

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum  
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

---

František Havelka

Konstrukce perspektivy a rovnoběžných projekcí pomocí rozštěpení homologie  
posunutím

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol.  
4 (1963), No. 1, 5--21,22--43

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119796>

**Terms of use:**

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1963

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to  
digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain  
these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped  
with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics  
Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty  
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Josef Metelka*

KONSTRUKCE PERSPEKTIV A ROVNOBĚŽNÝCH  
PROJEKČÍ POMOCÍ ROZŠTĚPENÍ HOMOLOGIE  
POSUNUTÍM

FRANTIŠEK HAVELKA  
(Předloženo dne 15. října 1962)

I. STŘEDOVÁ PROJEKCE

I. Úvod

Základem mechanických konstrukcí perspektiv v celém jejich historickém vývoji je báze středového promítání  $(O, \pi)$  rozšířená o základní rovinu  $\rho$ . Je to tzv. Dürerova soustava  $(O, \pi \perp \rho)$  perspektivního promítání, uváděná v literatuře [5a, b].

Lze konstatovat, že v jednotlivých obdobích tohoto vývoje, ovlivněných rozvojem vědy a techniky, zvláště rozvojem perspektivy a potřebami praxe, byly uplatněny různé způsoby užití Dürerovy soustavy při kreslení perspektiv, různá její vyjádření a znázornění v rovině. Zdá se, že některá stadia vývoje perspektivy jsou dokonce charakterisována určitým způsobem znázornění Dürerovy soustavy v rovině, např. stadiem Lambertových mechanismů, období rozkvětu mechanických konstrukcí perspektiv v 80. letech minulého století, stadiem Fresnayeovy a Mackovy mechanické konstrukce perspektiv atd.

Na základě četné literatury, např. [1], [3], [5], je možno pokládat perspektivní kolineaci (homologii) za důležité znázornění Dürerovy soustavy v rovině, neboť je rovinným obrazem Dürerovy soustavy s ní ekvivalentním a je základem jednoduchých mechanických konstrukcí perspektiv a rovnoběžných projekcí [5]. Byla uplatněna v mechanických konstrukcích u *J. H. Lamberta* (1728—1777) a zvláště u *C. de la Fresnaye* (1909) a u *Karla Macka* (1918) [3], [6]. Práce obou autorů je možno považovat za významné stadium ve vývoji mechanických konstrukcí perspektiv. Je třeba připomenout, že již některé Lambertovy mechanické konstrukce perspektiv, zvláště konstrukce nitové, mají svůj teoretický základ v rovinné perspektivní kolineaci. Od té doby jí však nebylo užito soustavněji při konstrukci perspektivních mechanismů. Nejčastěji, zvláště v plodném období těchto konstrukcí v letech 1880—1900 i později, bylo promítání v Dürerově soustavě chápáno jako průsečná metoda perspektivního promítání, případně jako trilineární příbuznost

mezi třemi navzájem orientovanými středovými projekcemi (*Hauck, Brauer, ...*). Mnozí konstruktéři uváděli střed perspektivního promítání  $O$ , perspektivní průmětnu  $\pi$  a základní rovinu  $\rho$  otáčením a posouváním do různých vzájemných poloh vhodných pro mechanisaci procesu rýsování perspektiv (*Brix, Ritter, Dietmann, Pillet, ...*), uváděli obě roviny  $\pi \perp \rho$  ve vztah s Mongeovou projekcí (*Fiorini*), s Descartovou pravouhloú prostoroú soustavou souřadnic (*Arrigunaga*) apod.

Obě konstrukce, Fresnayeova a Mackova, mají některé společné prvky, zvláště: a) vycházejí, jak bylo uvedeno, z perspektivní kolíneace v průmětně  $\pi$  jako obrazu ekvivalentního s Dürerovou soustavou perspektivního promítání podle věty Stevinovy.

b) Otočením, resp. posunutím některých prvků této kolíneace, označeným v literatuře [5] jako rozštěpení perspektivní kolíneace (Dürerovy soustavy), dospívají ke konstrukcím perspektiv, vhodným pro mechanisaci.

Obě konstrukce byly uskutečněny brzy po sobě. Neúí vyloučeno, že konstrukce Fresnayeova byla podnětem Karlu Mackovi k sestrojení jeho mechanických pomůček k rýsování perspektiv, dřevěného perspektografu s posuvnou deskou, kovového pravítkového perspektografu a nitkového perspektografu.

V pojednání [5] bylo uvedeno, že v literatuře jednající o perspektivě je zvláště ceněna konstrukce Fresnayeova. Je v ní užito některých vlastností soumístných rovinných kolíneárních soustav nikoli perspektivních, v něž je převedena perspektivní kolíneace těchto rovinných soustav zrušením jejich perspektivnosti. To se může stát trojným způsobem v pojednání uvedeným.

a) *Otočením* jedné z obou perspektivně kolíneárních rovinných soustav  $\varrho_1, \varrho_2 \equiv \pi$  kolem středu  $O_1 \equiv O_2 \equiv O_0$  dané perspektivní kolíneace o libovolný úhel  $\gamma \neq 0^\circ, 180^\circ$ . V tom případě mluvíme o rozštěpení perspektivní kolíneace otočením  $\gamma$ . Užívá ho C. de la Fresnaye.

b) *Posunutím* jedné ze soustav  $\varrho_1, \varrho_2 \equiv \pi$  o nenulový vektor  $\vec{p}$  rovnoběžný s osou  $o \equiv z$  dané perspektivní kolíneace. Jde o rozštěpení perspektivní kolíneace posunutím  $p$ . Rozštěpení může být uskutečněno též posunutím směrem hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_2$  nebo směrem libovolné slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_2$ .

c) *Libovolným přemístěním*.

V prvním případě přestane být střed perspektivní kolíneace  $O_1 \equiv O_2 \equiv O_0$  bodem silně samodružným a stane se slabě samodružným bodem nového obecně kolíneárního vztahu soumístných rovinných soustav. Osa perspektivní kolíneace  $o \equiv z$ , její silně samodružná přímka, pozbude vůbec své samodružnosti. Samodružná přímka nového vztahu, protilehlá k bodu  $O_0$ , strana trojúhelníka samodružných bodů, je reálná. Ostatní dva vrcholy tohoto trojúhelníka s ní incidentní a ostatní dvě jeho strany jsou sdružené imaginární. V literatuře [2] je možno zjistit, že tento případ vzájemné polohy obou projektivních rovinných soustav je označován jako typ kolíneace I, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice od sebe různé.

V druhém případě přejde osa  $o \equiv z_1 \equiv z_c$  perspektivní kolíneace, její silně samodružná přímka, v přímku slabě samodružnou nového obecně kolíneárního vztahu souměstných rovinných soustav, střed  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$ , bod silně samodružný perspektivní kolíneace, ztratí vůbec svou samodružnost. Nový obecně kolíneární vztah má dvě slabě samodružné přímky, a to osu  $z$  a přímku  $u \in O_0, u \parallel z$ . Má taktéž dva slabě samodružné body, a to nevlastní bod samodružné přímky  $z$  a jistý bod přímky  $u$ . Z klasifikace rovinných kolíneací je známo, že jde o případ, kdy má charakteristická rovnice jeden kořen jednoduchý a druhý dvojnásobný, pro nějž je hodnota charakteristického determinantu 2 [2].

V případě rozštěpení perspektivní kolíneace posunutím jedné ze soustav  $e_1, e_c \equiv \pi$  podél hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_c$  nebo podél jiné slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$ , zůstane tato přímka slabě samodružnou přímku nového vztahu, protilehlý slabě samodružný bod je nevlastní bod základnice  $z$ , ostatní dva slabě samodružné body jsou incidentní s  $v_1 \equiv v_c$ , resp. s  $a_1 \equiv a_c$ . Jde o typ kolíneace I.

Budeme se zabývat druhým rozštěpením perspektivní kolíneace. Položíme dvě otázky, na které bude v článku odpověděno.

1. Jsou v dané Dürerově soustavě možné konstrukce perspektiv základní roviny  $\rho$ , tj. konstrukce perspektivně kolíneárních obrazů soustavy základní roviny podle Stevinovy věty, jestliže místo Fresnayeova otočení soustavy  $e_1 (e_c)$  kolem středu  $O_0$  o libovolný úhel  $\gamma$  užijeme posunutí soustavy  $e_1 (e_c)$  o libovolný vektor  $\vec{p}$  směru osy kolíneace? Jsou-li možné, čím se liší od konstrukcí dříve uvedených a jak budou provedeny?

2. Bude rozštěpení dané perspektivní kolíneace, obrazu Dürerovy soustavy, tímto posunutím užitečné pro zmechanisování konstrukcí perspektiv obrazců incidentních se základní rovinou  $\rho$  i prostorových objektů, tak jak tomu bylo při rozštěpení otočením?

Předně odpovíme na první otázku. Odpověď bude kladná, podaří-li se takové konstrukce uskutečnit. A to se podaří.

Než budeme probírat tyto konstrukce v jednotlivých případech Dürerovy soustavy, vyslovíme některé věty důležité v dalších úvahách a zavedeme některé pojmy definicemi. V perspektivní kolíneaci budou mít důležitou úlohu přímky rovnoběžné s osou kolíneace  $o \equiv z$ . Abychom se mohli o nich stručně vyjadřovat, zavedeme pojmenování osnovy těchto přímek definicí.

#### **Definice 1.1. (přímek osnovy $\Sigma$ )**

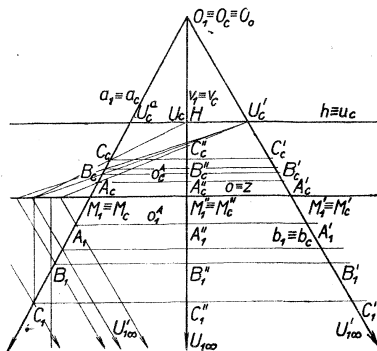
Osnovu přímek rovnoběžných s osou perspektivní kolíneace budeme nazývat osnovou  $\Sigma$  (soustavou  $\Sigma$ ).

Nechť je dána perspektivní kolíneace obvyklým způsobem  $(O_0, z, A_1 \rightarrow A_2)$ . Můžeme vyslovit následující větu.

**Věta 1.1.** Sestrojíme-li přímky  $o_1^A, o_2^A$  rovnoběžné s osou perspektivní kolíneace  $o \equiv z$ , tj. přímky osnovy  $\Sigma$ , incidentní s danými body  $A_1, A_2$ , pak tyto přímky určují na každé

slabě samodružné přímce  $b_1 \equiv b_c$ ,  $v_1 \equiv v_c, \dots$  dvojice přiřazených si bodů  $A'_1, A'_c$ ;  $A''_1, A''_c; \dots$  v dané kolíneaci (obr. 1).

**Důkaz.** Správnost této věty je zdůvodněna druhou základní vlastností perspektivní kolíneace o přiřazených si přímkách. Takové přímky mají společný bod incidentní s osou kolíneace. Obě přímky  $o_1^a, o_1^c$  mají společný nevlastní bod incidentní s osou



Obr. 1.

a jsou si v kolíneaci přiřazené. Protože se podle další základní vlastnosti homologie incidence zanechává, je správnost věty dokázána.

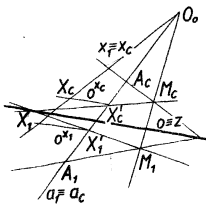
Větu můžeme rozšířit.

**Věta 1.2.** Jsou-li dány všechny dvojice homologických bodů na slabě samodružné přímce  $a_1 = a_c$ , pak osnova  $\Sigma$  přímek incidentních s těmito dvojicemi určuje na každé slabě samodružné přímce všechny dvojice odpovídajících si bodů. Přitom homologické

bodů na slabě samodružných přímkách jsou incidentní s přímkami osnovy  $\Sigma$ , procházejícími homologickými body dané slabě samodružné přímky  $a_1 = a_c$ .

**Důkaz.** Správnost této věty je přímým důsledkem správnosti předešlé věty.

Jsou-li dány všechny dvojice odpovídajících si bodů slabě samodružné přímky  $a_1 = a_c$  (nebo je-li možno je sestrojiti), můžeme určit ke každému bodu  $X_1$  soustavy  $o_1$  odpovídající bod  $X_c$  soustavy  $o_c \equiv \pi$ .

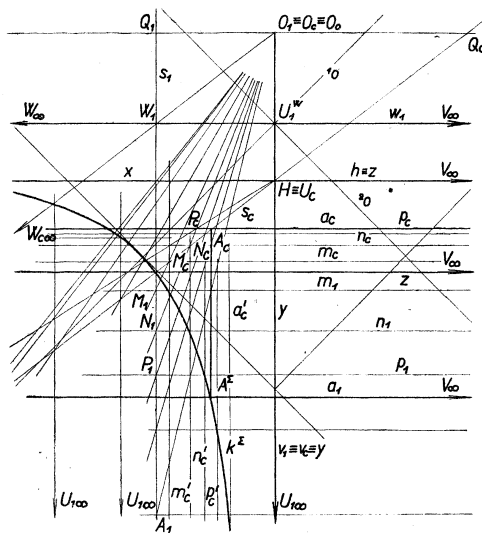


Obr. 2.

**Úloha 1.1.** Je provést právě uvedenou konstrukci.

**Řešení.** (Obr. 2)

1. Spojíme bod  $X_1$  se středem homologie přímkou  $x_1 \equiv x_r$ .
2. Vedeme bodem  $X_1$  přímkou náležící osnově  $\Sigma$  a výtkneme její průsečík  $X'_1$  s přímkou  $a_1 \equiv a_r$ .



Obr. 3.

3. Vytkneme na přímce  $a_1 \equiv a_c$  bod  $X'_1$  kolineárně přiřazený bodu  $X_1$  a vedeme jím přímkou  $o_1^x$  osnovy  $\Sigma$ .

4. Průsečík  $X_c \equiv X_1 O_0 \cdot o_1^x$  je hledaný bod  $X_c$ .

V případě, že nejsou dány všechny dvojice přiřazených bodů na některé slabě samodružné přímce, sestrojíme snadno páry přiřazených přímek osnovy  $\Sigma$  a tím např. bod  $M_c$  homologický s daným bodem  $M_1$ , nebo obráceně. Platí věta.

**Věta 1.3.** Přímky osnovy  $\Sigma$  dané perspektivní kolíneace můžeme doplňovat rýsováním pouze jedné přímky:

- a) přímky svazku o středu v bodu  $O_0$ , středu homologie.

b) *přímky rovnoběžné s hlavní vertikálou, tj. přímky svazku o středu  $U_{1\infty}$ . Můžeme tak učinit za předpokladu, že je narysována jistá přímka nebo rovnosá hyperbola.*

Důkaz správnosti věty podáme tím, že konstrukci provedeme. a) Nechť je dána např. třetí Dürerova soustava svým obrazem  $(O_0, z, h)$ . Je sestrojil přímku  $p_c$  osnovy  $\Sigma$ , příslušící přímce  $p_1$  této osnovy, jak je učiněno na obr. 3.

Vytkneme libovolnou hloubkovou přímku  $s$  např. jejím perspektivním průmětem  $s_c$ . Jí přísluší v dané homologii přímka  $s_1$  kolmá k základnici a incidentní se stopníkem  $Z'$  přímky  $s$ . Jestliže ji narysujeme, pak na základě vlastností homologie a na základě věty 1,1 je hledaná přímka  $p_c$  určena vedením přímky  $q_1 = q_c$  náležící do svazku slabě samodružných přímek o středu v bodě  $O_0$  a incidentní s bodem  $P_1 = p_1 \cdot s_1$ . Tato přímka protíná přímku  $s_c$  v bodu  $P_c$ , s nímž je incidentní hledaná přímka  $p_c$ . Tím je úloha řešena.

b) V případě, že nejsou žádoucí přímky svazku o středu  $O_0$ , nebo je-li tento bod nepřístupný pro značnou velikost distance, je možno použít osnovy přímek směru hlavní vertikály  $v_1 \Rightarrow v_c$ .

Obě řady bodů  $s_1(M_1N_1P_1 \dots)$ ,  $s_c(M_cN_cP_c \dots)$  na obrazech  $s_1, s_c$  hloubkové přímky  $s$  jsou perspektivní podle středu  $O_0$ , neboť jsou řezy téhož svazku přímek o středu  $O_0$ . Osnova  $\Sigma$  přímek  $m_1, n_1, p_1, \dots$ , tj. svazek přímek o středu  $V_\infty$  incidentních s body první řady, je proto projektivní s osnovou přímek  $m'_c, n'_c, p'_c, \dots$ , tj. se svazkem přímek o středu v bodě  $U_{1\infty}$  incidentních s body řady druhé:

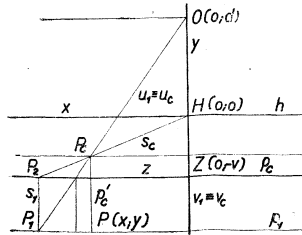
$$V_\infty(m_1n_1p_1 \dots) \pi U_{1\infty}(m'_cn'_cp'_c \dots).$$

Oba svazky vytvářejí bodovou řadu 2. stupně, kuželosečku  $k$ .

Bodu  $U_c \in s_c$  odpovídá bod  $U_{1\infty} \in s_1$ , a proto je nevlastní bod hlavní vertikály bodem uvedené kuželosečky  $k$  a hlavní vertikála je její asymptotou.

Nevlastnímu bodu  $W_{c\infty}$  perspektivy spádové přímky  $s_c$  náleží bod  $W_1 \equiv s_1 \cdot w_1$ , který je podle známých vlastností perspektivní kolineace incidentní s úběžnicí  $w_1$  náležící osnově  $V_\infty(m_1, n_1, p_1, \dots w_1, \dots)$  a její nevlastní bod  $V_\infty$  náleží kvadratické bodové řadě  $k$ . Úběžnice  $w_1$  je její asymptotou. Ze kvadratické bodové řady  $k$  je incidentní s body  $U_{1\infty}, V_\infty$  a přímky  $v_1 \equiv v_c, w_1$  jsou jejími asymptotami, plyne ze základních poznatků projektivní geometrie o projektivním vytvoření kuželosečky.

Obě asymptoty,  $v_1 \equiv v_c, w_1$ , jsou k sobě kolmé, křivka  $k$  je rovnosá hyperbola o středu v bodu  $U_1^* \equiv w_1 \cdot (v_1 \equiv v_c)$ . Zavedeme-li pravoúhlou souřadnicovou soustavu o středu v hlavním bodu  $H \equiv U_c$  a souřadnicových osách v horizontu  $h$



Obr. 4.

a v hlavní vertikále, je rovnice slabě samodružné přímky  $u_1 \equiv u_e$  a perspektivy  $s_e$  přímky  $s : y = kx + d$ ,  $y = ax$ , kde  $a$  je konstanta,  $d$  distance zobrazení a  $k$  proměnný parametr ve svazku o středu  $O_0$  (obr. 3, 4).

Po určení rovnice přímek  $p_1$ ,  $p'_e$  a vyloučení parametru  $k$  obdržíme rovnici kuželosečky  $k$ :

$$k \equiv axy + ax \cdot (v - d) - dv = 0.$$

Pro  $a = 1$  je její rovnice:

$$k \equiv xy + x \cdot (v - d) - dv = 0.$$

Její střed je  $S(0, d - v)$ , osa  $\perp 2dv$ . Z věty 1,3 vyplývá, že každé hloubkové přímce  $s$  základní roviny  $\rho$  odpovídá jistá rovnosá hyperbola. Proto budeme nazývat sestrogenou hyperbolu odpovídající hloubkové přímce  $s$  hyperbola (kuželosečka)  $k^s$ .

Pomocí této hyperboly můžeme doplňovat přímky osnovy  $\Sigma$  dané perspektivní kolineace vedením jediné přímky rovnoběžné s hlavní vertikálou. K tomu postačí příložník, kterým posunujeme po horní liště rýsovací desky.

**Úloha 1.1.** Je sestrojil přímku  $a_e$  osnovy  $\Sigma$  příslušnou přímce  $a_1$  této osnovy za předpokladu, že je dána hyperbola  $k^s$ .

**Sestrojení:**

1. Vytkneme bod  $A^z \equiv a_1 \cdot k^z$ .
2. Vedeme jím přímku  $A^z A_e \parallel v_1 \equiv v_e$ .
3. Vytkneme její průsečík  $A_e$  s perspektivou  $s_e$ ,  $A_e \equiv A^z A_e \cdot s_e$ , s nímž je incidentní hledaná přímka  $a_e$ .

Stejně je možno doplňovat pomocí hyperboly  $k^s$  dvojice přiřazených bodů  $M_1 \rightarrow M_e, \dots$  dané homologie.

Tím je správnost věty 1,3 prokázána.

Nechť jsou dány dvě slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_e$ ,  $b_1 \equiv b_e$  homologie  $(O_0, z, h)$ , různé od slabě samodružné přímky rovnoběžné s osou této homologie. Vytkneme na první samodružné přímce body, např.  $A_1, B_1, A_e, \dots$  a přiřadíme jim po řadě body  $A'_1, B'_1, A'_e, \dots$  incidentní se samodružnou přímkou druhou tak, že přiřazené body leží na téže přímce osnovy  $\Sigma$ . Tím jsou body přímky  $a_1 \equiv a_e$  uvedeny v jednoznačný vztah s body přímky  $b_1 \equiv b_e$ . Můžeme vyslovit definici.

**Definice 1.2.** ( $\Sigma$ -promítání,  $\Sigma$ -zobrazení)

Uvedené zobrazení se nazývá  $\Sigma$ -promítání ( $\Sigma$ -zobrazení) slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_e$  na slabě samodružnou přímku  $b_1 \equiv b_e$ . Body  $A'_1, B'_1, A'_e \in b_1 \equiv b_e$  jsou  $\Sigma$ -prámetly vytčených bodů  $A_1, B_1, A_e \dots \in a_1 \equiv a_e$ .

Důsledkem uvedených vět a definic 1, 1 a 1,2 je následující věta.

**Věta 1.4.** Osnova  $\Sigma$  zprostředkuje vzájemné  $\Sigma$ -zobrazení slabě samodružných přímek.



**Důkaz** její správnosti je zřejmý.

Podle uvedených vět a definic můžeme zobrazit slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_2, b_1 \equiv b_2, \dots$  např. na slabě samodružnou přímku  $v_1 \equiv v_2$ , splývající s hlavní vertikálou. To se osvědčí v dalších úvahách.

Nechť je dána homologie  $(O_0, z, h)$  jako obraz Dürerovy soustavy perspektivního promítání. Nechť je dán obrazec, např. obdélník  $PQRT \in \varrho$  svým  $\Omega$ -průmětem  $P_1Q_1R_1T_1$ . Vedeme-li jeho vrcholy přímky náležící osnově  $\Sigma$  a určíme-li jejich průsečky  $P_1^y, Q_1^y, R_1^y, T_1^y$  se slabě samodružnou přímkou, např.  $v_1 \equiv v_2$ , zobrazíme daný obdélník na tuto samodružnou přímku  $v_1 \equiv v_2$ .

**Definice 1.3.** ( $\Sigma$ -průmětu obrazce na slabě samodružnou přímku)

Množina  $\Sigma$ -průmětů bodů daného obrazce  $P_1Q_1 \dots$  na slabě samodružnou přímku  $v_1 \equiv v_2$  se nazývá  $\Sigma$ -průmět daného obrazce na tuto samodružnou přímku.

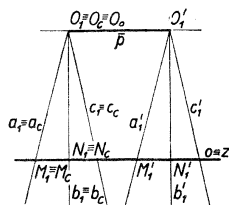
Tato definice se ovšem týká průmětu obrazce na každou jinou slabě samodružnou přímku. V další části práce se budeme zabývat zpravidla promítáním na hlavní vertikálu  $v_1 \equiv v_2$  nebo na přímku  $v_1^y$  s ní rovnoběžnou, jak ukazuje obr. 7.

Zavedením tohoto  $\Sigma$ -promítání na vytčenou samodružnou přímku, např. na hlavní vertikálu  $v_1 \equiv v_2$ , jako by se soustředily slabě samodružné přímky dané homologie do slabě samodružné přímky  $v_1 \equiv v_2$ . Na základě tohoto zobrazení můžeme pracovat v jistém smyslu se všemi samodružnými přímkami homologie, i s jinými útvary, prostřednictvím hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_2$  nebo pomocí jiné slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_2$ .

Nechť je dán obraz Dürerovy soustavy perspektivního promítání, homologie  $(O_0, z, h)$ . Podle návrhu C. de la Fresnaye byla zrušena její perspektivnost otočením soustavy základní roviny  $\varrho_1$ , resp. jejího perspektivního průmětu  $\varrho_0$ , o libovolný úhel  $\gamma$  kolem jejího středu  $O_0$ , aby bylo možno použít některých vlastností obecných soumístných rovinných kolineárních soustav při konstrukci perspektiv. Toto zrušení perspektivnosti soustav  $\varrho_1, \varrho_0 \equiv \pi$  bylo nazváno rozštěpením perspektivní kolineace otočením  $\gamma$  [5]. Střed  $O_0$  pozbyl své silné samodružnosti, osa  $z$  pozbyla své samodružnosti vůbec. Toto rozštěpení vedlo k jednoduchým konstrukcím perspektiv.

V této práci je však navrhováno rozštěpení Dürerovy soustavy (perspektivní kolineace, homologie), jímž naopak střed  $O_0$  pozbuje vůbec své samodružnosti a osa  $z$  přejde v přímku slabě samodružnou. Toho je možno dosáhnout, jak už bylo dříve uvedeno, posunutím některé ze soustav  $\varrho_1, \varrho_0 \equiv \pi$  o libovolný vektor kolineární se základnicí  $z$  (obr. 5). Budeme posouvat zpravidla soustavu základní roviny  $\varrho_1$ .

Abychom se mohli stručně vyjadřovat, zavedeme definice.



Obr. 5.

**Definice 1.4.** ( $\Sigma$ -posunutí)

Posunutí základní roviny  $\varrho_1$  Dürerovy soustavy, resp. posunutí její perspektivy  $\varrho_c$  o daný vektor  $\bar{p}$ , rovnoběžný se základnicí  $z$ , se nazývá  $\Sigma$ -posunutí (posunutí  $\Sigma$ ).

**Definice 1.5.** (rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím.)

Říkáme, že rozštěpíme danou Dürerovu soustavu (perspektivní kolíneaci, homologii)  $\Sigma$ -posunutím  $p$ , jestliže posuneme soustavu základní roviny  $\varrho_1$ , resp.  $\varrho_c$  o daný nenulový vektor  $\bar{p}$ , kolíneární se základnicí  $z$ . Mluvíme pak o prvním, resp. o druhém rozštěpení Dürerova soustavy posunutím  $p$ .

Můžeme vyslovit větu.

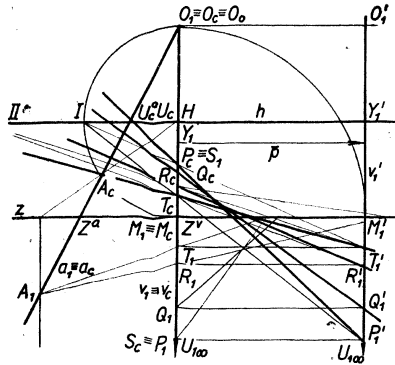
**Věta 1.5.** Rozštěpení dané Dürerovy soustavy  $\Sigma$ -posunutím  $p$  je určeno rozštěpením hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_c$ .

**Důkaz** správnosti věty vyplývá z předešlých vět a definic.

V dalším textu se budeme zabývat jednotlivými druhy Dürerovy soustavy. Nejdřív probereme druhou Dürerovu soustavu.

**§ 2. Druhá Dürerova soustava**

Nechť je dána tato soustava svým obrazem, harmonickou homologií  $(O_0, z, h)$ . Mysleme si tuto soustavu zobrazenou  $\Sigma$ -promítáním na hlavní vertikálu  $v_1 \equiv v_c$ .

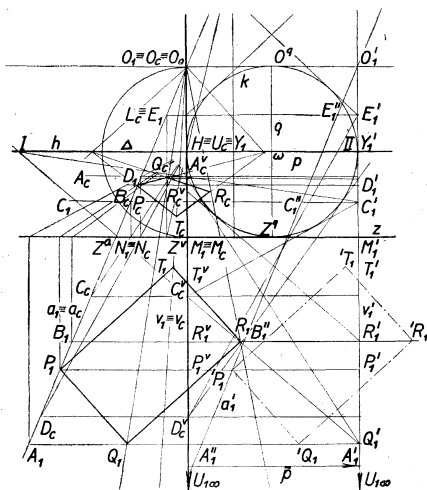


Obr. 6.

do projektivních řad  $v_1(P_1Q_1R_1T_1\dots) \asymp v_c(P_0Q_0R_0T_0\dots)$ . Posuňme soustavu  $v_1$  prostřednictvím hlavní vertikály, tj.  $\Omega$ -průmětu  $v_1$ , o vektor  $\bar{p}$ , jehož smysl je dán kladným smyslem základnice  $z$  a jehož velikost je rovna dvojnásobné vzdálenosti

(dvojnásobné výšce)  $2d = 2v$ , jak je naznačeno v obr. 6. Přímka  $v_1$  nabude polohy  $v'_1$ , její body, které byly označeny  $P_1, Q_1, R_1, T_1, \dots$  zaujmou polohu  $P'_1, Q'_1, R'_1, T'_1, \dots$ . Platí věta.

**Věta 2.1.** Bodové řady  $v_c, v'_1$ , ve které se štěpí  $\Sigma$ -posunutím slabě samodružná přímka  $v_1 \equiv v_c$ , jsou projektivní a vytvářejí kvadratický svazek přímek, určený páry přiřazených si bodů:  $P_c \rightarrow P'_1, Q_c \rightarrow Q'_1, R_c \rightarrow R'_1, \dots$ . Tomuto kvadratickému svazku náleží základnice z a přímka  $O_0O'_1 \parallel z$ , po které se posouvuje bod  $O_1$  se soustavou  $e_1$ .



Obr. 7.

**Důkaz.** a) Jak je známo z projektivní geometrie, je v harmonické homologii oddělován každý pár přiřazených si bodů  $P_1 \rightarrow P_c, Q_1 \rightarrow Q_c, \dots$  harmonicky středem  $O_0$  a osou z homologie. Bodové řady  $P_1Q_1R_1, \dots, P_cQ_cR_c, \dots$  na přímkách  $v_1 \equiv v_c$  jsou v involuci a jsou projektivní. Mají samodružné body  $M_1 \equiv M_c \in z$  a střed  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$  homologie.  $\Sigma$ -posunutím nabude řada  $v_1$  polohy  $v'_1$ , projektivnost obou řad se zachová, takže je:  $v_c(P_cQ_cR_c, \dots) \simeq v'_1(P'_1Q'_1R'_1, \dots)$ .

b) Z projektivní geometrie je dále známo, že přímky určené páry si přiřazených bodů dvou lineárních nesoumírných projektivních bodových řad v rovině tvoří

kvadratický svazek přímek, křivku 2. třídy, kuželosečku, která se dotýká nositelek obou řad.

c) Samodružné body,  $M_1 \equiv M_c$ ,  $O_1 \equiv O_c$ , se posunutím štěpí v páry  $M_c$ ,  $M'_1$ ;  $O_c$ ,  $O'_1$  a přímky  $M_c M'_1$ ,  $O_c O'_1$  jsou tedy přímkami kvadratického svazku a jsou tečnami jím určené kuželosečky, cbd.

Můžeme vyslovit přesnější větu.

**Věta 2.2.** *Kuželosečka daná kvadratickým svazkem přímek v případě druhé Dürerovy soustavy rozštěpené  $\Sigma$ -posunutím o velikosti  $2d$  je kružnice. Její dotykové body s nositelkami obou řad  $v_c$ ,  $v'_1$  jsou oba body incidentní s horizontem  $h$ , tj. bod hlavní  $H \equiv U_c \equiv \equiv Y_1$  a bod  $Y'_1 \equiv h$ ,  $v'_1$ .*

**Důkaz.** (Obr. 6, obr. 7.)

Podle základních pouček projektivní geometrie kuželoseček platí: Je-li dán kvadratický svazek přímek podle věty 2,1, pak kuželosečka jimi určená se dotýká nositelek obou bodových řad  $v_c$ ,  $v'_1$  v bodech, které odpovídají v projektivnosti obou řad společnému bodu obou nositelek, v daném případě tedy společnému bodu  $U_{1\infty}$  nositelek  $v_c$ ,  $v'_1$ .

Uvažme obě souměrné projektivní bodové řady incidentní s nositelkami  $v_c \equiv v_c$ . Jelikož jde o Dürerovu soustavu, jejíž obraz je harmonická homologie, tvoří odpovídající si body obou řad  $v_c$ ,  $v_c$  páry involuce o samodružných bodech  $Z^v \equiv M_1 \equiv \equiv M_c$ ,  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$ , jak je též známo z projektivní geometrie. Nevlastnímu bodu  $U_{1\infty} \in v_c$  odpovídá tentýž bod  $U_c \in v_c$ , ať je incidentní s kteroukoli řadou,  $v_c$ ,  $v_c$ . Je tedy  $U_{1\infty} \equiv Y_{c\infty} \rightarrow U_c \equiv Y_1$ . Při rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím řady  $v_c$  do polohy  $v'_1$  je nevlastní bod invariantní, taktéž odpovídající bod  $U_c$ , zatímco  $Y_1$  se posune do polohy  $Y'_1$ .

Správnost věty je experimentálně potvrzena tím, že je sestrojena direkční přímka  $A \equiv h$  obou projektivních bodových řad  $v_c$ ,  $v'_1$ . V obr. 6 jsou sestrojeny dva její body:  $I \equiv P'_1 T_c$ ,  $P_c T'_1$ ,  $II \equiv R'_1 T_c$ ,  $R_c T'_1$ , v obr. 7 body:  $I \equiv A'_1 C'_c$ ,  $A'_c C'_1$ ,  $II \equiv \equiv E'_1 D'_c$ ,  $E'_c D'_1$ .

Z věty 2,1 a z druhé části věty 2,2 vyplývá, že obě nositelky,  $v_c$ ,  $v'_1$ , základnice z a přímka  $O_c O'_1$  určují čtverec opsaný kuželosečce. Jelikož obě tečny  $v_c$ ,  $v'_1$  jsou navzájem rovnoběžné, je přímka určená jejich dotykovými body  $U_c$ ,  $Y'_1$  průměrem kuželosečky:  $p \equiv U_c Y'_1 \perp v_1 \equiv v_c$ .

Podle definice sdružených průměrů kuželosečky je průměr  $q$  sdružený k průměru  $p$  kolmý k tomuto průměru. Úhlopříčky opsaného čtverce  $Z^v M'_1 O'_1 O_c$  jsou však též párem sdružených průměrů kuželosečky. Má tedy kuželosečka dva páry sdružených průměrů k sobě kolmých a je to kružnice, cbd.

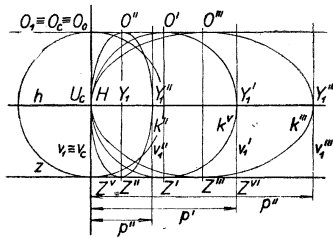
To však vyplývá i z rovnosti obou sdružených průměrů  $p$ ,  $q$  k sobě kolmých.

Danou Dürerovu soustavu můžeme rozštěpit prostřednictvím hlavní vertikály  $\Sigma$ -posunutím i jiné velikosti a smyslu, než bylo právě učiněno. V tom případě platí věta.

**Věta 2.3.** *V případě rozštěpení dané Dürerovy soustavy  $\Sigma$ -posunutím (různým od*

$\Sigma$ -posunutí) řady  $v_i$  do polohy  $v_i'$  jsou bodové řady  $v_c, v_i'$  projekční. Kuželosečka určená příslušným kvadratickým svazkem přímek je elipsa, jejíž vrcholy jsou  $H \equiv U_c = Y_1, Y_1'$ . Oba vrcholy jsou vrcholy hlavní pro  ${}^1\Sigma > \Sigma$ , vedlejší pro  ${}^1\Sigma < \Sigma$ .

**Důkaz.** (Obr. 8.)



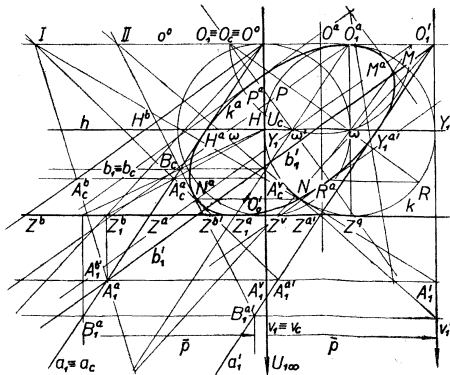
Obr. 8.

Důkaz správnosti této věty je v podstatě shodný s důkazem správnosti předešlých vět. Je třeba jen uvážit, že směr hlavní vertikály a směr posunutí rovnoběžný se základnicí z jsou sdružené směry kuželosečky  $k$ . Jeden ze sdružených průměrů,  $HY_1', HY_1''$ ,  $HY_1, \dots$  splývá stále s horizontem soustavy, druhý je rovnoběžný s tečnami v krajních jeho bodech, tedy rovnoběžný s hlavní vertikálou. Jelikož hlavní vertikála a směr posunutí jsou k sobě kolmé, jsou oba sdružené průměry osy kuželosečky  $k$ . Velikost osy  $HY_1', HY_1'', \dots$  je rovna

velikosti posunutí. Velikost osy  $Z'VO_0$  je konstantní,  $Z'VO_0 = 2d = 2v$ . Tím je správnost věty potvrzena.

Na základě toho můžeme vyslovit další větu.

**Věta 2.4.** Kuželosečky  $k$  náležící v druhé Dürerově soustavě hlavní vertikále při všech



Obr. 9.

posunutích tvoří jednoparametrickou soustavu kuželoseček o bázi  $(v, H, z, O, O_1)$ . Jejich středy vyplňují horizont soustavy.

**Důkaz.** (Obr. 8.) Důkaz správnosti věty vyplývá z dosud uvedených skutečností. Je třeba připomenout, že uvedená báze soustavy kuželoseček je invariantní vůči všem  $\Sigma$ -posunutím.

Podle vět § 1 může převzít dosavadní úlohu hlavní vertikály kterákoli slabě samodružná přímka dané Dürerovy soustavy. Jestliže tedy vytkneme libovolnou slabě samodružnou přímku  $a_1 \equiv a_c$  a přemístíme  $\Sigma$ -posunutím řadu  $a_1$  do polohy  $a'_1$ , pak platí věta obdobná větě 2,1, a 2,2.

**Věta 2,5.** *Bodové řady  $a_c, a'_1$ , ve které se rozštěpí slabě samodružná přímka  $a_1 \equiv a_c$   $\Sigma$ -posunutím, jsou projektivní a určují kvadratický svazek přímek. Příslušná kuželosečka  $k^a$  je elipsa. Dotýká se nositele  $a_c, a'_1$  obou bodových řad v bodech  $H^a, Y_1^a$ , incidentních s horizontem  $h$ . Taktéž se dotýká základnice  $z$  a přímky  $O_c O'_1$  (obr. 9.)*

**Důkaz.** Postup při zdůvodnění této věty je obdobný postupu v důkazu vět 2,1 a 2,2. Není nutné důkaz znovu uvádět, stačí připomenout, že základem důkazu je věta o involutornosti souměrných bodových řad  $a_1 \equiv a_c$ , definice pojmu sdružených průměrů elipsy a její základní vlastnosti. Z první vlastnosti plyne, že se kuželosečka  $k^a$  dotýká obou přímek  $a_c, a'_1$  v bodech  $H^a, Y_1^a$  incidentních s horizontem  $h$ , kde  $H^a \in a_c, Y_1^a \in a'_1$ . Z druhé okolnosti vyplývá, že kuželosečka  $k^a$  je elipsa, dotýkající se základnice  $z$  v bodu  $Z_1^a$ , přímky  $O_c O'_1$  v bodu  $O_1^a$ , pro které platí:  $Z^a Z_1^a = Z_1^a Z^a, O_c O_1^a = O_1^a O_c$ . Její sdružené průměry jsou tedy  $H^a Y_1^a, O_1^a Z_1^a$ .

Vzhledem k dalším úvahám je účelné si všimnout dvojice slabě samodružných přímek  $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c$  dané Dürerovy soustavy při aplikaci  $\Sigma$ -posunutí. Necht jsou tedy dány dvě takové slabě samodružné přímky (obr. 10). Označme jako přiřazené si body přímek  $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c$  ty, které si odpovídají v  $\Sigma$ -projekci přímky  $a_1 \equiv a_c$  na přímku  $b_1 \equiv b_c$ . Podrobíme-li dvojici daných přímek všem  $\Sigma$ -posunutím, zobrazí se body roviny opět do bodů této roviny, např. se zobrazí:  $A_1^a \rightarrow A_1^b, X_1^a \rightarrow X_1^b, B_1^a \rightarrow B_1^b, Y_1^a \rightarrow Y_1^b, \dots$ . Přitom nemusíme brát ohled na to, zdali pár odpovídajících si bodů jsou půdorysy nebo perspektivy, protože dané perspektivní zobrazení je involutorní.

V tomto novém zobrazení roviny obrazu Dürerovy soustavy samu na sebe budeme označovat odpovídající si body indexy  $a, b$ , např.  $A_1^a \rightarrow A_1^b, C_1^a \rightarrow C_1^b, K^a \rightarrow K^b, B_1^a \rightarrow B_1^b, \dots$  atd.

Platí následující věta.

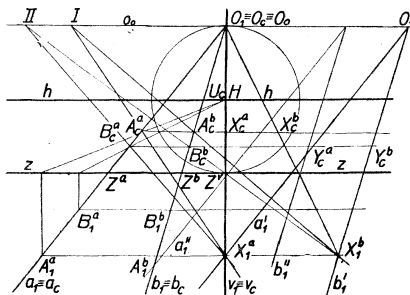
**Věta 2,6.** *Získané zobrazení roviny obrazu druhé Dürerovy soustavy na sebe samu má tyto vlastnosti:*

1. *Přímky určené páry přiřazených bodů tvoří osnovu  $\Sigma$ . Jsou při zobrazení slabě samodružnými přímkami.*
2. *Označíme-li v uvedeném zobrazení jako přímky si odpovídající ty, které jsou dány dvěma body a jejich obrazy, např.  $X_1^a A_1^a \rightarrow X_1^b A_1^b, \dots$ , pak tyto odpovídající si přímky*

mají společný bod incidentní s přímkou  $o_0$  soustavy  $\Sigma$  jdoucí středem  $O_0$  obrazu Direrovy soustavy. Tato přímka je osa zobrazení.

**Důkaz.** (Obr. 10) Správnost první části věty je zřejmá vzhledem k platnosti vět § 1 a na základě pojmu přímkové soustavy  $\Sigma$ .

Správnost druhé části věty vyplývá ze známé věty elementární geometrie: Dělicí poměr tří bodů v daném pořádku je invariantem právě jen rovnoběžného promítání. To znamená: Tři rovnoběžky  $a, b, c$  v daném pořádku protínají každou přímku s nimi různoběžnou ve třech bodech  $A, B, C$  téhož dělicího poměru. A platí též obráceně: Protínají-li tři přímky  $a, b, c$  v daném pořádku přímky s nimi a navzájem



Obr. 10.

různoběžné, každou ve třech bodech  $A, B, C$  téhož dělicího poměru, pak jsou tyto tři přímky navzájem rovnoběžné.

Tomu právě je tak v uvedeném zobrazení. Jsou dány tři přímky,  $A_1^a A_1^b \parallel A_1^b A_1^c \parallel o_0$ , které jsou profaty přímkami, např.  $a_1 \equiv a, b_1 \equiv b$ , incidentními s týmž bodem  $O_1 = O_c = O_b$  v trojicích bodů téhož dělicího poměru:  $(A_1^a A_1^b O_0) = (A_1^b A_1^c O_0)$ . Platí:  $A_1^a O_0 : A_1^b O_0 = A_1^b O_0 : A_1^c O_0 = A_1^a A_1^b : A_1^b A_1^c$ .

Uvažme obráceně dvě přímky, např.  $X_1^a X_1^b, X_1^b X_1^c$ . Zřejmě platí:  $X_1^a X_1^b = A_1^a A_1^b$ , neboť jsou obě incidentní s touž přímkou osnovy  $\Sigma$ . Dále platí:  $X_1^a X_1^b \neq A_1^a A_1^b$ , neboť jsou obě tyto úsečky incidentní s různými přímkami osnovy  $\Sigma$ . Proto jsou obě přímky  $X_1^a X_1^b, X_1^b X_1^c$  různoběžné a protínají se např. v bodu  $I$ .

Dále platí:  $X_1^a X_1^b : A_1^a A_1^b = A_1^a A_1^b : A_1^b A_1^c = X_1^a I : A_1^a I = X_1^b I : A_1^b I$ . Jsou tedy dělicí poměry  $(A_1^a A_1^b O_0) = (A_1^b A_1^c O_0) = (X_1^a X_1^b I) = (X_1^b X_1^c I)$  sobě rovny a společný průsečík  $I$  uvedených párek je incidentní s přímkou  $o_0 \equiv O_c O_1$ , cbd.

Zobrazení, které má uvedené vlastnosti, je perspektivně afinní zobrazení. Můžeme vyslovit větu.

**Věta 2,7.** *Zobrazení, o němž je pojednáno v předešlé větě, je perspektivní afinita, a to její speciální případ, v němž invariantní (slabě samodružné) přímky jsou rovnoběžné s osou afinity. Zobrazení je afinní elace.*

**Důkaz** správnosti věty vyplývá z definice perspektivní afinity a afinní elace.

Podle vět 2,1; 2,2; 2,3 náleží každé slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  druhé Dürerovy soustavy kuželosečka  $k^a$  jako obálka příslušného kvadratického svazku přímek při daném rozštěpení dotyčné samodružné přímky. Bylo pojednáno o dvou slabě samodružných přímkách a jim přiřazených kuželosečkách,  $v_1 \equiv v_c \rightarrow k$ ,  $a_1 \equiv a_c \rightarrow k^a$ . Vzhledem k větám 2,6; 2,7 platí následující věta.

**Věta 2,8.** *Kuželosečky  $k^a$ ,  $k^b$  příslušné slabě samodružným přímkám  $a_1 \equiv a_c$ ,  $b_1 \equiv b_c$  druhé Dürerovy soustavy při rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím jsou ve vztahu afinní elace. Osa elace je přímka osnovy  $\Sigma$  incidentní se středem  $O_0$ , případně s  $O'_0$ .*

**Důkaz.** (Obr. 9) Necht jsou dány slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$ ,  $b_1 \equiv b_c$  dané druhé Dürerovy soustavy a její rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím. Tímto rozštěpením se druzí body a přímky roviny podle věty 2,6 v páry afinní elace. Tak si odpovídají body a přímky  $A'_1 \rightarrow A''_1$ ,  $Z^a \rightarrow Z^b$ ,  $H^a \rightarrow H^b$ ,  $A''_c \rightarrow A''_c$ ,  $a_1 \rightarrow b_1$ ,  $a'_1 \rightarrow b'_1$ , ... Podle toho si též odpovídají přímky  $A''_1 A''_c \rightarrow A''_1 A''_c$ . Avšak přímka  $A''_1 A''_c$ , resp.  $A''_1 A''_c$  je incidentní s kvadratickým svazkem přímek příslušícím samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$ , resp. s kvadratickým svazkem přímek příslušícím samodružné přímce  $b_1 \equiv b_c$ . Jsou tedy přímky obou svazků sdružené v afinní elaci a oba svazky jsou ve vztahu afinní elace, cbd.

Věta 2,8 platí i pro dvojice  $a_1 \equiv a_c$ ,  $v_1 \equiv v_c$ , kde  $a_1 \equiv a_c$  je libovolná slabě samodružná přímka dané perspektivní kolineace. Z toho vyplývá další věta.

**Věta 2,9.** *Kuželosečka  $k^a$  náležící slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  daného obrazu Dürerovy soustavy je ve vztahu afinní elace s kružnicí  $k$  náležící hlavní vertikále  $v_1 \equiv v_c$ .*

**Důkaz.** (Obr. 9) Kuželosečky  $k^a$ ,  $k^b$  náležící dvěma slabě samodružným přímkám  $a_1 \equiv a_c$ ,  $b_1 \equiv b_c$  jsou podle věty 2,8 ve vztahu afinní elace. Tedy také kuželosečky  $k^a$ ,  $k$  náležící samodružným přímkám  $a_1 \equiv a_c$ ,  $v_1 \equiv v_c$  jsou v tomto vztahu. Avšak kuželosečka náležící hlavní vertikále je kružnice. Jsou tedy  $k^a$ ,  $k$  ve vztahu afinní elace, cbd.

To, co bylo učiněno u hlavní vertikály, je možno učinit u slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$ . Je možno na ni aplikovat všechna  $\Sigma$ -posunutí. Při každém takovém posunutí náleží přímce  $a_1 \equiv a_c$  kuželosečka  $k^a$ . Platí věta.

**Věta 2,10.** *Kuželosečky  $k^a$  náležící slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  při rozštěpení harmonické homologie všemi  $\Sigma$ -posunutí tvoří jednoparametrickou soustavu kuželoseček o bázi  $(a_1 H, z, O_0 O'_1)$ .*

**Důkaz.** Z předešlých úvah je patrné, že samodružná přímka  $a_1 \equiv a_c$  se  $\Sigma$ -posunutím rozštěpí v přímky  $a_c$ ,  $a'_1$ , při čemž je  $a_c$  s bodem  $H^a$  invariantní vzhledem ke každému  $\Sigma$ -posunutí. Taktéž je invariantní základnice  $z$  a přímka  $O_0 O'_1$  jako přímky incidentní s osnovou  $\Sigma$ , cbd.

V další části článku bude označena kuželosečka náležící hlavní vertikále  $v_1 \equiv v_c$ ,



resp. samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  při  $\Sigma$ -posunutí a při  ${}^n\Sigma$ -posunutí jako kuželosečka  $k$ ,  ${}^n k$ , resp.  $k^*$ ,  ${}^n k^*$ .

Na základě uvedených výsledků můžeme řešit dvě úlohy.

**Úloha 2,1.** Je sestrojít kuželosečku  ${}^n k^*$  náležící slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  při rozštěpení dané perspektivní kolíneace  ${}^n\Sigma$ -posunutím, jestliže je  ${}^n k^*$  uvažována jako afinní obraz kružnice  $k$  nebo jiné kuželosečky  $k$ .

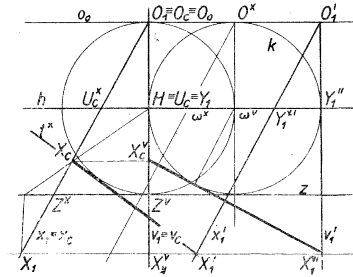
**Úloha 2,2.** V obrazu dané druhé Dürerovy soustavy je sestrojít perspektivu  $X_c$  bodu  $X$  určeného půdorysem  $X_1$ .

**Řešení úlohy 2,1.** Sestrojení kuželosečky je známé. Zvolenému páru kolmých průměrů kružnice  $k$  sestrojíme afinní přímkou, které jsou sdruženými průměry odpovídající elipsy  $k^*$ . Přímou však je dán

pár sdružených průměrů  $H^a Y_1^a$ ,  $O_1^a Z_1^a$ . Je však možno určit hned osy elipsy. Určíme v kružnici  $k$  ten pár kolmých průměrů  $MN$ ,  $PR$ , kterým odpovídají v afinní elipse kolmé průměry, tj. osy  $M^a N^a$ ,  $P^a R^a$  (obr. 9).

**Řešení úlohy 2,2.** (Obr. 11, aplikováno  ${}^1Q$ -promítání).

1. Sestrojíme slabě samodružnou přímku  $x_1 \equiv x_c \equiv X_1 O_0$ .
2. Rozštěpíme harmonickou homologii  $\Sigma$ -posunutím přímky  $x_1$  do polohy  $x_1'$ . Bod  $X_1$  přejde do polohy  $X_1'$ .



Obr. 11.

3. Sestrojíme kuželosečku  $k^*$ , náležící samodružné přímce  $x_1 \equiv x_c$  při  $\Sigma$ -posunutí, jejíž sdružené průměry jsou  $U_c^x Y_1^x$ ,  $O^x \omega^x \parallel x_1$  a která je obálkou příslušného kvadratického svazku přímek. S ním je incidentní přímka  $X_1' X_c$ , kde  $X_c$  je perspektiva bodu  $X_1$ .

4. Sestrojíme bodem  $X_1'$  tečnu  $t^x$  ke kuželosečce  $k^*$ . Její průsečík se samodružnou přímkou  $x_1 \equiv x_c$  je perspektiva  $X_c$ :  $X_c \in (x_1 \equiv x_c)$ ,  $X_c \in t^x \cdot (x_1 \equiv x_c)$ .

Na základě vět § 1 můžeme sestrojít perspektivu  $X_c$  bodu  $X$  mnohem jednodušeji, což zpravidla činíme (obr. 11).

**Postup je tento:**

1. Jako dříve.
2. Zobrazíme v  $\Sigma$ -projekci slabě samodružnou přímku  $x_1 \equiv x_c$  na hlavní vertikálu  $v_1 \equiv v_c$ . Bod  $X_1$  se zobrazí do bodu  $X_1^v$ .
3. Rozštěpíme soustavu tím, že rozštěpíme hlavní vertikálu posunutím přímkou  $v_1$



a) Připevníme rýsovací papír s prvky obrazu Dürerovy soustavy a s půdorysem obrazce na rýsovací desku.

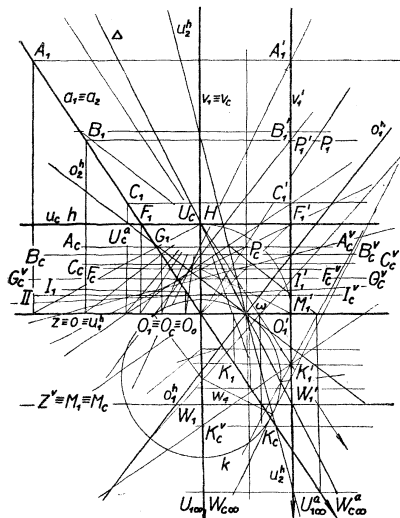
b) Centrujeme pravítka  ${}^3P$ ,  ${}^3Q$ , upevníme pravítko  ${}^1Q$  a přiložíme pravítko  ${}^1P$  k hraně  $r$  desky. Spojíme v čepu  $U$  pravítka  ${}^1P$ ,  ${}^2Q$  a zapustíme čep do drážky pravítka  ${}^1Q$ .

c) Při konstrukci perspektivy  $A_c$  bodu  $A$  sestrojíme podél hrany pravítka  ${}^3P$  přímkou  $a_1 = a_c$ . Posuneme pravítkem  ${}^1P$ , aby jeho hrana byla incidentní s půdorysem  $A_1$  a nakreslíme podél hrany pravítka  ${}^2Q$  přímkou.

d) Jejím průsečíkem  $A_c^v$  s hlavní vertikálou  $v_1 = v_c$  vedeme přímkou osnovy  $\Sigma$  pomocí pravítka  ${}^2P$ , jejíž společný bod  $A_c$  se samodružnou přímkou  $a_1 = a_c$  řeší úkol.

Při rozštěpení homologie representovaném rozštěpením přímkou  $a_1 = a_c$  pozůstává konstrukce perspektivy z těchto tří základních operací. Třetí z nich, sestrojení tečny z daného bodu  $A_1'$  ke kuželosečce  $k^s$ , je obtížnější. Vzhledem k této části konstrukce perspektivy nebude patrně od mechanisace sestrojení perspektivy při rozštěpení slabě samodružné přímkou různé od hlavní vertikály žádoucí.

Uvážíme ještě druhou Dürerovu soustavu při aplikaci  ${}^2Q$ -promítání na základní rovinu  $q$ . Její obraz je kolineární



Obr. 13.

elace se středem  $O_0$  incidentním se základnicí  $z$ . (V obr. 13 je střed označen  $O_1 = O_c = O_0$ .) Dříve než tak učiníme, připomeneme důležitou větu o vztahu středu a osy perspektivní kolineace k oběma úběžnicím. O tuto větu se budeme opírat při dalších úvahách o Dürerově soustavě a o jejím rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím.

**Věta 2.11.** Vzdálenost středu  $O_0$  perspektivní kolineace souměrných rovinných soustav  $q_1, q_c$  od jedné z úběžnic je rovna i co do smyslu vzdálenosti druhé úběžnice od osy  $o = z$  této kolineace.

**Důkaz** správnosti věty je všeobecně znám.

Nechť je dána kolineární elace jako obraz druhé Dürerovy soustavy při aplikaci  ${}^2\Omega$ -promítání (obr. 13). Zrušíme perspektivnost soustavy posunutím roviny  $\varrho_1$  prostřednictvím hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_c$  o vektor velikosti  $p = 2d = 2v$  v kladném smyslu základnice  $z$ . Platí věta.

**Věta 2,12.** *Bodyvé řady  $v_c(A_c B_c C_c \dots) \bar{\cap} v'_1(A'_1 B'_1 C'_1 \dots)$  incidentní s nositelkami  $v_c, v'_1$  jsou projektivní a určují kvadratický svazek: přímek obalující kuželosečku  $k$  přiřazenou uvedenému  $\Sigma$ -posunutí. Tato kuželosečka je hyperbola, její jedna asymptota splývá se základnicí  $z$ . Nositelka  $v_c, v'_1$  obou řad se dotýká v bodu  $H$ , resp.  $W'_1$ , pro něž platí:  $W'_1 O'_1 = O_1 H$ .*

**Důkaz.** Správnost první části věty vyplývá z úvah o Dürerově soustavě, v níž bylo aplikováno  ${}^2\Omega$ -promítání, a z pouček projektivní geometrie.

V projektivní geometrii se učí, jak už bylo dříve uvedeno, že dotykové body kuželosečky  $k$  s oběma nositelkami  $v_c, v'_1$  náležejí v projektivnosti řad s nimi incidentních jejich společnému bodu počítanému do jedné nebo druhé řady. Ale obě nositelky mají společný nevlastní bod  $U_{1\infty} \equiv W_{c\infty}$ , jemuž přísluší v obou řadách body  $U_c \equiv H$ , resp.  $W'_1$  jako úběžníky obou řad  $v_c, v'_1$ . S těmito úběžníky jsou incidentní úběžnice  $u_c \equiv h, w_1$ . Avšak podle věty 2, 11 platí:  $O_0 \rightarrow u_c \equiv h = w_1 \rightarrow z$  i co do smyslu. Z toho vyplývá, že úběžnice  $w_1$  je souměrně položená k horizontu  $u_c \equiv h$  podle základnice  $z$ . Z toho vyplývá rovnost:  $W'_1 O'_1 = O_1 H$ .

Oběma body  $U_c \equiv H, W'_1$  je určena podle pouček projektivní geometrie směry přímky  $l$  obou projektivních řad  $v_c \parallel v'_1$ . Z rovnoběžnosti těchto řad pak plyne, že směry přímky je průměrem kuželosečky  $k$ , obsahujícím její střed  $\omega$ , střed úseky  $U_c W'_1$ . Ten je však incidentní podle pouček elementární geometrie se základnicí  $z$ .

Základnice  $z \equiv O_c O'_1$  jako spojnice přiřazených bodů  $O_c, O'_1$  obou projektivních řad  $v_c, v'_1$  je tečnou kuželosečky  $k$ . Odděluje oba body  $U_c, W'_1$  této kuželosečky, která je proto hyperbola. Jelikož je základnice  $z \equiv O_c O'_1$  incidentní se středem  $\omega$  kuželosečky  $k$ , je její asymptotou  $u_1^2$ , cbd.

V obr. 13 jsou sestrojeny bodové řady na hlavní vertikále  $v_1 \equiv v_c$  i  $v'_1$  pomocí  $\Sigma$ -průmětí projektivních řad na slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$ . Je sestrojeno několik přímek kvadratického svazku (tečen kuželosečky  $k$ ) a pomocí kvadratických bodových řad na pomocné kružnici jsou sestrojeny osy  $o_1^1, o_2^1$  kuželosečky  $k$  a druhá asymptota  $u_2^1$ .

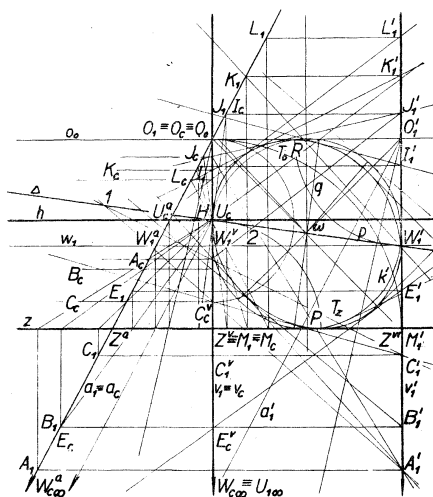
Perspektivu daného bodu  $P_1$  sestrojíme známým způsobem:

1. Sestrojíme slabě samodružnou přímku  $O_c P_1$ .
2. Sestrojíme  $\Sigma$ -průmět  $P'_1$  bodu  $P_1$  na přímku  $v'_1$ .
3. Vedeme jím tečnu  $P'_1 P'_c$  ke kuželosečce  $k$  a výtkneme její průsečík  $P_c^v$  s přímkou  $v_c$ .
4. Přímka osnovy  $\Sigma$  incidentní s bodem  $P_c^v$  určuje hledanou perspektivu  $P_c$ .  $P_c \equiv P_1 O_0 \cdot P_c^v P_c$ . (V obr. 13 není bod  $P_c^v$  označen.)

§ 3. První Dürerova soustava

Nechť je dána tato soustava svým obrazem, perspektivní kolíneací  $(O_0, z, h)$  pro  $d < v$  (obr. 14) při aplikaci  ${}^1\Omega$ -promítání základní roviny  $\rho$  do průmětny  $\pi$ .

V celém rozsahu následujících úvah užijeme vět uvedených od začátku kapitoly a zrušíme perspektivnost soustavy rozštěpením hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_e$   $\Sigma$ -posunutím velikosti  $d + v$  v kladném smyslu základnice  $z$ , které reprezentuje podle věty 1,5 rozštěpení dané Dürerovy soustavy. Základní bod  $Z^V \equiv M_1 \equiv M_e$  se rozštěpí ve



Obr. 14.

dvojici  $M_e, Z^{V'} \equiv M_1'$ . Podobně střed  $O_1(O_1 \equiv O_e \equiv O_0)$  vytvoří rovnoběžku  $O_e O_1'$  se základnicí. Půdorys přímky  $v_1$  přejde do polohy  $v_1'$  i se soustavou bodů  $A_1', B_1', C_1', \dots$ . Ta je  $\Sigma$ -průmětem soustavy bodů  $A_1, B_1, C_1, \dots$  incidentní s libovolnou přímkou  $a_1$ , součástí slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_e$ . Tento  $\Sigma$ -průmět na  $v_1$  není v obraze 14 popsán, je označena jen dvojice  $C_1 \rightarrow C_1'$ .

Platí v celém rozsahu věta 2,1. Důkaz její správnosti je veden jako dříve. Obě řady  $v_e(A_1' B_1' C_1' \dots)$  a  $v_1'(A_1' B_1' C_1' \dots)$  jsou projektivní, určují kvadratický svazek přímek, jenž určuje kuželosečku  $k$  náležící  $\Sigma$ -posunutí. Je možno to říci přesněji větou.

**Věta 3.1.** *Obě projekční bodové řady  $v_e(A_e^X B_e^Y C_e^Z \dots) \bar{\cap} v'_e(A'_e B'_e C'_e \dots)$  incidentní s nositelkami  $v_e, v'_e$  určují kvadratický svazek přímek, obalující kuželosečku  $k$  příslušnou danému  $\Sigma$ -posunutí. Tato kuželosečka je elipsa, dotýkající se obou nositelek  $v_e, v'_e$ , základnice  $z$  a přímkou  $O_e O'_e$ , je tedy vepsána do čtverce  $O_e M_e M'_e O'_e$ . Přímkou  $v_e$  se dotýká v hlavním bodu  $H$ .*

**Důkaz.** (Obr. 14) Správnost první části věty je zřejmá. Kuželosečka  $k$  se dotýká nositelek  $v_e, v'_e$  v bodech  $U_e, W'_e$  projektivně přiřazených společnému bodu  $U_{1\infty} \equiv W_{e\infty}$  obou nositelek, jak se učí v projektivní geometrii. Přímkou  $U_e W'_e$  jimi určená je direkční přímka  $A$  obou řad  $v_e, v'_e$ . Na základě poznatků z projektivní geometrie jsou sestrojeny dva její body:  $1 = A'_e C'_e \cdot A'_e C'_e$ ,  $2 = A'_e J'_e \cdot A'_e J'_e$ . Dotykové body  $U_e, W'_e$  jsou jednak úběžníkem přímkou  $v_1 \in \varrho_1$ , který splývá s hlavním bodem,  $U_e \equiv H$ , jednak  $\Sigma$ -průmět  $W'_e$  úběžníku  $W'_e$  přímkou  $v_e \in \varrho_e \equiv \pi$  na posunutou přímkou  $v'_e$ , tedy  $W'_e \equiv w_1 \cdot v'_e$ .

Obě tečny  $v_e, v'_e$  kuželosečky  $k$  jsou navzájem rovnoběžné, a proto přímka daná jejich dotykovými body  $U_e, W'_e$  je průměrem této kuželosečky.

Při aplikaci  $\Omega$ -promítání v Dürerově soustavě je střed  $O_0$  obrazu soustavy vnějším bodem rovinného pásu  $hz$ . Podle věty 2,11 náleží úběžnice  $w_1$  tomuto pásu  $hz$ . Z toho plyne, že oba dotykové body  $U_e \equiv H, W'_e$  jsou vnitřními body stran  $O_e Z'_e, O'_e M'_e$  čtverce  $O_e M_e M'_e O'_e$  opsaného kuželosečce  $k$ .

Body kuželosečky  $k$  nemohou být vnějšími body uvedeného čtverce tečen. V tom případě by byla kuželosečka  $k$  hyperbolou a její body by byly incidentní s rovinným pásem ohraničeným přímkami  $O_e O'_e, z$ , což není možné. Body kuželosečky  $k$  náleží vnitřku čtverce  $O_e M_e M'_e O'_e$  a kuželosečka je elipsa nebo kružnice. Avšak směry  $HW'_e, v_e$ , resp.  $v'_e$  jsou sdružené směry kuželosečky. Jelikož svírají nikoli úhel pravý, je podle definice sdružených průměrů kružnice a elipsy vyloučena kružnice. Je tedy kuželosečka  $k$  elipsa, cbd.

V obr. 14 je sestrojeno několik přímek kvadratického svazku a je z nich zřejmý průběh elipsy  $k$ . Abychom ji sestrojili, je třeba určit pár jejich sdružených průměrů nebo její osy. Vyslovíme další větu.

**Věta 3.2.** *Střed  $\omega$  úsečky  $HW'_e$  je střed elipsy  $k$ . Přímkou  $p \equiv HW'_e$  a přímkou  $q$  incidentní se středem  $\omega$  rovnoběžná s  $v_1 \equiv v_e$  tvoří pár jejich sdružených průměrů. Střed elipsy  $k$  splývá se středem opsaného čtverce  $O_e M_e M'_e O'_e$ . Úhlopříčky tohoto čtverce jsou osami elipsy  $k$ .*

**Důkaz.** (Obr. 14). a) Správnost první části věty je zřejmá, vyplývá z definice sdružených průměrů kuželosečky.

b) V opsaném čtverci  $O_e M_e M'_e O'_e$  je podle věty 2,11  $O_e W'_e = HM_1, HW'_e = HW'_e$ , a proto  $O_e W'_e - HW'_e = HM_1 - HW'_e, O_e H = W'_e Z'_e$ . Avšak  $W'_e Z'_e = W'_e Z'_e$ , tedy  $O_e H = W'_e Z'_e$ , a proto i  $HZ'_e = O'_e W'_e$ . (1)

Bod  $\omega$  je středem úsečky  $HW'_e$ , je tedy incidentní s osou pásu ohraničeného přímkami  $v_1 \equiv v_e, v'_e$ . Podle rovnosti (1) je však incidentní s osou pásu  $z_0$  ( $o_0 \equiv O_e O'_e$ ). Je tedy středem čtverce  $O_e M_e M'_e O'_e$ .

c) Z elementární geometrie kuželoseček je známa věta o úhlopříčkách opsaného rovnoběžníka kuželosečce jako jejich sdružených průměrů. Úhlopříčky čtverce jsou však k sobě kolmé a jsou to osy kuželosečky  $k$ , cbd.

Snadno určíme i dotykové body  $T_2, T_0$  elipsy  $k$  s oběma jejími tečnami  $Z'Z'' \equiv z$ ,  $O_c O'_c \equiv o_c$ . Z elementární geometrie kuželoseček je známo, že úseky tečen vedených z bodu osy kuželosečky, ohraničené společným bodem a body dotyku, jsou shodné. Proto pro dotykové body  $T_2, T_0$  obou tečen platí:  $Z'T_2 = Z'H$ ,  $O_c T_0 = O_c H$ ,  $O'_c T_0 = O'_c W'_1, \dots$ . Průměr  $q$  sdružený s průměrem  $p \equiv HW'_1$  omezíme body  $P, R$  známým způsobem pomocí kružnice  $k'$  afinní k elipse  $k$  podle průměru  $HW'_1$  jako osy afinity.

Aplikujeme-li v dané Dürerově soustavě  ${}^2\Sigma$ -posunutí různá od  $\Sigma$ -posunutí, je kuželosečka  $k$  příslušná  ${}^2\Sigma$ -posunutí náležící hlavní vertikále určena pěti jednoduchými podmínkami: tečnou  $v$ , s dotykovým bodem  $H$  a třemi dalšími tečnami,  $z$ ,  $O_c O'_c \equiv o_c, O'_c v_1^a, v_1^a \parallel v_1$ , na níž je dán dokonce její dotykový bod  $W_1^a \equiv w_1 \cdot v_1^a$ .

Můžeme vyslovit další větu.

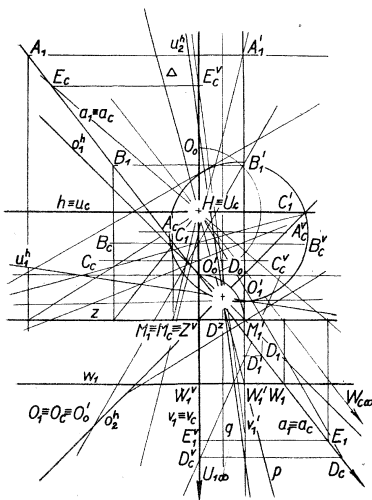
**Věta 3.3.** *Kuželosečky příslušící v dané Dürerově soustavě hlavní vertikále při  ${}^2\Sigma$ -posunutích, kde  $n$  se vztahuje k velikosti  $\Sigma$ -posunutí, tvoří jednoparametrickou soustavu kuželoseček o bázi ( $v_2 H, z, O_c O'_c$ ).*

**Důkaz** správnosti věty je obdobný důkazu správnosti věty 2.4.

Nechť je dána první Dürerova soustava svým obrazem ( $O_0, z, h$ ) při aplikaci  ${}^2\Omega$ -promítání na základní rovinu  $\varrho$  a na střed  $O$ . (Obr. 15). Platí věty obdobné větám uvedeným v předchozích případech. Pro konstrukci perspektivy bodu incidentního se základní rovinou je opět důležitá kuželosečka  $k^s$  náležící slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  při rozštěpení  ${}^2\Sigma$ -posunutím, zvláště kuželosečka  $k$  náležící hlavní vertikále  $v_1 \equiv v_c$  při  $\Sigma$ -posunutí, kdy

rovnoběžník  $O_0 M_c M'_c O'_0$ , opsaný kuželosečce  $k$ , je čtverec. Můžeme vyslovit větu.

**Věta 3.4.**  *$\Sigma$ -posunutí, o kterém bylo právě mluveno, je velikosti  $v - d$ .*



Obr. 15.

**Důkaz.** (Obr. 15.) Při aplikaci  ${}^2\Omega$ -promítání v první Dürerově soustavě je  $O'_0H = d$ ,  $O'_0H < HZ'$ ,  $HZ' = v$ , a proto je  ${}^2\Omega$ -průmět  $O'_0$  středu  $O$  perspektivního promítání vnitřním bodem úsečky  $HZ'$  incidentní s hlavní vertikálou. Úsečka  $O'_0Z' = O'_1M'_1 = v - d$ . Jelikož přímka  $v_e$ , základnice  $z$  a přímka posunutí středu  $O'_1$  jsou invariantní při každém  ${}^2\Sigma$ -posunutí aplikovaném na hlavní vertikálu za účelem rozštěpení homologie, je  $Z'M'_1 = Z'O'_0 = v - d$ , cbd.

Při rozštěpení hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_e$  první Dürerovy soustavy při aplikaci  ${}^2\Omega$ -promítání  $\Sigma$ -posunutím velikosti  $v - d$  platí následující věta.

**Věta 3.5.** *Za podmínek právě uvedených je kuželosečka  $k$  příslušná  $\Sigma$ -posunutí hyperbola. Její osy jsou incidentní s úhlopříčkami čtverce  $O_eM_eM'_1O'_1$ .*

**Důkaz.** (Obr. 15.) a) Jako v případě aplikace  ${}^2\Omega$ -promítání jsou bodové řady  $v_e, v'_1$  projektivní a určují kvadratický svazek přímek obalující kuželosečku  $k$ . Kuželosečka se dotýká nositele obou řad  $v_e, v'_1$ , a to první v hlavním bodě  $H \equiv U_e$ , který náleží v kolíneaci příseček obou nositelů  $U_{1\infty}$ . Druhé se dotýká v bodě  $W'_1$ , odpovídajícím témuž nevlastnímu bodu  $U_{1\infty} \equiv W_{e\infty}$ . Tento bod  $W'_1$  je incidentní s úběžnicí  $w_1$  soustavy roviny  $\pi$ . Oba dotykové body jsou incidentní s direkční přímkou  $A$  obou bodových projektivních řad  $v_e, v'_1$ .

b) Jak bylo uvedeno v důkazu věty 3.4, je střed  $O'_0$  obrazu Dürerovy soustavy při aplikaci  ${}^2\Omega$ -promítání vnitřním bodem úsečky  $HZ'$ , tedy vnitřním bodem pásu  $hz$ . Podle věty 2.11 náleží úběžnice  $w_1$  polorovině o hraniční přímce  $z$ , opakně k rovinnému pásu  $zh$ . Protože  $H \equiv U_e$  je incidentní s horizontem  $h$ , je úběžnice  $w_1$  incidentní s opačnou polorovinou k polorovině  $zH$ , čili bod  $H \equiv U_e$  a úběžnice  $w_1$  jsou oddělovány základnicí  $z$ .

Průsečík  $W'_1 \equiv w_1 \cdot v'_1$  a bod  $H \equiv U_e$  jsou však body kuželosečky  $k$ , jsou oddělovány základnicí  $z$ , která je její tečnou. Kuželosečka  $k$  je tedy hyperbola.

c) Obě přímky  $v_e, v'_1$  jsou tečnami kuželosečky  $k$ ,  $H \equiv U_e, W'_1$  jejich dotykové body. Proto je přímka  $A \equiv U_eW'_1$  průměrem kuželosečky  $k$ .

Nechť  $A \equiv U_eW'_1$  protne základnici  $z$  v bodu  $D_z$  a přímku  $o_0 \equiv O'_0O'_1$  v bodu  $D_0$ . Z platnosti věty 2.11 plyne shodnost trojúhelníků:  $AO'_0D_0H \cong \Delta M'_1D_zW'_1, \Delta Z'V'D_zH \cong \Delta O'_1D_0W'_1$  a tedy rovnost:  $O'_0D_0 = D_zM'_1, D_0O'_1 = Z'V'D_z$ . Direkční přímka  $A$  je incidentní se středem čtverce  $O'_0M_eM'_1O'_1$ , který je zároveň středem průměru  $HW'_1$ .

d) Strany čtverce  $O'_0M_eM'_1O'_1$  jsou tečnami kuželosečky  $k$ , čtverec je tedy této kuželosečce opsán. Jeho úhlopříčky splývají s osami kuželosečky  $k$ , což bylo prokázáno ve větě 3.2. Tím je správnost věty dokázána.

Postup při konstrukci hyperboly  $k$  náležíci  $\Sigma$ -posunutí je tento: 1. Sestrojíme obě projektivní bodové řady  $(A'_1B'_1C'_1 \dots) \overline{\wedge} (A''_1B''_1C''_1 \dots)$  incidentní s hlavní vertikálou  $v_1 \equiv v_e$  pomocí  $\Sigma$ -projekce bodových řad  $(A_1B_1C_1 \dots) \overline{\wedge} (A_eB_eC_e \dots)$  libovolně slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_e$  různé od hlavní vertikály. V obr. 15 nejsou tyto řady na přímce  $v_1 \equiv v_e$  označeny.

2. Posuneme řadu  $v_1$  do polohy  $v'_1$   $\Sigma$ -posunutím velikosti  $v - d$ .

3. Sestrojíme úběžnici  $w_1 \in W'_1, O'_0W'_1 = HZ'$  i co do smyslu. Bod  $W'_1 \equiv w_1 \cdot v'_1$  je



dotykový bod tečny  $v'_1$  s kuželosečkou  $k$ , zatím co  $H \equiv U_x$  je dotykový bod tečny  $v_e$  s touto kuželosečkou. Místo úběžnice  $w_1$  je možno sestrojiti směrem přímkou  $A$  obou projektivních bodových řad  $v_e, v'_1$ , např. sestrojením dvou jejich bodů. Její společný bod s nositelkou  $v'_1$  je dotykový bod  $W'_1$  s hyperbolou  $k$ . Provedením obou konstrukcí je dána kontrola správnosti sestrojení.

4. Vytkneme dva páry involuce sdružených průměrů  $o_1^a, o_2^a, p, q$  a určíme asymptoty jako samodružné páry této involuce. Omezíme osy hyperboly  $k$ .

5. Zkontrolujeme správnost jejího sestrojení pomocí některých jejích tečen, přímek příslušného kvadratického svazku.

**Konstrukce** perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou  $\varrho$ , např. jeho bodu  $A_e$  je tato:

1. Sestrojíme samodružnou přímkou  $O'_0A_1$  incidentní s hledanou perspektivou  $A_e$ .
2. Sestrojíme  $\Sigma$ -průmět  $A'_1$  bodu  $A_1$  na přímkou  $v'_1$ .
3. Sestrojíme tečnu z tohoto bodu  $A'_1$  k hyperbole  $k$  a vytkneme její průsečík  $A''$  s přímkou  $v_e$ .
4.  $\Sigma$ -průmět tohoto bodu na přímkou  $O'_0A_1$  je hledaná perspektiva  $A_e$  bodu  $A \in \varrho$ .

Je třeba ještě připomenout bez důkazu, že hyperboly  $^n k$  náležící hlavní vertikále při všech  $^n \Sigma$ -posunutích jsou ve vztahu ortogonální afinity s hyperbolou náležící  $\Sigma$ -posunutí. Její osa je hlavní vertikála, koeficient afinity je symbolicky  $q = {}^n \Sigma : \Sigma$ .

Kuželosečky  $^n k^s$  posunutí  $^n \Sigma$  náležící libovolné slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_e$  jsou mezi sebou v klinogonálně afinním vztahu o ose afinity v přímce  $a_1 \equiv a_e$  a koeficient afinity  $q = {}^n \Sigma : \Sigma$ . Jsou však ve vztahu afinní elace k hyperbole  $k$  náležící hlavní vertikále při  $\Sigma$ -posunutí. Osa elace je přímka  $o_0 = O_0O'_1$ .

#### § 4. Třetí Dürerova soustava

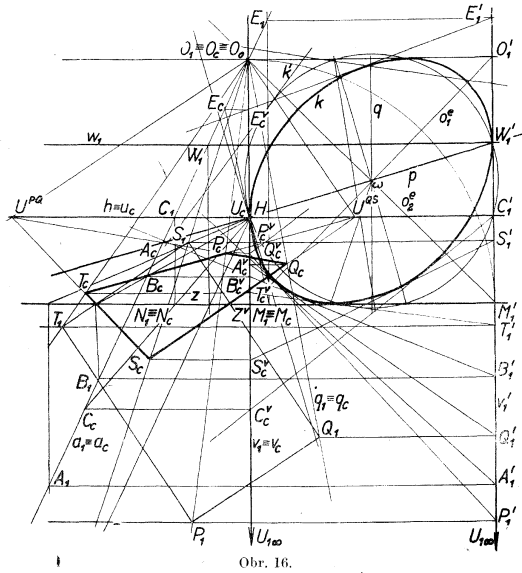
V obr. 16, 17 je nakreslen obraz třetí Dürerovy soustavy, pro níž je  $d > v, O_0H > > HZ'$ . Obr. 16 představuje tento případ při aplikaci  ${}^1 \Omega$ -promítání, obr. 17 při aplikaci  ${}^2 \Omega$ -promítání. Uvažme v krátkosti obr. 16.

Ke kreslení perspektiv je i zde výhodné použít při rozštěpení soustavy  $\Sigma$ -posunutí hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_e$ . V tomto případě je toto posunutí velikosti  $d + v$ , jak je z obrazu patrné. Lze dokázat, že kuželosečka  $k$  náležící  $\Sigma$ -posunutí je elipsa s dotykovými body  $H \equiv U_x, W'_1$  tečen  $v_e, v'_1$ , incidentními s směrem přímkou  $A$  projektivních řad  $v_e, v'_1$ . Úhlopříčky opsaného čtverce  $O_e M_e M'_1 O'_1$  jsou jejími osami  $o_1^e, o_2^e$  (co do polohy),  $p, q$  je druhý pár sdružených průměrů.

Osy omezíme opět pomocí afinity. Za její osu vezmeme směrem přímkou  $A$ , průměr elipsy  $k$ . Za afinní kružnici vezmeme kružnici  $k'$  opsanou nad průměrem  $HW'_1$ .

V obr. 16 je sestrojena perspektiva obdélníka  $PQST$  daného půdorysem  $P_0Q_0S_0T_0$  pomocí kuželosečky  $k$ . Konstrukce je obdobná konstrukci perspektivy popsané na konci předchozího paragrafu. Jsou sestrojeny  $\Sigma$ -průměty  $P'_0Q'_0S'_0T'_0$  půdorysů jeho vrcholů na přímkou  $v'_1$ . Jimi jsou vedeny tečny  $P'_1P''_e, O'_1Q''_e, \dots$  ke kuželosečce  $k$

a jsou výtčeny jejich průsečky  $P'_c, Q'_c, \dots$  s hlavní vertikálou  $v_1 = v_c$ . Přímký soustavy  $\Sigma$  incidentní s těmito body určují na příslušných slabě samodružných přímkách  $p_1 = p_c, q_1 = q_c, \dots$  perspektivy  $P_c, Q_c, \dots$  vrcholů obdélníka.



Obr. 16.

Při aplikaci  $2Q$ -promítání se osvědčí  $\Sigma$ -posunutí velikosti  $d - v$  (obr. 17). Kuželosečka  $k$  příslušící hlavní vertikále při  $\Sigma$ -posunutí je hyperbola, jak se dá dokázat způsobem obdobným důkazu správnosti věty 3,5. Též konstrukci kuželosečky provedeme obdobně, i konstrukci perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou. Na jakost kuželosečky  $k$  ukazuje již ta okolnost, že podle věty 2,11 je přímka  $w_1$ , která určuje na posunuté přímce  $v'_1$  dotkový bod  $W'_1$  přímkou  $v'_1$  s kuželosečkou  $k$ , náleží kuželosečka polorovinně opačné k pásu  $o_0z$ , při čemž  $o_0, z$  jsou tečny kuželosečky  $k$ .

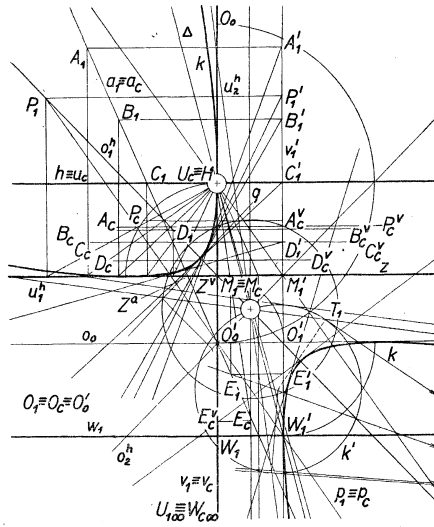
Tím byly osvětleny konstrukce perspektiv v Dürerově soustavě při jejím rozštěpení známým posunutím soustavy základní roviny ve směru základnice  $z$  o daný vektor.

Nakonec je možno odpovědět na obě otázky položené na začátku kapitoly a položit dvě nové otázky.

1. Jak se pozmění konstrukce perspektiv v Dürerově soustavě při jejím rozštěpení posunutím soustavy perspektivní průmětny  $\alpha$ , reprezentovaným rozštěpením hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_c$   $\Sigma$ -posunutím přímky  $v_2$ ?

2. Jaká je konstrukce perspektiv v soustavě, jejíž základní rovina  $\rho$  je incidentní se středem zobrazení  $O$ ?

Odpověď na první otázku vyžaduje prostudování soustavy. Lze však hned



Obr. 17.

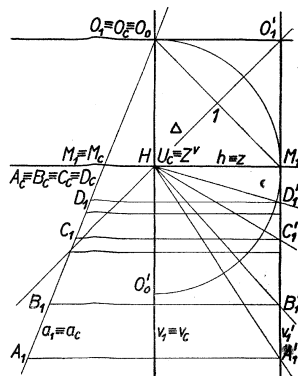
soudit na výsledky obdobné těm, které byly získány při rozštěpení posunutím soustavy základní roviny.

Otázky druhé se týká obr. 18. Jde zřejmě o rozpadlou soustavu perspektivního promítání, pro niž je  $H \equiv Z' \equiv U_c$ . Projektivita na slabě samodružné přímce  $a_1 \equiv a_c$  se rozpadá v tom smyslu, že každému bodu  $A_1, B_1, \dots$  je přiřazena perspektiva  $A_c \equiv B_c \equiv \dots \equiv U_c$ . Posuneme-li přímku  $v_1$  do polohy  $v_1'$ , je direkční přímka obou projektivních řad  $(A_1' B_1' C_1' \dots) \propto (A_c' B_c' C_c' \dots)$  incidentní s hlavním bodem

a posunutým středem  $O'_1, \Delta \equiv U_c O'_1$ . Její dva body,  $U_c, 1$ , totiž jsou:  $U_c \equiv B'_1 D'_c$ ;  $B'_1 D'_c, 1 \equiv M'_1 O'_1$ .  $M'_1 O'_1$  ( $O'_1 \equiv O_c$ ;  $B'_1, D'_c, M'_1 \equiv H$ ). Body  $H \equiv Z' \equiv U_c, O'_1$  jsou dotykové body kuželosečky  $k$  s nositelkami  $v_c, v'_1$ . Kvadratický svazek přímek určený projektivními řadami na obou těchto nositelkách se rozpadá ve dva svazky lineární o středech  $H \equiv U_c, O'_1$ . Zobrazení nemá praktického významu.

Pokud se týká otázek položených na začátku kapitoly, je patrné, že teorie Dürerovy soustavy po jejím rozštěpení posunutím soustavy základní roviny ukazuje na možnost konstrukce perspektiv tímto způsobem. Tyto konstrukce dokonce nepostrádají zajímavosti. Jako teoretický základ ke konstrukci mechanických pomůcek k usnadnění rýsování perspektiv se nezdají být tak vhodné jako při rozštěpení otočením, a to pro tvar kuželosečky  $k$  náležející  $\Sigma$ -posunutí. Jenom v druhé Dürerově soustavě, kdy je kuželosečka  $k$  kružnicí, je mechanisace snadná. V ostatních typech Dürerovy soustavy, kdy je kuželosečka  $k$  elipsa nebo hyperbola, je mechanisace obtížnější.

Rozštěpení soustavy posunutím se však lépe osvědčí ve speciálních případech Dürerovy soustavy pro střed  $O$  nebo základnici z nevlastní, jak je ukázáno v následující kapitole.



Obr. 18.

## II. ROVNOBĚŽNÁ PROJEKCE, HOMOTETIE A SHODNOST

### § 1. Parabola jako kuželosečka $k$ náležející $\Sigma$ -posunutí

#### Rovnoběžná projekce

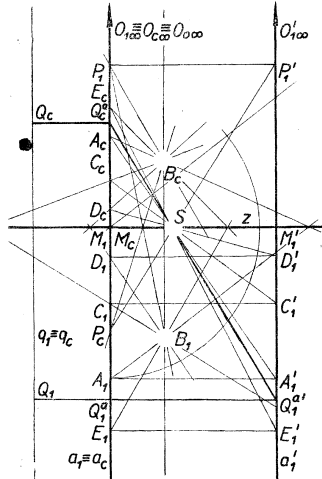
Při konstrukci perspektiv uvažovaným rozštěpením Dürerovy soustavy měly důležitou úlohu přímky osnovy  $\Sigma$  a kuželosečka  $k$  příslušná hlavní vertikále  $v_1 \equiv v_c$  nebo jiné slabě samodružné přímce při  $\Sigma$ -posunutí. Bylo ukázáno, že tato kuželosečka je kružnice v případě druhé Dürerovy soustavy, při posunutí velikosti  $2d$  a při aplikaci  ${}^1\Omega$ -promítání. V ostatních případech je to elipsa, je-li aplikováno  ${}^1\Omega$ -promítání, nebo hyperbola, je-li aplikováno  ${}^2\Omega$ -promítání. Přitom jsou hlavní vertikála  $v_1 \equiv v_c$  i posunutá přímka  $v'_1$  tečnami kuželosečky  $k$ , taktéž základnice z soustavy a přímka posunutí  $O_c O'_1$ .

Lze se tázat, zdali může být některá z přímkv kvadratického svazku určeného projektivními řadami  $(A'_1 B'_1 C'_1 \dots) \bar{\cap} (A''_1 B''_1 C''_1 \dots)$  přímkou nevlastní. V případě, že by tomu tak bylo, mohli bychom usuzovat na parabolu jako kuželosečku  $k$  náležící  $\Sigma$ -posunutí. Přesněji řečeno, budeme se tázat, zdali může být nevlastní jedna z těchto přímkv:

1. posunutá přímkva  $v'_1$ ,
2. přímkva posunutí středu soustavy,  $o_0 \equiv O_c O'_1$ ,
3. základnice  $z$ ,
4. jiná přímkva kvadratického svazku.

Lze ukázat, že platí věta.

**Věta 1.1.** *Je-li dána Dürerova soustava svým obrazem  $(O_0, z, h)$  a jde-li o rýsování perspektiv v této soustavě právě uvažovaným způsobem, tj. pomocí rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím základní roviny  $\rho_1$ , nemůže být  $v'_1$  ani jiná přímkva různá od základnice  $z$  a přímkvy  $o_0 \equiv O_c O'_1$  nevlastní přímkva.*



Obr. 19.

kolíneace tvoří osnovu rovnoběžných přímkv a perspektivní kolíneace je, jak je známo z elementární geometrie, perspektivní afinitou, cbd.

b) V případě 3 (obr. 22) je základnice  $z$  přímkva nevlastní. Při rozštěpení homologie

**Důkaz** je jednoduchý a není rozváděn. V prvním případě by přešel kvadratický svazek přímkv v osnovu  $\Sigma$  rovnoběžných přímkv, která neurčuje kuželosečku  $k$ . Ani čtvrtý případ nenastane, pokud projektivnost na  $v_1 \equiv v_c$  není identitou nebo podobností. A tomu tak skutečně v homologii není.

Zbývají tedy možnosti 2 a 3. Můžeme vyslovit větu.

**Věta 1.2.** *Perspektivní kolíneace, po jejímž rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím soustavy  $\rho_1$  je nevlastní přímkva tečnou kuželosečce  $k$ , je buď ta, jejíž střed  $O_0$  nebo základnice  $z$  jsou bod, resp. přímkva nevlastní. Jsou to známé speciální případy perspektivní kolíneace, a) perspektivní afinita, b) homotetie.*

**Důkaz.** (Obr. 19, 20, 22).

a) V případě 2 jsou body  $O_{1\infty} \equiv O_{c\infty} \equiv O_{0\infty}, O'_{1\infty}$  nevlastní a též přímkva  $O_{c\infty} O'_{1\infty}$  je nevlastní. Přímkvy slabě samodružně incidentní se středem  $O_{0\infty}$  perspektivní

$\Sigma$ -posunutím se základnice zachovává, je tedy  $z_1$  přímka nevlastní. Homologie přechází, jak je známo z elementární geometrie, v homotetii, cbd.

Uvažujme perspektivní afinitu.

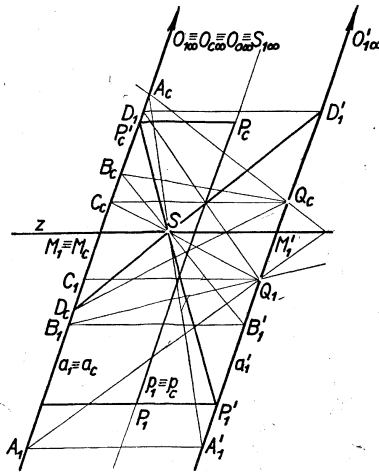
Slabě samodružné přímky perspektivní afinity mohou být kolmé k její ose (základnici  $z$ ), jak ukazuje obr. 19 (ortogonální afinita), nebo mohou tvořit se základnicí úhel nikoli pravý, jak je vidět v obr. 20 (klinogonální afinita). Prostorová interpretace těchto speciálních případů perspektivní afinity je uvedena v článku [5]. Jde zřejmě o pravoúhlé promítání (Mongeovo, kótované, axonometrické), resp. o kosoúhlé promítání.

I v perspektivní afinitě lze zavést a definovat některé pojmy, jak tomu bylo u homologie v předšlé kapitole článku. Tak např. pojem  $\Sigma$ -zobrazení slabě samodružných přímek na sebe, pojem osnovy  $\Sigma$  přímek rovnoběžných se základnicí, rozštěpení soustavy dané rozštěpením slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$  atd.

Obě soumístné projektivní řady na slabě samodružných přímkách  $a_1 \equiv a_c$ ,  $b_1 \equiv b_c$ , ... perspektivní afinity mají dva samodružné body: střed  $O_{1\infty} \equiv O_{c\infty} \equiv O_{0\infty}$  a průsečík  $M_1 \equiv M_c$ ,  $N_1 \equiv N_c$ , ... s osou afinity. V geometrii afinity se učí, a bylo to už též dříve řečeno [5], že soumístné projektivní, nikoli identické řady  $a_1 \equiv a_c$  se samodružným nevlastním bodem jsou podobné, tj. jejich úseky si odpovídají jsou úměrné. Platí tedy např.  $A_1B_1 : B_1C_1 : C_1D_1 : \dots = A_cB_c : B_cC_c : C_cD_c : \dots$ . Jsou proto podobné i bodové řady na přímkách  $a_c$ ,  $a'_1$ , tj.  $A_cB_c : B_cC_c : C_cD_c : \dots = A'_1B'_1 : B'_1C'_1 : C'_1D'_1 : \dots$ . To souhlasí též s poučkami projektivní geometrie, která učí, že kvadratický svazek přímek vytvořený dvěma podobnými bodovými řadami určuje parabolu.

Avšak nositelky obou řad,  $a_c$ ,  $a'_1$ , které jsou podle pouček projektivní geometrie tečnami paraboly posunutí, jsou spolu rovnoběžné. O parabole je však známo, že nemá dvou vlastních rovnoběžných tečen od sebe různých a jsme vedeni k další větě.

**Věta 1.3.** *Kvadratický svazek přímek, určený po rozštěpení perspektivní afinity*



Obr. 20.

podobnými řadami na přímkách  $a_c, a'_c$ , se rozpadá ve dva lineární svazky o středu  $S$  incidentním s osou afinity (základnicí  $z$ ), resp. o středu  $S_{1\infty} \equiv O_{1\infty} \equiv O'_{1\infty}$ . Do druhého z nich patří i nevlastní přímka  $O_{c\infty}O'_c$ .

**Důkaz.** (Obr. 19, 20). Obě souměrné bodové řady na přímkách  $a_1 \equiv a_c$  mají za svůj jeden samodružný bod nevlastní střed afinity  $O_{1\infty} \equiv O_{c\infty}$ . Posunutím řady  $a_1$  do polohy  $a'_1$  ve směru základnice  $z$  zůstává tento bod pevný a obě řady  $a_c, a'_c$  mají společný bod svých nositelek za samodružný bod a jsou podle pouček projektivní geometrie perspektivní. Přímkou určené odpovídajícími si body,  $A_c \rightarrow A'_1, B_c \rightarrow B'_1, \dots$  jsou incidentní s tímž bodem  $S$ , středem perspektivity obou řad  $a_c, a'_c$ . Jelikož bod osy afinity  $M_1 \equiv M_c$  je samodružný a při rozštěpení přejde  $M_1$  v bod  $M'_1$  osy afinity, je také osa přímka určená odpovídajícími si body  $M_c \rightarrow M'_1$  a střed perspektivity  $S$  je s ní incidentní, ebd.

Z těchto výsledků vyplývá řešení následující úlohy.

**Úloha 1.1.** Je doplňovat perspektivně afinní soustavy dané osou  $z$  a párem přiřazených bodů  $A_1 \rightarrow A_c$ . Jinak řečeno: V dané Dürerově soustavě 6 [5] rovnoběžného promítání je sestrojít perspektivu  $Q_c$ , resp.  $P_c$  bodů  $Q$ , resp.  $P$ , incidentních se základní rovinou  $o$ , daných  $\Omega$ -příměty  $Q_1$ , resp.  $P_1$ .

**Řešení.** (Obr. 19, 20). Omezíme se na konstrukci perspektivy  $Q_c$  bodu  $Q$  v obr. 19. Konstrukce perspektivy  $P_c$  bodu  $P$  v obr. 20 je obdobná.

1. Sestrojíme slabě samodružnou přímku  $q_1 \equiv q_c$  incidentní s bodem  $Q_1$ , s níž je incidentní i perspektiva  $Q_c$ .

2. Posuneme přímku  $a_1$  do polohy  $a'_1$  o libovolný vektor rovnoběžný se základnicí  $z$  a sestrojíme střed perspektivity  $S = A_c A'_1$  z.

3. Sestrojíme přímku  $Q_1 Q'_1$  osnovy  $\Sigma$ , tj.  $Q_1 Q'_1 \perp z$ , která určuje na přímce  $a_1$  bod  $Q'_1$  a na přímce  $a'_1$  bod  $Q''_1$ . Sestrojíme bod  $Q''_c$  přiřazený bodu  $Q'_1$ :  $Q''_c \equiv Q'_1 S \cdot a_c$ .

4. Sestrojíme přímku  $Q''_c Q_c$  osnovy  $\Sigma$ , která určuje na přímce  $q_c$  hledaný bod  $Q_c$ . Tuto konstrukci lze snadno mechanisovat.

Nechť je dána ortogonální afinita, která platí např. v axonometrii nebo v Mongově promítání [5], základnicí  $z$  a dvojicí přiřazených bodů, např.  $A_1 \rightarrow A_c$ . (Obr. 21). Obrazce  $ABCD$ , jehož perspektivu je sestrojít, umístíme s ohledem na dané požadavky tak, aby pár  $B_1 \rightarrow B_c$  byl krajním ve směru kladné základnice  $z$ . Pak půdorys obrazce  $A_1 B_1 C_1 D_1$  a jeho perspektiva  $A_c B_c C_c D_c$  jsou incidentní s pásem nákrešny ohraničeným lištou  $r$  rýsovací desky a slabě samodružnou přímkou  $B_1 B_c \equiv b_1 \equiv b_c$ .

Rozštěpíme-li afinitu posunutím přímky  $b_1$  do polohy  $b'_1$ , pak je sestrojení perspektivy  $B_c C_c D_c$  další částí obrazce dáno konstrukcí v obr. 19, 21. V konstrukci označíme  $\Sigma$ -průmět bodu  $C_1$  na slabě samodružnou přímku  $b_1 \equiv b_c$  jako bod  $C''_1$ , jeho  $\Sigma$ -průmět na přímku  $b'_1$  označíme pro zjednodušení jako bod  $C'_1$ .

## § 2. Afinograf pravítkový sestrojený na základě rozštěpení afinity posunutím

Afinograf, jehož schéma je naznačeno v obr. 21, pozůstává z tří pravítek,  $P, Q, R$ . Prvním pravítkem, které je posuvné po hraně  $r$  rýsovací desky, rýsuje osnovu  $\Sigma$

přímek  $C_1C'_1, D_1D'_1, \dots$  rovnoběžných se základnicí z incidentních s body půdorysu  $C_1, D_1, \dots$ . Hrana druhého pravítka zastupuje přímky svazku o středu  $S$ . Pomocí třetího pravítka  $R$  rýsuje přímky osnovy  $\Sigma$  incidentní s perspektivami  $C_e, D_e, \dots$ . Obě pravítka  $P, Q$  jsou spojena čepem  $U$ , který je na pravítku  $P$  pevný, takže úsek tohoto pravítka ohraničený tímto čepem a hranou desky je konstantní. Čep  $U$  klouže v drážce pravítka  $Q$  nebo společně s objímkou  $U$  se posouvá po pravítku  $Q$ . Toto pravítko  $Q$  se otáčí kolem pevného bodu  $S$  incidentního se základnicí z, v němž je vhodně centrováno a vyznačuje na slabě samodružné přímce  $b_1 \equiv b_e$   $\Sigma$ -průmět  $C_e^b, D_e^b, \dots$  perspektiv  $C_e, D_e, \dots$  na tuto přímku  $b_1 \equiv b_e$ . Pravítko  $R$  je buď samostatné, posuvné po hraně rýsovací desky jako pravítko  $P$ , nebo je vhodně spojeno s pravítkem  $Q$  jako pravítko  $P$ .

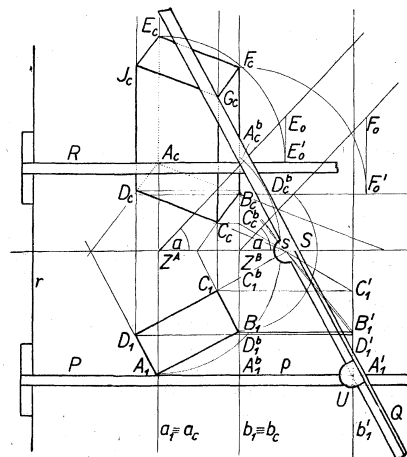
Při rýsování perspektivy  $A_e B_e C_e \dots$  obrazce  $ABC \dots$  v afinitě dané základnicí z a dvojicí např.  $A_1 \rightarrow A_e$  si pomáháme takto:

1. Umístíme půdorys  $A_1 B_1 C_1 \dots$  podle obr. 21, aby bod  $B_1$  se stal incidentním s předem danou přímkou  $b_1 \equiv b_e$  směru slabě samodružných přímek afinity. Ostatní část půdorysu je incidentní s pásem rýsovacího papíru ohraničeným přímkou  $b_1 \equiv b_e$  a levou hranou rýsovací desky. Posuneme přímkou  $b_1$  o vektor  $\vec{p}$  rovný úseku  $A_1^b A_1^c$  pravítka  $P$  do polohy  $b_1^c$ . Uuríme body  $A_1^c \equiv A_1^c, A_1 A_1^c \parallel z$ , na přímkách  $b_1$ , resp.  $b_1^c$ , dále bod  $A_1^b \equiv A_e A_e^b, b_1$ , kde  $A_e A_e^b \parallel z$  a sestrojíme střed perspektivity  $S : S \equiv A_1^b A_1^c . z$ .

2. Sestrojíme jednotlivými body půdorysu  $A_1 B_1 \dots$  slabě samodružné přímky, rovnoběžné s  $b_1 \equiv b_e$ , s kterými jsou perspektivy  $A_e B_e \dots$  vrcholů obrazce incidentní.

3. Položíme na rýsovkou přístroj tak, že pravítka  $P$  a  $R$  opřeme hlavici o hranu rýsovací desky a dostředíme pravítko pomocí osy  $s$ , po případě pomocí nosníku ve středu  $S$ .

4. Při rýsování perspektivy  $C_e$  bodu  $C_1$  posuneme pravítko  $P$ , aby jeho hrana  $p$



Obr. 21.



byla incidentní s bodem  $C_1$ . Přitom se pravítko  $Q$  otočí kolem středu  $S$  do polohy  $C_1SC_e^0$ , jak je patrné z obr. 21.

5. Pravítko  $Q$  určuje na přímce  $b_1 \equiv b_e$  bod  $C_e^0$ , který přeneseme pomocí pravítka  $R$  na přímku  $C_1C_e \equiv c_1 \equiv c_e$ ,  $C_e \equiv C_e^0C_e$ . ( $c_1 \equiv c_e$ ).

V obr. 21 je pravítko v poloze určující perspektivu  $A_e$  bodu  $A$ .

Konstrukce perspektivy  $C_e$  bodu  $C$  pozůstává z těchto operací v případě, že je pravítko  $R$  oddělené:

- sestrojení slabě samodružné přímky  $c_1 \equiv c_e \equiv C_1C_e$ ,
- posunutí pravítka  $P$ , aby jeho hrana byla incidentní s půdorysem  $C_1$ ,
- sestrojení přímky  $C_1C_e^0$  podél hrany pravítka  $Q$ ,
- sestrojení přímky  $C_e^0C_e \parallel z$ .

V případě, že by bylo možno vhodně spojit pohyby pravítek  $Q$ ,  $R$ , odpadla by operace c).

Jestliže opatříme obě pravítka  $P$ ,  $R$  měřítky s nulovými body na hraně rýsovky  $r$ , není potřeba rýsovat slabě samodružné přímky  $c_1 \equiv c_e$ , je tedy možno vypustit operaci a). Je-li tedy pravítko  $R$  spojeno s pravítkem  $Q$  a jsou-li obě pravítka  $P$ ,  $R$  opatřena měřítky, pozůstává konstrukce perspektivy  $C_e$  bodu  $C$  jen z operací b) a d).

Při rýsování axonometrického obrazu prostorového objektu, např. kvádrů nad podstavou  $ABCD$ , stojícího na souřadnicové rovině  $xy$ , počínáme si podle konstrukce uvedené v článku [5]. V obr. 21 jsou naryšovány perspektivy výšek  $AE$ ,  $BF$ , jejichž skutečná velikost je  $AE \equiv BF = Z^aE_0 = Z^bF_0$ ,  $\sin \alpha = Z^aA_e : Z^aA_1 = Z^bB_e : Z^bB_1$ ,  $A_eE_0 = B_eF_0$  je velikost perspektivy  $A_eE_e$ ,  $B_eF_e$  výšky v bodech  $A$ ,  $B$ .

Lze snadno ukázat, že afinograf právě sestrojený je v podstatě týž, který byl navržen dříve v článku [5b] a nakreslen v obr. 90. Rozštěpení perspektivní afinity v článku [5b] je v podstatě rozštěpení  $\Sigma$ -posunutím provedeným pro každou slabě samodružnou přímku zvlášť. Každé takové přímce náleží v prvním případě zvláštní střed perspektivity a přímka perspektivity. V rozštěpení afinity  $\Sigma$ -posunutím dané přímky  $b_1$ , součástí slabě samodružné přímky  $b_1 \equiv b_e$ , do polohy  $b_1'$  jsou, možno říci, soustředěna všechna dříve uvedená rozštěpení otočením. To se stane zavedením známé  $\Sigma$ -projekce. Na základě této projekce se také soustředí všechny středy perspektivity náležící jednotlivým slabě samodružným přímкам do jednoho bodu  $S$ , středu perspektivity obou perspektivních řad  $b_e$ ,  $b_1'$ .

Zmechanisování konstrukce klinogonálních afinních obrazů na základě rysu 20 je obdobné právě uvažovanému zmechanisování ortogonální afinity. Může být dokonce užito téhož přístroje, jehož konstrukce dovoluje připřisobení klinogonální afinitě.

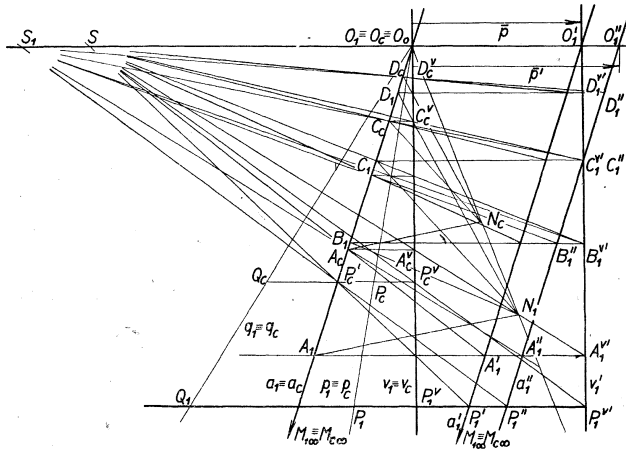
Oba přístroje lze vhodně spojit s rýsovacím mechanismem „Kinex“, pomocí něhož lze snadno rýsovat vodorovné a svislé přímky (přímky osnovy  $\Sigma$  a slabě samodružné přímky) i šikmé přímky.

### § 3. Homotetie

Uvažujme případ, kdy osa perspektivní kolineace je přímka nevlastní a příbuznost je homotetií.

Z elementární geometrie je známo, že homotetie je určena svým středem  $O_1 \equiv \equiv O_c \equiv O_0$  a párem přiřazených bodů, např.  $A_1 \rightarrow A_c$  (obr. 22), při čemž tyto tři body jsou kolineární. Bod  $O_0$  je bod samodružný.

Nechť je tedy dána homotetie tímto způsobem. Její prostorová interpretace je



Obr. 22.

uvedena v článku [5b]. Z elementární geometrie je dále znám postup při jejím doplňování, tj. určení bodu  $P_c, Q_c, \dots$  k danému bodu  $P_1, Q_1, \dots$ . V teorii homotetie je též možno zavést některé pojmy definované podobně jak tomu bylo v úvahách o perspektivní kolineaci a jak už bylo učiněno v článku [5]. Např. je možno definovat hlavní vertikálu, osnovu  $\Sigma$  přímek,  $\Sigma$ -zobrazení slabě samodružných přímek homotetie na určitou slabě samodružnou přímku  $a_1 \equiv a_c$  nebo na hlavní vertikálu apod. Předpokládáme tyto pojmy za známé a vyslovíme větu.

**Věta 3.1.** Jsou-li známy všechny páry odpovídajících si bodů slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$  dané homotetie, je možno sestavit pomocí osnovy  $\Sigma$  přímek přiřazené dvojice na každé slabě samodružné přímce homotetie.

**Důkaz** správnosti věty vyplývá z vlastností homotetie a pojmů zavedených v perspektivní kolineaci a afinitě.

Obě souměrné projektivní řady incidentní se slabě samodružnou přímkou  $a_1 \equiv a_c$  nebo s hlavní vertikálou  $v_1 \equiv v_c$  zastupují v uvedeném smyslu projektivní souměrné řady incidentní s ostatními slabě samodružnými přímkami. Proto, jak tomu bylo u perspektivní kolineace a afinity, zastupuje rozštěpení slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$  nebo hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_c$  rozštěpení celé soustavy homotetie. Souměrné projektivní řady na slabě samodružných přímkách  $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$  mají dva samodružné body,  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$  a průsečík  $M_{1,\infty} \equiv M_{c,\infty}$  s nevlastní základnicí  $z$ . Jsou tedy obě řady podobné a platí vztahy:  $O_1A_1 : O_1B_1 : O_1C_1 : \dots = O_cA_c : O_cB_c : O_cC_c : \dots$

Kvadratický svazek přímek určený oběma těmito podobnými bodovými řadami určují parabolu. Jelikož však v dané soustavě homotetie jsou nositelky  $a_c, a'_1$ , resp.  $v_c, v'_1$ , kde  $a'_1, v'_1$  jsou posunuté přímky  $a_1, v_1$  o velikost vektoru  $\bar{p}$  kolmého k hlavní vertikále  $v_1 \equiv v_c$ , navzájem rovnoběžné a mají společný samodružný bod nevlastní, platí věta obdobná větě 1,3 kap. II.

**Věta 3,2.** *Kvadratický svazek přímek určený řadami  $a_c, a'_1$  nebo  $v_c, v'_1$  po rozštěpení homotetie reprezentovaném rozštěpením slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c$  nebo hlavní vertikály  $v_1 \equiv v_c$  posunutím řady  $a_1$  do polohy  $a'_1$  nebo řady  $v_1$  do polohy  $v'_1$ , se rozpadá ve dva lineární svazky přímek o středu  $S$  incidentním s přímkou posunutí  $O_cO'_1$  středu homotetie  $a$  o středu  $S_{1,\infty} \equiv M_{1,\infty} \equiv M_{c,\infty}$ .*

**Důkaz** správnosti věty provedeme stejně jako důkaz správnosti věty 1,3 kap. II (Obr. 22).

Pomocí těchto výsledků můžeme řešit úlohu obdobnou úloze 1,1 kap. II.

**Úloha 3,1.** *Danou homotetií ( $O_1 \equiv O_c \equiv O_0, A_1 \rightarrow A_c$ ) je doplňovat, tj. k daným bodům  $P_1, Q_1, \dots$  je sestavit body  $P_c, Q_c, \dots$  homoteticky přiřazené.*

**Řešení.** (Obr. 22).

1. Sestrojíme slabě samodružnou přímkou  $P_1O_0$  incidentní se středem homotetie  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$ .

2. Posuneme přímkou  $a_1$  o určitý vektor  $\bar{p}$  směru osnovy  $\Sigma$  přímek kolmých k  $v_1 \equiv v_c$  do polohy  $a'_1$ , resp. přímkou  $v_1$  do polohy  $v'_1$  a sestrojíme bod  $A'_1 \equiv A_1A'_1 \cdot a'_1$ , kde  $A_1A'_1 \parallel O_1O'_1$ , resp. bod  $A'_1V' \equiv A_1A'_1V' \cdot v_1$ , kde  $A_1A'_1V' \parallel O_1O'_1$ . Řady  $a_c, a'_1$ , resp.  $v_c, v'_1$  jsou ze známých důvodů perspektivní.

3. Sestrojíme střed perspektivity  $S \equiv A'_1A_c \cdot O'_1O_c$ , resp.  $S \equiv A'_1V' \cdot O'_1O_c$  zmíněných perspektivních řad na dvojicích  $a_c, a'_1$ , resp.  $v_c, v'_1$  po rozštěpení homotetie posunutím  $a_1$ , resp.  $v_1$  o vektor  $\bar{p}$ .

4. Sestrojíme přímkou  $P_1P'_1 \equiv P_1P''_1 \parallel O_1O'_1$ , tj. přímkou osnovy  $\Sigma$ , která určuje na přímkách  $a'_1$ , resp.  $v'_1$  body  $P'_1$ , resp.  $P''_1$ .

5. Sestrojíme  $P'_c \equiv P'_1S \cdot a_c$ , resp.  $P''_c \equiv P''_1S \cdot v_c$ . Bodem  $P'_c$ , resp.  $P''_c$  sestrojíme přímkou osnovy  $\Sigma$ , která svým průsečíkem  $P_c$  s přímkou  $P_1O_0 \equiv p_1 \equiv p_c$  řeší úkol.

Na konstrukci se podlejí čtyři základní operace:

- a) sestrojení přímky  $P_1O_0$ ,
- b) sestrojení rovnoběžky  $P_1P'_1$ , resp.  $P_1P''_1 \parallel O_1O'_1$ ,
- c) sestrojení přímky  $P'_1S$ , resp.  $P''_1S$  svazku o středu  $S$ ,
- d) sestrojení rovnoběžky  $P'_cP_c$ , resp.  $P''_cP_c \parallel O_cO'_c$ .

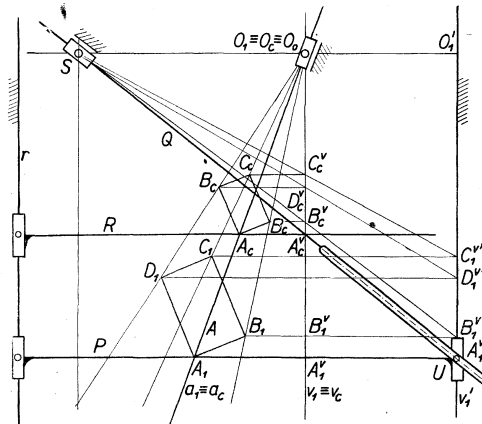
Konstrukci je možno zmechanisovat podobně, jako tomu bylo dříve u perspektivní afinity.

V obr. 22 je posunuta přímka  $a_1$  též do polohy  $a'_1$  a sestrojen střed perspektivity  $S_1$  náležící tomuto posunutí. V obraze je naznačena konstrukce perspektivy  $P_c, Q_c$  bodů  $P_1, Q_1$  pomocí všech uvedených posunutí.

#### § 4. Pantograf sestrojěný na základě rozštěpení homotetie posunutím

Tuto mechanickou pomůcku k rýsování obrazů podobných obrazům daným (obr. 23) nebudeme popisovat podrobně, neboť její konstrukce je obdobná konstrukci pravitkového afinografu, sestrojeného na témž principu. (Obr. 21).

Přístroj obsahuje dvě pravitka  $P, R$ , posunovatelná po hraně  $r$  rýsovací desky a slouží k rýsování přímek osnovy  $\Sigma$ . Pravitko  $P$  se svým druhým koncem posouvá



Obr. 23.

po pravé hraně  $v'_1$  desky. Praxe by ukázala, do jaké míry by bylo výhodné vypustit pravitko  $R$  a jeho funkci přidělit pravitku  $P$ .

Pomůcka dále obsahuje pravitko  $Q$ , které se otáčí kolem pevného bodu  $S$ , jenž

je středem perspektivity bodových řad na přímkách  $a_c, a'_1$ , resp.  $v_c, v'_1$  a který je incidentní s přímkou posunutí  $O_1O'_1$  středu homotetie  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$ . Podle velikosti posunutí  $A_1^v A_1^{v'}$  přímky  $a_1$ , resp.  $v_1$  je možno určit vzdálenost  $O_1S$ .

Pravítko  $Q$  je spojeno čepem  $U$  s pravítkem  $P$ . Tento čep je pevný na pravítku  $P$ , takže zůstává stále v téže vzdálenosti od lišty  $r$ , po pravítku  $Q$  se však čep posouvá pomocí objímky  $U$ . Mechanismus obsahuje konečné pravítko  $A$ , otáčející se kolem středu homotetie  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$ .

Při rýsování perspektivy  $A_c B_c C_c \dots$  obrazce  $A_1 B_1 C_1 \dots$  v homotetii dané středem  $O_0$  a dvojicí  $A_1 \rightarrow A_c$  si počínáme takto:

1. Upevníme na rýsovací desce v náležité poloze rýsovací papír s danými prvky. Sestrojíme hlavní vertikálu  $v_1 \equiv v_c$  a určíme na ní body  $A_1^v, A_c^v$  a bod  $A_1^{v'}$ :  $A_1 A_1^v \perp v_1, A_c A_c^v \perp v_1$ .

2. Umístíme vhodně originál  $A_1 B_1 C_1 \dots$  v levé části náčrtny.

3. Stanovíme střed perspektivity  $S \equiv O_1 O'_1, A_1^{v'} A_c^{v'}$ .

4. Sestrojíme přímky svazku o středu  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$  incidentní s jednotlivými body originálu  $A_1 B_1 C_1 \dots$  pomocí pravítka  $A$  centrovaného ve středu homotetie  $O_1 \equiv O_c \equiv O_0$ .

5. Položme na rýsovkou hlavní část mechanismu tak, že pravítko  $P$  opřeme hlavicí o lištu  $r$  rýsovací desky, upevníme čep  $U$  na pravítku  $P$  v bodu  $A_1^{v'}$  a centrujeme pravítko  $Q$  v bodu  $S$ . Stejně opřeme pravítko  $R$  o hranu  $r$ .

6. Při rýsování perspektivy  $B_c$  bodu  $B$  daného bodem  $B_1$  posuneme pravítkem  $P$ , aby jeho hrana byla incidentní s bodem  $B_1$  a vedeme přímkou podél hrany pravítka  $Q$ . Určíme její průsečík  $B_c^v$  s  $v_1 \equiv v_c$  a vedeme jím přímkou  $B_1 B_c^v \parallel O_1 O'_1$ . Ta určuje na samodružné přímce  $O_1 B_1$  hledanou perspektivu  $B_c$  bodu  $B$ .

Konstrukce perspektivy v homotetii na základě rozštěpení posunutím je jednoduchá, není však k mechanisaci tak vhodná, jako konstrukce na základě rozštěpení otočením. Bude záležet na úpravě spojů jednotlivých pravítek, aby chod přístroje byl hladký, plynulý a pravítka zachovávala správnou polohu.

## § 5. Shodnost

Je možno uvažovat homotetii, jejíž střed  $O_{1\infty} \equiv O_{c\infty}$  je nevlastní bod. V tom případě tvoří slabě samodružné přímky  $a_1 \equiv a_c, b_1 \equiv b_c, \dots$  soustavu přímek rovnoběžných. Na základě toho a na základě vlastnosti homotetie, podle níž jsou přiřazené přímky spolu rovnoběžné je patrné, že tento speciální případ homotetie je shodnost obrazců  $A_1 B_1 C_1 \dots \simeq A_c B_c C_c \dots$ .

Je-li tato shodnost dána dvojicí  $A_1 \rightarrow A_c$ , čímž je určen i její „střed“  $O_{1\infty} \equiv O_{c\infty}$ , sestrojíme perspektivu  $A_c B_c C_c \dots$  obrazce  $A_1 B_1 C_1 \dots$  jako dříve pomocí slabě samodružné přímky  $v_1 \equiv v_c$  a jejího rozštěpení posunutím přímky  $v_1$  do polohy  $v'_1$ . Konstrukce je obdobná konstrukci v obr. 22, 23 a je patrná z obr. 24.

Perspektiva  $B_c$  každého bodu  $B_1$  je určena vedením čtyř přímek rovnoběžných s třemi  $B_1 B_c \parallel A_1 A_c \parallel v_1 \equiv v_c, B_1 B'_1 \parallel B_c B_c^v \parallel A_1 A_1^v \perp v_1 \equiv v_c, B_1 B''_1 \parallel A_1 A_c^v$ .

Na základě této konstrukce je možno zhotovit jednoduchou *kopírovací pomůcku*, která je podobná pantografu znázorněného schematicky v obr. 23. Liší se od něho jen

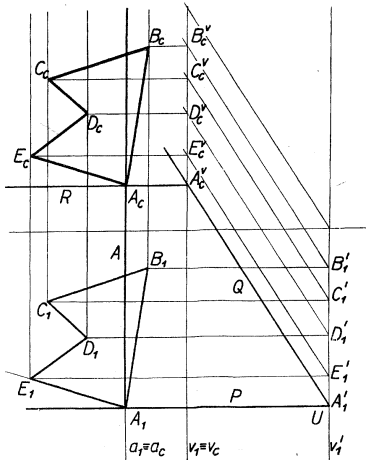
tím, že pravítko  $A$  se neotáčí kolem pevného bodu  $O_1 \equiv O_c$ , nýbrž zachovává stále též směr kolmý k pravítku  $P$ . Schéma přístroje je nakresleno v obr. 24. Přístroj obsahuje dvě pravítka  $P, R$  známé polohy. Pravítko  $A$  je posunovatelné pomocí čepu a objímky v bodu  $A_1$  po pravítku  $P$  a zaujímá k němu stále kolmou polohu. Pravítko  $Q$  je šroubem pevně spojeno s pravítkem  $P$ , posouvá se společně s ním a zachovává stále též směr. Při rýsování bodu  $B_c$  posuneme oběma pravítky  $P, A$ , aby jejich hrany byly incidentní s bodem  $B_1$  a vedeme přímku podél hran pravítka  $A, Q$ . Průsečíkem  $B_c'$  přímky  $Q$  s přímkou  $v_1 \equiv v_c$  vedená přímka  $B_c'B_c$  pomocí pravítka  $R$  určuje bod  $B_c$ , který řeší úkol.

Nakonec můžeme vyslovit větu, kterou odpovíme na otázku položenou na začátku kap. II.

**Věta 5.1.** *Parabola jednoduchá*

*jako kuželosečka k při rozštěpení homologie  $\Sigma$ -posunutím soustavy  $e_1$  není uplatněna.*

**Důkaz** správnosti věty plyne z předešlých úvah.



Obr. 24.

#### LITERATURA

- [1] *Kazimierz Bartel*: Perspektywa malarska. Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1955.
- [2] *Bohumil Byřizovský*: Úvod do algebraické geometrie. Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1948.
- [3] *N. F. Četveruchin*: Metody načertateľnoj geometrii i jejo priloženija — sbornik statěj. Státní nakladatelství techn.-teoret. literatury, Moskva 1955.
- [4] *C. de la Fresnaye*: Les Faisceaux à projeter. Librairie de la Construction moderne 1, Paris 1909.
- [5] *František Havelka*: a) Některé speciální případy Fresnayeovy mechanické konstrukce perspektiv. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis 1961.  
b) Teorie Dürerovy soustavy a některých mechanických konstrukcí perspektiv a rovnoběžných projekcí. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis 1962.

- [6] Sitzungsberichte. Akademie der Wissenschaften in Wien. Oddíl IIa, roč. 127 (1918), 1. sešit, str. 699.  
Oddíl IIa, roč. 131 (1922), 1. sešit, str. 321.  
[7] Technische Blätter, roč. 51 (1919).

### Резюме

## КОНСТРУКЦИИ ПЕРСПЕКТИВ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВА ГОМОЛОГИИ ПЕРЕНОСА

ФРАНТИШЕК ГАВЕЛКА

В статье [5ab] исследовались механические конструкции перспектив и параллельных проекций, основываясь на так называемом разрыве перспективной коллинеации (гомология, системы Дюрера) поворотом одной из гомологических систем вокруг центра  $O$  гомологии на произвольный угол  $\gamma$ . Этим разрывом преобразовалась гомология двух плоских систем имеющих общего носителя, в общую коллинеацию обоих совместных систем. При этом центр гомологии  $O$ , точка сильно самосопряженная, перешла в точку слабо самосопряженную нового коллинеарного соотношения, ось гомологии вообще потеряла свою самосопряженность. Это общее коллинеарное соотношение привело к простому дополнению гомологии (Френе) и к конструкции простых механических пособий для черчения перспектив и параллельных проекций, конгруэнтных и подобных фигур.

В настоящей статье автор исследует возможность разрыва гомологии переносом одной из гомологических систем вдоль оси гомологии  $z$ . При этом ось гомологии потеряет свою самосопряженность и становится прямой слабо самосопряженной, центр гомологии потеряет вовсе свою самосопряженность. Автор после этого исследует конструкции перспектив для  $d = v$ ,  $d < v$ ,  $d > v$ . Показывает, что разрыв гомологии определен разрывом некоторой слабо самосопряженной прямой, например главной вертикалью  $v_1 \equiv v_c$ . Совместные проективные ряды этой прямой переходят в проективные ряды взаимно различные и образует квадратический пучок прямых, обвертывающих кривую второго порядка. С помощью этой кривой можно дополнить гомологию.

Автор далее рассматривает особые случаи гомологии, перспективные аффинные, гомотетии и конгруэнтные фигуры и их разрыв переносом и приводит соответствующие конструкции. На их основе предлагает некоторые механизмы для черчения перспектив и параллельных проекций, паннограф и копирующие механические пособия.

## Zusammenfassung

### KONSTRUKTIONEN VON PERSPEKTIVEN UND PARALLELPROJEKTIONEN MITTELS ZERSPALTUNG DER ZENTRAKKOLLINEATION DURCH VERSCHIEBUNG

FRANTIŠEK HAVELKA

Die Artikeln [5ab] behandelten mechanische Konstruktionen von Perspektiven und Parallelprojektionen auf Grund von sogenannter Zerspaltung der Zentralkollineation (Homologie, Dürerschen Systems) durch Umdrehung einer der homologischen Systeme um einen beliebigen Winkel  $\gamma$ . Durch diese Zerspaltung geht die Homologie zweier Systeme in die allgemeine Kollineation beider Systeme über. Dabei geht das Homologie-Zentrum, welches einen „starken“ Fixpunkt darstellt, in einen „schwachen“ Fixpunkt der neuen kollinearen Beziehung über und die Homologie-Achse verliert vollständig die Eigenschaft der Fixgeraden.

Diese allgemein-kollineare Beziehung führte zu einer einfachen Konstruktion von verwandten Punkten und Geradenpaaren der Homologie (Fresnaye) und zur Konstruktion einfacher mechanischer Hilfsmittel, die nützlich bei der Zeichnung von Perspektiven, Parallelprojektionen, sowie auch ähnlichen und kongruenten Bildern sein können.

In diesem Artikel behandelt der Autor die Möglichkeit der Zerspaltung der Homologie durch Verschiebung eines der homologischen Systeme längs der Homologie-Achse  $z$ . Dabei verliert die Homologie-Achse die Eigenschaft einer „starken“ Fixgeraden und geht in eine „schwache“ Fixgerade über, während das Homologie-Zentrum vollständig die Eigenschaft des Fixpunktes verliert.

Der Autor zeigt, dass die Zerspaltung der Homologie durch Zerspaltung einer Doppelgeraden  $a_1 \equiv a_2$  gegeben ist, z. B. auch durch Zerspaltung der Hauptvertikale  $v_1 \equiv v_2$ . Die kolokalen projektiven Reihen dieser Geraden gehen in zwei projektive Reihen auf zwei verschiedenen Geraden  $a_c \parallel a'_1$ , resp.  $v_c \parallel v'_1$  und schaffen ein quadratisches Strahlenbüschel, das einen Kegelschnitt umhüllt. Mittels dieses Kegelschnittes ist es möglich weitere verwandte Elemente der Homologie zu konstruieren.

Weiter werden spezielle Fälle der Homologie (perspektiver Affinität, perspektive Ähnlichkeit, kongruente Verabbildung) behandelt und auf verschiedene Konstruktionen hingewiesen, die auf dem Begriff der Zerspaltung durch Verschiebung beruhen. Auf Grund dieser Konstruktionen entwirft der Autor einige Mechanismen zum Zeichnen von Perspektiven und Parallelprojektionen, einen Pantograph und ein mechanisches Kopiergerät.