Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Bedřich Havelka

Příspěvek k výpočtu Clairautova-Mossottiova objektivu

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 1 (1960), No. 1, 29--37

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119774`

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

1960 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLLOMUCENSIS FACULTAS RERUM SCIENTIARUM TOM 3

Katedra fyziky přírodovědecké fakulty.
Vedoucí: prof. RNDr. et DrSc. B. Havelka.

PŘÍSPĚVEK K VÝPOČTU CLAIRAUTOVA-MOSSOTTIOVA OBJEKTIVU

BEDŘICH HAVELKA

(Došlo dne 30. září 1959)

Úvod

Objektiv dalekohledu se v převážné většině případů skládá ze dvou čoček, z nichž jedna je ze skla korunového a druhá z flintového. Jsou-li obě čočky odděleny úzkou mezerou, nazývá se tento typ dalekohledového objektivu Fraunhoferovým; v případě, že vnitřní poloměry obou čoček jsou co do absolutní hodnoty stejné, takže je lze stmelit, nazývá se objektiv Clairautův. Pro dalekohledy malých rozměrů, např. pro triedry, kde průměr objektivu nepřesáhne 50 mm, se užívá objektivů Clairautových, naproti tomu u dalekohledů s průměrem objektivu větším než 50 mm, např. u dalekohledů vyhlídkových, astronomických aj., uplatňuje se objektiv typu Fraunhoferova.

Objektiv Clairautův má vzhledem k objektivu Fraunhoferovu především tu výhodu, že jeho montáž do dalekohledu je jednodušší, poněvadž jde vlastně o jednu čočku a světelné ztráty odrazem jsou nižší. Na druhé straně se vyskytují obtíže při jeho výpočtu, neboť vzhledem k objektivu Fraunhoferovu se zde ztrácí jedna korekční podmínka, takže při dané dvojici skel lze obecně splnit jen dvě korekční podmínky ze tří, jejichž splnění je požadováno u dalekohledového objektivu.*) Žádáme-li např. korekci vady otvorové a komy, je barevná vada korigována jen pro takovou dvojici skel o daných indexech n_1 a n_2, pro které výraz

$$\frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(E - \frac{1}{\nu_2}\right)$$

je kořenem rovnice pátého stupně; v uvedeném výrazu značí ν_1, ν_2 Abbeova čísla skel a E korekční koeficient barevné vady.

*) Jsou to: Korekce vady otvorové, komy a vady barevné.

1. Historie problému

H. Harting [1] ukázal r. 1898, že poloměr křivosti tmelené plochy je kořenem rovnice 5. stupně. Touž otázkou se zabýval později E. von Hoegh [2] a dospěl k rovnici 5. stupně pro jednu z ohniskových vzdáleností čoček. Rovněž Gleichen [3] ve své knize studuje týž problém. Nutno poznamenat, že priorita v tomto směru patří Mossottimu [4], který již r. 1855 ukázal, že pro dva dané indexy lomu je podíl optických mohutností obou čoček kořenem rovnice pátého stupně. Ukázal též, že tato rovnice má tři kořeny reálné a dva imaginární Jeden z reálných kořenů vyhovuje volbě skel. Podrobně rozebírá otázku E. Turrière [5] a H. Chrétien [6].

2. Základní rovnice pro výpočet

Za předpokladu tenkých čoček máme podle [7] pro výpočet tmeleného objektivu složeného ze dvou čoček tyto rovnice.

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1, \tag{1}$$

$$\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} = E, \tag{2}$$

$$M_1 + M_2 = A, \tag{3}$$

$$N_1 + N_2 = B, \tag{4}$$

kde je položeno

$$M_i = a_i\varrho_i^2 - 2b_i\varrho_i + c_i, \tag{5}$$

$$N_i = e_i\varrho_i - b_i, \qquad (i = 1,2), \tag{6}$$

při čemž

$$a_i = \frac{n_i + 2}{n_i}\varphi_i, \qquad b_i = \varphi_i\xi_i, \qquad c_i = \left(\frac{1}{2}\frac{n_i\varphi_i}{n_i - 1}\right)^2\varphi_i,$$

$$e_i = \frac{n_i + 1}{n_i}\varphi_i, \qquad \varrho_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i'}\right) - \xi_i, \qquad \xi_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i'}\right).$$

Za předpokladu, že předmět je v nekonečnu ($x_1 \to \infty$), platí

$$\xi_1 = \frac{\varphi_1}{2}, \qquad \xi_2 = \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}.$$

Podmínka stmelení $r_1' = r_2$ nabývá tvaru

$$\varrho_2 = \varrho_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n_1\varphi_1}{n_1 - 1} + \frac{n_2\varphi_2}{n_2 - 1}\right). \tag{7}$$

Pro poloměry křivosti r_1, r_1' resp. r_2, r_2' první resp. druhé čočky pak vychází

$$\frac{1}{r_1} = \varrho_1 + \xi_1 + \frac{\varphi_1}{2(n_1 - 1)}, \qquad \frac{1}{r_1'} = \varrho_1 + \xi_1 - \frac{\varphi_1}{2(n_1 - 1)},$$

$$\frac{1}{r_2} = \varrho_2 + \xi_2 + \frac{\varphi_2}{2(n_2 - 1)}, \qquad \frac{1}{r_2'} = \varrho_2 + \xi_2 - \frac{\varphi_2}{2(n_2 - 1)}.$$

3. Dosavadní řešení

V řešeních autorů uvedených v odst. 1 se vycházelo z předpokladu, že otvorová vada a koma jsou korigovány v prostoru třetího řádu a vada barevná v prostoru paraxiálním, tj. $A = B = E = 0$. V tomto případě vychází pro $\frac{\nu_1}{\nu_2} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \omega$ rovnice

$$g_0\omega^5 + g_1\omega^4 + g_2\omega^3 + g_3\omega^2 + g_4\omega + g_5 = 0,$$

kterou dostaneme vyloučením ϱ_1 a ϱ_2 z rovnice (7) a rovnic (3) a (4) pro $A = B = 0$. Koeficienty rovnice jsou:

$$\left.\begin{aligned}
g_0 &= \frac{n_1}{(n_1-1)^2},\\
g_1 &= \frac{-5n_1^2+2n_1+1}{n_1(n_1-1)^2} - \frac{2n_1+1}{n_2(n_1-1)^2},\\
g_2 &= \frac{9n_1^3-8n_1^2-n_1+1}{n_1^2(n_1-1)^2} + \frac{3n_1-1}{n_2(n_1-1)^2} + \frac{n_1}{n_2^2(n_1-1)^2} +\\
&\quad + \frac{n_1^3+5n_1^2+n_1-1}{(n_2-1)(n_1-1)\,n_1^2},\\
g_3 &= \frac{2-3n_2}{(n_2-1)^2} - \frac{3}{n_1-1} + \frac{1}{n_2(n_1-1)} - \frac{6}{(n_1-1)(n_2-1)} -\\
&\quad - \frac{4n_2^2-n_2-1}{n_1(n_2-1)^2} - \frac{n_2^2}{n_1^2(n_2-1)^2},\\
g_4 &= \frac{3n_2-1}{(n_2-1)^2} + \frac{n_2(2n_2+1)}{n_1(n_2-1)^2},\\
g_5 &= -\frac{n_2}{(n_2-1)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (7a)$$

4. Řešení s korekčními konstantami

Řešení v odst. 3 nemá pro praxi význam, neboť volba nulové otvorové vady v prostoru třetího řádu a nulové barevné vady v prostoru paraxiálním je velmi nevýhodná s ohledem na konečný otvor objektivu. Tato okolnost je zvláště důležitá při výpočtu objektivů, za nimiž následují hranoly a je tedy, jak známo, nutné, aby objektiv měl určitou podkorekci jak otvorové vady, tak i vady barevné. Hodnoty podkorekcí se ovládají koeficienty A, B a E. Má tedy pro praxi velkou důležitost stanovit Mossottiovu rovnici s ohledem na uvedené korekční členy.

Za neznámou volme lámavost φ_1 přední čočky; z rovnic (1), (3), (4) a (7) vyloučíme φ_2, ϱ_1 a ϱ_2. Máme postupně: Ze (4) a (7) vychází

$$\varrho_1 = \frac{\psi_{12}e_2 + (b_1 + b_2 + B)}{e_1 + e_2}, \quad \varrho_2 = \varrho_1 - \psi_{12}, \tag{8}$$

kde pro stručnost je položeno

$$\psi_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{n_1\varphi_1}{n_1 - 1} + \frac{n_2(1 - \varphi_1)}{n_2 - 1}\right].$$

Koeficienty v (5) a (6) jsou

$$\left.\begin{gathered}
a_1 = \frac{n_1 + 2}{2}\,\varphi_1, \quad b_1 = \frac{1}{2}\,\varphi_1^2, \quad c_1 = \frac{n_1^2\varphi_1^3}{4(n_1 - 1)}, \quad e_1 = \frac{n_1 + 1}{n_1}\,\varphi_1, \\
a_2 = \frac{n_2 + 2}{2}\,(1 - \varphi_1), \quad b_2 = \frac{1}{2}\,(1 - \varphi_1^2), \quad c_2 = \frac{n_2^2(1 - \varphi_1)^3}{4(n_2 - 1)^2}, \\
e_2 = \frac{n_2 + 1}{n_2}\,(1 - \varphi_1)
\end{gathered}\right\} \quad (9)$$

Dosadíme-li (8) a (9) do (3), dostaneme po snadné, ale poněkud zdlouhavé úpravě

$$Q_0\varphi_1^5 + Q_1\varphi_1^4 + Q_2\varphi_1^3 + Q_3\varphi_1^2 + Q_4\varphi_1 + Q_5 = 0, \qquad (10)$$

kde

$$\left.\begin{aligned}
Q_0 &= g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5, \\
Q_1 &= -(g_1 + 2g_2 + 3g_3 + 4g_4 + 5g_5), \\
Q_2 &= g_2 + 3g_3 + 6g_4 + 10g_5 + \beta_2, \\
Q_3 &= -(g_3 + 4g_4 + 10g_5 - \beta_3 + \alpha_3), \\
Q_4 &= g_4 + 5g_5 + \beta_4 - \alpha_4, \\
Q_5 &= -(g_5 - \beta_5 + \alpha_5)
\end{aligned}\right\} (10a)$$

při čemž

$$\left.\begin{aligned}
\beta_2 &= -B\,\frac{(n_2 - n_1)^2}{n_1 n_2(n_1 - 1)\,(n_2 - 1)}, \\
\beta_3 &= -B\left[\frac{n_2 - n_1}{n_1(n_2 - 1)} - \frac{(n_2 - n_1)^2}{n_1 n_2(n_1 - 1)\,(n_2 - 1)}\right], \\
\beta_4 &= \frac{2(n_2 - n_1)}{n_1 n_2}\,B^2 + \frac{(n_2 - n_1)\,(2n_2 - 1)}{n_1 n_2(n_2 - 1)}\,B, \\
\beta_5 &= \frac{n_2 + 2}{n_2}\,B^2 + \frac{B}{n_2}, \\
\alpha_3 &= A\left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2}\right)^2, \\
\alpha_4 &= 2A\,\frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2}\cdot\frac{n_2 + 1}{n_2}, \\
\alpha_5 &= A\left(\frac{n_2 + 1}{n_2}\right)^2.
\end{aligned}\right\} (10b)$$

S předepsanými hodnotami n_1, n_2, A a B určíme φ_1 řešením rovnice (10); je-li předepsána hodnota E, pak z (2) vychází

$$\frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(E - \frac{1}{\nu_2}\right) = \varphi_1. \tag{11}$$

V katalogu optických skel vyhledáme pro dané hodnoty n_1 a n_2 takové dvojice skel, jejichž Abbeova čísla ν_1 a ν_2 vyhovují rovnici (11).

5. Výpočet objektivu triedru

Předešlých vzorců užijeme pro výpočet objektivu, za nímž následují hranoly, např. u triedru. Z dané otvorové vady za hranoly, jejíž velikost je udána otvorovou vadou okuláru, dále z polohy hranolů vzhledem k objektivu, indexu lomu hranolů a dráhy světla v nich určíme hodnoty A a B takto: Z obr. 1 plyne

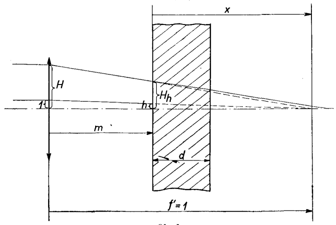
$$\frac{h}{x} = \frac{1}{f'} = 1,$$

tedy

$$A_h = -\frac{n^2 - 1}{n^3} d. \tag{12}$$

Nechť je $\Delta x'$ otvorová vada za soustavou (objektiv + hranol); otvorová vada za objektivem nechť je $\Delta_1 x'$. Z obecného vztahu

$$n'_k \left(\frac{h_k}{x'_k}\right)^2 \Delta x'_k = n_1 \left(\frac{h_1}{x_1}\right)^2 \Delta x_1 - \frac{H_1^2}{2} A$$



Obr. 1.

platného pro hranol plyne

$$\Delta x' = \Delta_1 x' - \frac{H_h^2}{2} A_h; \tag{13}$$

ježto je

$$\Delta_1 x' = -\frac{H_1^2}{2}(M_1 + M_2),$$

$$H_h = H_1(1 - m),$$

nabude (13) tvaru

$$\Delta x' = -\frac{H_1^2}{2}(M_1 + M_2) + \frac{H_1^2}{2}(1 - m)^2 \frac{n^2 - 1}{n^3} d,$$

odtud

$$M_1 + M_2 = (1 - m)^2 \frac{n^2 - 1}{n^3} d - \frac{2\Delta x'}{H_1^2},$$

takže

$$A = (1 - m)^2 \frac{n^2 - 1}{n^3} d - \frac{2\Delta x'}{H_1^2}.$$

Má-li být za hranolem splněna podmínka symetrie, tj.

$$\Delta f' = \Delta x',$$

dostaneme odtud za použití (13)

$$\Delta f' - \Delta_1 x' = -\frac{H_1^2}{2}(N_1 + N_2) = \frac{H_1^2}{2}(1 - m)^2 \frac{n^2 - 1}{n^3} d,$$

tedy

$$N_1 + N_2 = -(1 - m)^2 \frac{n^2 - 1}{n^3} d,$$

takže

$$B = -(1 - m)^2 \frac{n^2 - 1}{n^3} d$$

Je-li $\Delta x'_\lambda$ předepsaná barevná korekce za hranolem, pak

$$E = \Delta x'_\lambda - \frac{n - 1}{n^2 \nu} d.$$

Příklad. — Volíme sklo v hranolu o indexu lomu $n = 1{,}5688$*) ($\nu = 56$), dále $m = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$, $\Delta x' = 0{,}001$, $H_1 = 0{,}04$;

pro podkorekce A, B dostáváme

$$A = -1{,}13787,$$

$$B = -0{,}11213.$$

*) Schottovo sklo BaK4.

Korekční členy α a β nabývají hodnot:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= 0{,}00102827\,A,\\
\alpha_4 &= 0{,}103722\,A,\\
\alpha_5 &= 2{,}61561\,A,\\
\beta_2 &= -\,0{,}00766229\,B,\\
\beta_3 &= -\,0{,}0761249\,B,\\
\beta_4 &= 0{,}0641334\,B^2 + 0{,}115854\,B,\\
\beta_5 &= 2{,}23457\,B^2 + 0{,}617284\,B
\end{aligned}$$

a po dosazení A, B:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\,0{,}00117004 & \beta_2 &= 0{,}000859157\\
\alpha_4 &= -\,0{,}118022 & \beta_3 &= 0{,}00853573\\
\alpha_5 &= -\,2{,}976229 & \beta_4 &= -\,0{,}0121842\\
& & \beta_5 &= -\,0{,}0411202
\end{aligned}$$

Pro koeficienty g a Q vychází:

$$\begin{aligned}
g_0 &= 5{,}28121 & Q_0 &= -0{,}00072,\\
g_1 &= -25{,}95736 & Q_1 &= -0{,}08022,\\
g_2 &= 49{,}20479 & Q_2 &= -0{,}94859,\\
g_3 &= -45{,}95980 & Q_3 &= 1{,}53391,\\
g_4 &= 21{,}64480 & Q_4 &= 0{,}67884,\\
g_5 &= -4{,}21436 & Q_5 &= 7{,}14969.
\end{aligned}$$

Řešením rovnice (10) dostaneme

$$\varphi_1 = 2{,}52749$$

a pro poloměry křivosti vychází

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0{,}66973,\\
r_1' = r_2 &= -0{,}31374,\\
r_2' &= -1{,}38179.
\end{aligned}$$

Zkoumejme soustavu (pro $f' \approx 100$)

$$\begin{array}{lll}
r_1 = 66{,}97 & & \\
 & d_1 = 4{,}0 & n_1 = 1{,}54\\
r_2 = -\,31{,}37 & & \\
 & d_2 = 2{,}0 & n_2 = 1{,}62\\
r_3 = -\,138{,}18 & & \\
 & d_3 = 100\,m & \\
r_4 = \infty & & \\
 & d_4 = 100\,d = 66{,}7 & n_3 = 1{,}5688\\
r_5 = \infty & &
\end{array}$$

a sledujme jí tyto paprsky:

Paraxiální paprsek:

Za objektivem	$x' =$	98,0719	za hranolem $x' =$	22,2554
	$f' =$	100,5935,	$f' =$	100,5938

Paprsek s dopadovou výškou $H_1 = 2$:

Za objektivem	$x' =$	98,0543,	za hranolem $x' =$	22,2334
	$f' =$	100,6543,	$f' =$	100,6543
	$\Delta x' =$	$-$ 0,0176	$\Delta x' =$	$-$ 0,0220
	$\Delta f' =$	0,0608	$\Delta f' =$	0,0608

Paprsek s dopadovou výškou $H_1 = 4$:

Za objektivem	$x' =$	98,1732	za hranolem $x' =$	22,3698
	$f' =$	100,7049	$f' =$	100,7049
	$\Delta x' =$	0,1013	$\Delta x' =$	0,1144
	$\Delta f' =$	0,1114	$\Delta f' =$	0,1105

Paprsek s dopadovou výškou $H_1 = 6$:

Za objektivem	$x' =$	98,3052	za hranolem $x' =$	22,5303
	$f' =$	100,8403	$f' =$	100,8403
	$\Delta x' =$	0,2333	$\Delta x' =$	0,2749
	$\Delta f' =$	0,2468	$\Delta f' =$	0,2468

Z výsledků je patrné, že pro dopadovou výšku $H_1 = 4$ je dosaženo rovnosti $\Delta f' = \Delta x'$.

Za hranolem má být $\Delta x'_{\lambda} = 0,3$. Abychom této hodnoty dosáhli, hledáme v katalogu optických skel k daným hodnotám $n_1 = 1,54$ a $n_2 = 1,62$ takové dvojice skel, aby

$$\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} + \frac{n-1}{n^2\nu} d \approx 0,003.$$

Zjistíme, že podle Schottova katalogu vyhovuje dvojice: BaK2 ($\nu_1 = 59,6$) a F2 ($\nu_2 = 36,3$), neboť

$$\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} + \frac{n-1}{n^2\nu} d = 0,00308.$$

Literatura

[1] *H. Harting:* Zur Theorie der zweiteiligen verkitteten Fernrohr-Objektive. Zeitschr. f. Ikde XVIII, 1898, str. 357–380.
[2] *E. von Hoegh:* Zur Theorie der zweiteiligen verkitteten Fernrohr-Objektive. Zeitschr. f. Ikde, XIX, 1899, str. 37–39.
[3] *A. Gleichen:* Lehrbuch der geometrischen Optik. 1902, str. 331–334.
[4] *O. F. Mossotti:* Nuova teoria degli strumenti ottici. Annali della Universita Toscana, IV, 1855, str. 39–165. Annali della Universita Toscana, V, 1858, str. 7–95.
[5] *E. Turrière:* Optique industrielle. (Delagrave, 1920, Paris).
[6] *H. Chrétien:* Calcul des combinaisons optiques (Rev. d'opt., 1938, Paris).
[7] *B. Havelka:* Geometrická optika I, NČSAV, 1955, Praha.
[8] *B. Havelka:* Geometrická optika II, NČSAV, 1956, Praha.

РЕЗЮМЕ

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТАХ ОБЪЕКТИВА МОССОТИ

БЕДРЖИХ ГАБЕЛКА

В статье дается решение двухлинзового объектива зрительной трубы с внутренними склеенными поверхностями, если предписаны субкоррекции сферической и хроматической аберраций и комы. При нулевой коррекции проблема была впервые решена Моссоти, который получил уравнение пятой степени с коэффициентами (7a). Если А, Е, В — коэффициенты сферической и хроматической аберраций и комы, то решение представляется уравнением (10), коэффициенты которого (10a) и (10b). Автор применяет результаты к расчетам призменной зрительной трубы.

RÉSUMÉ

UNE CONTRIBUTION À LA RÉSOLUTION DE L'OBJECTIF DE MOSSOTTI

B. HAVELKA

On donne la solution d'un objectif de lunnette composé de deux lentilles collées dans le cas où les souscorrections de l'aberration sphérique, de la coma et de l'aberration chromatique longitudinale sont données. C'était l'opticien Mossotti qui a résolu le problème dans le cas des souscorrections nulles; il a réçu l'équation du cinquième ordre aux coefficients (7a). En désignant par A, B et E des coefficients de souscorrection de l'aberration sphérique et de la coma du trosième ordre et par E celui de l'aberration chromatique du premier ordre, on obtient comme une solutoin du problème l'équation (10) dont les coefficients sont donnés par (10a) et (10b).

L'auteur donne un exemple d'application concernant l'objectif de jumelle aux prismes.