Jindřich Palát

Пример к теории преобразования и дисперсий О. Борувка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 4 (1963), No. 1, 63--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119801`

1963 — Acta Universitatis Palackianae Olomucensis
Facultas Rerum Naturalium. Том 12.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: doc. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

ПРИМЕР К ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДИСПЕРСИЙ О. БОРУВКА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

(Поступило в редакцию 26/X 1962 г.)

В настоящей статье иллюстрируется на простом примере двух линейных диф. уравнений 2-го порядка (a) и (A) теория преобразований решений линейных диф. уравнений 2-го порядка и теория дисперсий, принадлежащие проф. О. Борувка.

1. Рассмотрим линейные диф. уравнения 2-го порядка

$$y'' = -ay \quad \text{и} \quad Y'' = -Y, \tag{a / A}$$

где $a \neq 0$ вещественное число. Нашей целью будет показать на простом примере, как можно выразить решение уравнения (a) через определенное решение уравнения (A).

Чтобы эту задачу удовлетворительно решить, надо согласно [2] найти решение следующего нелинейного диф. уравнения 3-го порядка

$$-\frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} + \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2} - X'^2 = -a. \tag{b}$$

Умножая это уравнение выражением $-4X'^2(t)$ и полагая

$$X'(t) = \operatorname{sgn} X'(t_0)\, u^{-2}(t),$$

из (b) получаем диф. уравнение

$$u'' - u^{-3} + au = 0,$$

из которого находим, что

$$u'(t) = \frac{\sqrt{-au^4 + K_1u^2 - 1}}{u},$$

где $K_1^2 \geqq 4a$.

Интегрируя это уравнение, получаем последовательно

$$t + C_2 = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{a}} \arcsin \dfrac{-2au^2 + K_1}{\sqrt{K_1^2 - 4a}}, & \text{если } a > 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-a}} \ln(2\sqrt{a^2u^4 - K_1u^2a + a} - 2au^2 + K_1), & \text{если } a < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где K_1 и C_2 постоянные и $K_1^2 > 4a$. Отсюда следует, что решение уравнения (b) имеет вид

$$X(t) = \operatorname{sgn} X'(t_0) \operatorname{arctg} \{C_1 \operatorname{tg} \sqrt{a}(t + C_2) + \sqrt{C_1^2 - 1}\} + C_3, \text{ если } a > 0, \tag{2}$$

где $|C_1| = \left|\dfrac{1}{2\sqrt{a}} K_1\right| \geqq 1$, C_2 и C_3 постоянные, или

$$X(t) = \operatorname{sgn} X'(t_0) \operatorname{arctg} \frac{e^{2\sqrt{-a}(t + C_2)} - 2\sqrt{-a}C_1}{2\sqrt{-a}} + C_3, \text{ если } a < 0, \tag{3}$$

где $C_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{-a}} K_1$, C_2 и C_3 постоянные. Функция (2) определена в интервале $(\varkappa_K, \varkappa_{K+1})$, где $\varkappa_K = (K - \frac{1}{2}) \dfrac{\pi}{\sqrt{a}} - C_2$, $K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в котором она возрастает или убывает в зависимости от того, если $\operatorname{sgn} C_1X'(t_0) = 1$ или $\operatorname{sgn} C_1X'(t_0) = -1$. Функция (3) определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, в котором она возрастает или убывает в зависимости от того, если

$$\operatorname{sgn} C_1X'(t_0) = 1,$$

или $\operatorname{sgn} X'(t_0) = -1$. Итак, согласно [2] мы можем ответить на поставленную задачу следующим образом:

Пусть $t_0 \in (\varkappa_K, \varkappa_{K+1})$, если $a > 0$ или $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, если $a < 0$. Обозначим $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X_0'(\neq 0)$ и $X''(t_0) = X_0''$. Пусть $U(t)$ произвольное решение диф. уравнения (A). Тогда функция

$$u(t) = \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \tag{4}$$

определенная в интервале, в котором определено решение $X(t)$ диф. уравнение (b) и удовлетворяющая начальным данным

$$u(t_0) = \frac{U[X_0]}{\sqrt{|X_0'|}} \text{ и } u'(t_0) = \frac{U'[X_0]}{\sqrt{|X_0'|}} X_0' - \frac{1}{2} \frac{U[X_0]}{\sqrt{|X_0'|}} \frac{X_0''}{X_0'}, \tag{5}$$

есть решение диф. уравнения (a).

Поставленную задачу продемонстрируем при следующем выборе: $U(t) = \sin t$, $t_0 = 0$, $X_0 = 0$, $X_0' = 1$ и $X_0'' = 0$. Подставляя эти значения в соответствующую функцию (2) или (3), в ее призводную $X'(t)$ и $X''(t)$, получаем для определения постоянных C_1, C_2 и C_3 систему трех уравнений, из которой находим, что в случае $a > 0$ $C_1 = \frac{1+a}{2\sqrt{a}}$, $C_2 = \frac{-\pi}{4\sqrt{a}}$ и $C_3 = \operatorname{arctg}\sqrt{a}$.

Итак,

$$X(t) = \operatorname{arctg}\frac{(1+a)\operatorname{tg}\sqrt{a}\left(t - \frac{\pi}{4\sqrt{a}}\right) + 1 + a}{2\sqrt{a}} + \operatorname{arctg}\sqrt{a}.$$

Это выражение можно упростить, применяя формулы для тангенс разности, суммы арктангенсов и формулу выражающую арктангенс через арксинус. Тогда

$$X(t) = \arcsin\frac{\operatorname{tg}\sqrt{a}t}{\sqrt{a + \operatorname{tg}^2\sqrt{a}t}}, \text{ где } t \in \left(\frac{-\pi}{2\sqrt{a}}, \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right).$$

Так как $X'(t) = a^{-1}(a\cos^2\sqrt{a}t + \sin^2\sqrt{a}t) > 0$, то из (4) следует, что $u(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\sqrt{a}t$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет диф. уравнению (a) в интервале $\left(\frac{-\pi}{2\sqrt{a}}, \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)$ (и даже во всем интервале $[-\infty, +\infty]$) и начальным данным $u(0) = 0$ и $u'(0) = 1$.

Таким же образом находим, что в случае $a < 0$ $C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-a}}$, $C_2 = 0$ и $C_3 = 0$. Поставляя эти значения в выражение (3) получаем, что

$$X(t) = \operatorname{arctg}\frac{e^{2\sqrt{-a}t} - 1}{2\sqrt{-a}}, \text{ где } t \in (-\infty, +\infty).$$

Используя формулу выражающую арктангенс через арксинус получаем, что

$$X(t) = \arcsin\frac{e^{2\sqrt{-a}t} - 1}{\sqrt{(e^{2\sqrt{-a}t} - 1)^2 - 4a}}.$$

Так как $X'(t) = -4ae^{2\sqrt{-a}t}(\langle e^{2\sqrt{-a}t} - 1\rangle)^2 - 4a)^{-1} > 0$, то из (4) следует, что $u(t) = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{sh}\sqrt{-a}t$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет диф. уравнению (a) в интервале $(-\infty, +\infty)$ и начальным данным $u(0) = 0$ и $u'(0) = 1$.

2. Найдем сейчас дисперсии 1-го рода диф. уравнения (a), когда $a > 0$.

Как известно (см. [1]) эти дисперсии являются решением следующего нелинейного диф. уравнения 3-го порядка

$$-\frac{1}{2}\frac{X'''}{X'}+\frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2}-aX'^2=-a.$$

Решение этого уравнения находим таким же образом как в предыдущей части и оно имеет вид:

$$X(t)=-\frac{\operatorname{sgn} X_0'}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\{C_1\operatorname{tg}\sqrt{a}\,(t+C_2)+\sqrt{C_1^2-1}\}+C_3, \tag{6}$$

где $|C_1|\geqq 1$, C_2 и C_3 постоянные. Формула (6) определяет множество функций, зависящие от трех параметров C_1, C_2 и C_3. Область определения этой функции есть любой интервал вида (α_K, α_{K+1}), где $\alpha_K=\left(K-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{a}}-C_2$, $K=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В каждом из этих интервалов функция (6) возрастает или убывает в зависимости от того, если $\operatorname{sgn} C_1X_0'=-1$ или $\operatorname{sgn} C_1X_0'=1$. Следовательно:

Формулой (6) определены *несобственные дисперсии 1-го рода.*

Собственные дисперсии 1-го рода можно получить согласно [1] „склеиванием“ соответствующих частей несобственных дисперсий 1-го рода и они определены следующей формулой:

$$\zeta(t)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}-K\right)\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{sgn} C_1X_0'+C_3 & \text{для } t=\alpha_K,\\ -\frac{\operatorname{sgn} X_0'}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\{C_1\operatorname{tg}\sqrt{a}\left((t+C_2-\frac{K\pi}{\sqrt{a}}\right)+\sqrt{C_1^2-1}\}+C_3-\frac{K\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{sgn} C_1X_0' & \text{для } t\in(\alpha_K, \alpha_{K+1}),\end{cases} \tag{7}$$

где $|C_1|\geqq 1$, C_2 и C_3 постоянные $\alpha_K=\left(K-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{a}}-C_2$, $K=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

Функции (7) непрерывны во всем интервале $(-\infty, +\infty)$, в котором они возрастают или убывают в зависимости от того, если $\operatorname{sgn} C_1X_0'=-1$ или $\operatorname{sgn} C_1X_0'=1$. Множество всех собственных дисперсий 1-го рода образует ассоциативную группу G, в которой умножение определено сложением функций и единица группы есть функция $\zeta_0(t)=t$.

Собственные непрямые дисперсии 1-го рода определены формулой (7) и значениями C_1, для которых $\operatorname{sgn} C_1X_0'=1$.

Собственные прямые дисперсии 1-го рода определенные формулой (7) и значениями C_1, для которых $\operatorname{sgn} C_1X_0'=-1$, образуют подгруппу P.

Центральные дисперсии 1-го рода, определенные формулой (7) и значениями $C_1 = \pm 1$ и $\operatorname{sgn} C_1 X_0' = -1$, $C_2 + C_3 = \frac{\nu\pi}{\sqrt{a}}$, имеющие вид

$$\zeta_\nu(t) = t + \frac{\nu\pi}{\sqrt{a}},$$

где $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ образуют группу C.

Центральные дисперсии 1-го рода с четными индексами

$$\zeta_{2\nu} = t + \frac{2\nu\pi}{\sqrt{a}}$$

образуют группу S.

Верны соотношения $\mathrm{G} \supset \mathrm{P} \supset \mathrm{C} \supset \mathrm{S} \ni \zeta_0(t)$.

Покажем еще, что согласно [1] группа C центральных дисперсий 1-го рода является *центром группы* P собственных прямых дисперсий 1-го рода. Для этого достаточно доказать, что для любых элементов $\zeta\nu(t) \in \mathrm{C}$ и $\zeta(t) \in \mathrm{P}$ имеет место: 1)$\zeta\nu[\zeta(t)] = \zeta[\zeta\nu(t)]$ и 2) $\zeta\nu[\zeta(t)] \in \mathrm{P}$. Действительно:

$$\zeta\nu[\zeta(t)] = \zeta(t) + \frac{\nu\pi}{\sqrt{a}} = \zeta\left[t + \frac{\nu\pi}{\sqrt{a}}\right] = \zeta[\zeta\nu(t)].$$

То, что $\zeta\nu[\zeta(t)] \in \mathrm{P}$ очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *О. Борувка:* О колеблющихся интегралах линейных диф. уравнений 2-го порядка, Чехословацкий математический журнал т. 3 (78) 1953, 199 и д.

[2] *O. Borůvka:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre, Annali di matematica pura ed applicata, Bologna 1956, Serie IV, T.XLI.

Shrnutí

PŘÍKLAD K TEORII TRANSFORMACÍ A DISPERSÍ O. BORŮVKY

JINDŘICH PALÁT

V článku se studuje konkrétní příklad ilustrující teorii transformací a teorii dispersí prof. O. Borůvky. K tomu slouží dvě lineární diferenciální rovnice 2. řádu typu Jacobiho (a) a (A) s konstantními koeficienty.

Resumé

UN EXEMPLE À LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS ET DES DISPERSIONS DE O. BORŮVKA

JINDŘICH PALÁT

Dans l'article, on étudie un example concrèt illustrant la théorie des transformations et des dispersions de M. O. Borůvka. On se sert de deux équations linéaires du second ordre du type Jacobi (a) et (A) à coefficients constants.