \psi | + | \varphi'(\xi) - \psi'(\xi) |) \, du,$$

což je opět integrál ze spojité funkce.

LITERATURA

[1] *С. Н. Слуцкий:* Применение метода Чаплыгинского типа к приближенному решению функциональных уравнений. ДАН СССР 110, 1956.
[2] *A. Bielecki:* Une remarque sur la méthode de *BANACH–CACCIOPOLLI–TICHONOV* dans la théorie des équations différentielles ordinaires. Bull. de l'Acad. Polonaise 1958.
[3] *W. A. J. Luxemburg:* Note on succesive approximations II. Proceedings KNAWN 1959.
[4] *V. Jarník:* Diferenciální počet II. NČSAV 1956.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФ. УРАВНЕНИЯ $y' = f(x, y)$

ЯН ВОРАЧЕК

В настоящей статье исследуются последовательные приближения решения уравнения (1), которое удовлетворяет начальным данным $y(x_0) = y_0$. Приближение строится повторным применением оператора (3). Сходимость доказывается для функции $f(x, y)$ непрерывной в области $\{x_0 \leqq x \leqq x_0 + a; -\infty \leqq y \leqq +\infty\}$ $(0 < a \leqq +\infty)$ и удовлетворяющей (2). При чем $L(x)$ непрерывная и такая, что функция $J(x) = \int_{x_0}^{x} | f(t, y_0) | \, e^{-\int_{x_0}^{x} L(u) du} \, dz$ ограниченная в интервале $\langle x_0, x_0, + a)$. Если $0 < a < \infty$, тогда можно заменить (2) неравенством (6), если $L(x) < 1$.

Résumé

UNE REMARQUE SUR LES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE $y' = f(x, y)$

JAN VORÁČEK

L'article s'occupe de l' étude des approximations successives de la solution de l'équation (1) qui satisfait à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Ces approximations sont définies par application successive de la transformation (3). La convergence est prouvée pour $f(x, y)$ continue dans $\{x_0 < x < x_0 + a;\ -\infty \leqq y \leqq +\infty\}$, $(0 < a \leqq +\infty)$ et satisfaisante (2). Ici $L(x)$ est supposée continue et telle que la fonction $J(x) = \int_{x_0}^{x} | f(t, y_0) | \, e^{-\int_t^x L(u) \mathrm{d}u} \mathrm{d}t$ reste bornée dans $\langle x_0, x_0 + a\rangle$. En cas $0 < a < +\infty$ on peut remplacer (2) par (6) si $L(x) < 1$.