Miroslav Laitoch

К проблеме ортогональных систем функций с весом

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 1 (1960), No. 1, 11--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119773

1960 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS FACULTAS RERUM SCIENTIARUM TOM 3

Katedra matematiky přírodovědecké fakulty.
Vedoucí: prof. RNDr. J. Metelka.

К ПРОБЛЕМЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ С ВЕСОМ

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ (MIROSLAV LAITOCH)

(Поступило в редакцию 21. 9. 1959 г.)

В настоящей статье изучаются особые системы функций с весом в требуемом размере для расширения метода Фурье решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на дифференциальные уравнения вида $p(x) . \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Q(t)\, u\right] = q(t) . \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(x)\, u\right]$.

1. Циклическая группа функций

Пусть функция α обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. определена для каждого } t \in (a,\ b), \\ \text{2. имеет в интервале } (a,\ b) \text{ положительную непрерывную первую производную,} \\ \text{3. для каждого } t \in (a,\ b) \text{ имеет место } \alpha(t) > t, \\ \text{4. } \alpha(a+) = a,\ \alpha(b-) = b, \\ \text{причем } \alpha(a+) = \lim \alpha(t) \text{ при } t \to a+,\ \alpha(b-) = \lim \alpha(t) \text{ при } t \to b-. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Для упрощения обозначений используем следующую символику сложных функций.

$\alpha_1(t) = \alpha(t)$,
$\alpha_{\nu+1}(t) = \alpha_1[\alpha_\nu(t)]$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$,
$\alpha_{-\nu}(t)$ обозначает обратную функцию к функции $\alpha_\nu(t)$,
$\alpha_0(t) = t$.

Очевидно имеет место
$\alpha_{-(\nu+1)}(t) = \alpha_{-1}[\alpha_{-\nu}(t)]$ для $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Сложные функции α_ν имеют для $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ следующие свойства:

1. определены в интервале $(a,\ b)$,

2. имеют в этом интервале непрерывную положительную производную,
3. для каждого $t \in (a, b)$ имеет место $\alpha_\nu(t) > t$, $\alpha_{-\nu}(t) < t$,
4. $\alpha_{\pm\nu}(a+) = a$, $\alpha_{\pm\nu}(b-) = b$.

Для $\lambda, \mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет место:
1. $\alpha_\mu[\alpha_\nu(t)] = \alpha_\nu[\alpha_\mu(t)] = \alpha_{\mu+\nu}(t)$,
2. $\alpha_\lambda\alpha_\mu[\alpha_\nu(t)] = \alpha_\lambda[\alpha_\mu\alpha_\nu(t)] = \alpha_{\lambda+\mu+\nu}(t)$ или $\alpha_{\lambda+\mu}[\alpha_\nu(t)] = \alpha_\lambda[\alpha_{\mu+\nu}(t)] = \alpha_{\lambda+\mu+\nu}(t)$,
3. $\alpha_0[\alpha_\nu(t)] = \alpha_\nu[\alpha_0(t)] = \alpha_\nu(t)$,
4. $\alpha_\nu[\alpha_{-\nu}(t)] = \alpha_0(t)$

Это очевидно.

Отсюда заключаем, что функции α_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ образуют бесконечную циклическую группу $\mathfrak{G}$ с основным элементом α_1: единичным элементом является функция α_0. Групповой операцией является сложение функций.

Теорема: *Пусть α_μ, $\alpha_\nu \in \mathfrak{G}$ две различные функции, т. е. $\mu \neq \nu$; тогда в интервале (a, b) не существует такое число t_0, что $\alpha_\mu(t_0) = \alpha_\nu(t_0)$.*

Доказательство: Действительно, предположим, что существует $t_0 \in (a, b)$, такое, что $\alpha_\mu(t_0) = \alpha_\nu(t_0)$, но тогда $\alpha_{-\mu}[\alpha_\mu(t_0)] = \alpha_{-\mu}[\alpha_\nu(t_0)]$, т. е. $\alpha_{\nu-\mu}(t_0) = t_0$, причем $\nu - \mu \neq 0$, что противоречит 3. свойству функций группы $\mathfrak{G}$.

2. Периодическая функция

Рассмотрим функцию f определенную для $t \in (a, b)$. Пусть функция α имеет свойства 1. (1).

Определение: *Говорим, что функция f является периодической с периодом $\omega = \alpha(t) - t$, имеет-ли место в интервале (a, b) тождество*

$$f[\alpha(t)] = f(t). \tag{1}$$

Очевидно имеет место:

Сложение, вычитание, произведение и деление (с знаменателем отличным от нуля) периодических функций с периодом ω опять есть периодическая функция с периодом ω.

Рассмотрим сейчас периоды функции f. Из равенства (1) вытекает, что

$$f[\alpha_\nu(t)] = f(t) \text{ для } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ и } t \in (a, b).$$

Теорема: *Имеет ли функция f период $\omega = \alpha(t) - t$, то она обладает и периодом $\omega_\nu = \alpha_\nu(t) - t$ для $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\omega_1 = \omega$, $\alpha_1 = \alpha$.*

Период $\omega_0 \equiv 0$ называем тривиальным. Остальные периоды ω_ν, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ненулевые.

Для периодических функций имеют место следующие предложения.

1. *$\omega_\nu(t) > 0$ для $\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $\omega_\nu(t) < 0$ для $\nu = -1, -2, -3, \ldots$.*

Доказательство: Действительно, утверждение вытекает из основного свойства 3. функции α_ν.

2. *$\omega_\mu(t) < \omega_\nu(t)$ для $\mu < \nu$.*

Доказательство: Действительно, так как $\nu - \mu > 0$, то и $\omega_{\nu-\mu}(t) > 0$ и следовательно $\omega_\nu(t) > \omega_\mu(t)$.

Теорема: *Пусть функция α, опеределенная для $t \in (a, b)$, имеет свойства 1.(1). Пусть функция X имеет следующие свойства:*

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \textit{определена для } t \in (a, b),\\
2.\ \textit{обладает положительной и непрерывной производной},\\
3.\ \textit{возрастает от } -\infty \textit{ до } \infty,\\
4.\ \textit{является решением функциального уравнения}\\
\qquad\qquad X[\alpha(t)] - X(t) = T, \qquad\qquad (2)\\
\textit{где } T \textit{ положительная константа.}
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Пусть функция f, определенная в интервале (a, b), есть периодическая функция с периодом $\omega = \alpha(t) - t$. Тогда функция $f[X^{-1}(t)]$, определенная в интервале $(-\infty, \infty)$, есть периодическая функция с периодом T.

Доказательство: Действительно, из уравнения $X[\alpha(t)] - X(t) = T$ вытекает, что $\alpha(t) = X^{-1}[X(t) + T]$ и следовательно $\alpha[X^{-1}(t)] = X^{-1}(t + T)$. Далее знаем, что $f[\alpha(t)] = f(t)$. Таким образом $f[X^{-1}(t + T)] = f\{\alpha[X^{-1}(t)]\} = f[X^{-1}(t)]$ для $t \in (-\infty, \infty)$.

Теорема: *Если функция f, интегрируемая в некотором интервале $\langle t_0, \alpha(t_0)\rangle$, $t_0 \in (a, b)$, и если для нее выполняется тождество $f[\alpha(t)] = f(t)$, $t \in (a, b)$, тогда*

$$\int\limits_{\alpha^{-1}X^{-1}(c)}^{\alpha^{-1}X^{-1}(c+T)} f(t) \,.\, X'(t) \,.\, \mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha^{-1}X^{-1}(d)}^{\alpha^{-1}X^{-1}(d+T)} f(t) \,.\, X'(t) \,.\, \mathrm{d}t,$$

где c, d произвольные числа.

Доказательство: Действительно, прежде всего имеет место $X'(t) = X'[\alpha(t)] \,.\, \alpha'(t)$ и следовательно

$$\int\limits_{\alpha^{-1}X^{-1}(c)}^{\alpha^{-1}X^{-1}(c+T)} f(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha^{-1}X^{-1}(c)}^{\alpha^{-1}X^{-1}(c+T)} f[\alpha(t)]\, X'[\alpha(t)]\, \alpha'(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+T)} f(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_{c}^{c+T} f[X^{-1}(t)]\, \mathrm{d}t = \int\limits_{d}^{d+T} f[X^{-1}(t)]\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{\alpha^{-1}X^{-1}(d)}^{\alpha^{-1}X^{-1}(d+T)} f(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t,$$

так как функция $f[X^{-1}(t)]$ есть периодическая с периодом T.

3. Гармонические составляющие

Пусть функция X имеет свойства 2.(3) в случае, что в функциональном уравнении 2. (2) $T = \frac{2\pi}{B}$, $B > 0$. Составим сложную функцию

$$y = A \sin [BX(t) + C],\ t \in (a, b), \qquad (1)$$

где A, C константы. Такую функцию будем называть гармонической составляющей.

Теорема: *Функция (1) имеет период* $\omega_1 = \alpha(t) - t$.

Доказательство: Действительно, для каждого значения независимой переменной $t \in (a, b)$ имеет место $y[t + \omega_1(t)] = y[\alpha(t)] = A \sin\{BX[\alpha(t)] + C\} = A \sin\{B[X(t) + T] + C\} = A \sin[BX(t) + BT + C] = A \sin[BX(t) + C] = y(t)$, так как $BT = 2\pi$.

Каждую гармоническую составляющую очевидно можно записать в виде

$$A \sin[BX(t) + C] = A[\cos C \, . \sin BX(t) + \sin C \, . \cos BX(t)].$$

Если положить

$$a = A \, . \sin C, \; b = A \, . \cos C,$$

то можно каждую гармоническую составляющую записать следующим образом

$$y = a \, . \cos[BX(t)] + b \, . \sin[BX(t)] \tag{2}$$

Обратно, каждая функция (2) есть гармоническая составляющая. Для того, чтобы это показать, достаточно найти значение постоянных A, C. Но, для них получаем следующие условия:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \;\; \sin C = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \; \cos C = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Отсюда легко определить C (оно определяется с точностью 2π).

4. Пример из механики

Пусть путь движующейся точки определен в прямоугольных координатах следующими параметрическими уравнениями:

$$x = \varrho(t) \, . \cos \varphi(t), \; y = \varrho(t) \, . \sin \varphi(t); \; t \in (a, b),$$

где $\varrho(t) = 1 : \sqrt{BX'(t)}$, $\varphi(t) = BX(t)$, $B > 0$, где X является возрастающим решением функционального уравнения $X[\alpha(t)] - X(t) = T$, $T > 0$, которое имеет непрерывную производную 3-го порядка.

Для отдельных составляющих скорости получаем

$$v_x = \varrho'(t) \cos \varphi(t) - \varrho(t) \, \varphi'(t) \sin \varphi(t), \qquad v_y = \varrho'(t) \sin \varphi(t) + \varrho(t) \, \varphi'(t) \cos \varphi(t)$$

и отсюда скорость

$$|v| = \sqrt{\varrho'^2(t) + \varrho^2(t) \, . \, \varphi'^2(t)} = \sqrt{\varrho'^2(t) + \varphi'(t)} = \sqrt{\varrho'^2(t) + \frac{1}{\varrho^2(t)}},$$

так как $\varrho^2(t) \, . \, \varrho'(t) \equiv 1$.

Для составляющих ускорения получаем

$$a_x = [\varrho''(t) - \varrho(t) \, . \, \varphi'^2(t)] \, . \cos \varphi(t), \qquad a_y = [\varrho''(t) - \varrho(t) \, . \, \varphi'^2(t)] \, . \sin \varphi(t)$$

и отсюда ускорение

$$|a| = |\varrho''(t) - \varrho(t) \cdot \varphi'^2(t)| = \left|\varrho''(t) - \frac{1}{\varrho^3(t)}\right|.$$

Из условия

$$\varrho^2(t) \cdot \varphi'(t) \equiv 1$$

заключаем, что при движении точки опишет его радиус-вектор за то же время картину постоянной площади. Площадь $|P|$ картинки, которую описал радиус-вектор между промежутком времени $\langle t_1, t_2 \rangle$ дается уравнением

$$|P| = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \varrho^2(t)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t_2 - t_1).$$

Рассмотрим еще y-овую составляющую этого движения. Определим силу, которая способствует этому движению. Пусть сила $\boldsymbol{F}$ направлена к O, и будет функцией расстояния $\boldsymbol{y}$ от начала O и функцией времени $\boldsymbol{t}$, следовательно

$$F(y, t) = m \cdot a_y = m \cdot \sin \varphi(t)\, \varrho(t) \cdot \left[\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} - \varphi'^2(t)\right] = my\left[\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} - \varphi'^2(t)\right].$$

Отсюда вытекает, что

$$y'' = \left[\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} - \varphi'^2(t)\right] \cdot y$$

или, тоже что

$$y'' = \left\{\sqrt{BX'(t)} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{BX'(t)}}\right]'' - B^2 X'^2(t)\right\} \cdot y.$$

Видим, что расстояние y точки от начала O есть функция, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению 2-го порядка, общий интеграл которой зависит от двух параметров A, C и имеет вид

$$y(t) = \frac{A \sin [BX(t) + C]}{\sqrt{BX'(t)}}.$$

Если нам известна скорость и положение точки в момент t_0, то сможем определить постоянные A, C. Легко убедится, что функция

$$\sqrt{BX'(t)} \cdot y(t)$$

есть периодическая с периодом $\omega_1 = \alpha(t) - t$.

5. Многочлены и гармонические ряды составляющих

Сохраним прежние обозначения и предпосылки и рассмотрим следующие гармонические составляющие

$$y_k = a_k \cos [kBX(t)] + b_k \sin [kBX(t)], \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{1}$$

Теорема: *Каждая из гармонических составляющих* (1) *обладает периодом* $\omega = \alpha(t) - t$.

Доказательство: Действительно,

$$y_k[\alpha(t)] = a_k \cos\{kBX[\alpha(t)]\} + b_k \sin\{kBX[\alpha(t)]\} = a_k \cos\{kB[X(t) + T]\} + \\ + b_k \sin\{kB[X(t) + T]\} = a_k \cos[kBX(t)] + b_k \sin[kBX(t)] = y_k(t),$$

так как

$$T = \frac{2\pi}{B}.$$

Следствие: *Каждая сумма*

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos[kBX(t)] + b_k \sin[kBX(t)]\},$$

где a_0, a_k, b_k *константы, является функцией с периодом* $\omega_1 = \alpha(t) - t$.

Определение: *Функцию* s_n *назовем многочленом гармонических составляющих* n*-ой степени с периодом* $\omega_1 = \alpha(t) - t$.

Выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos[kBX(t)] + b_k \sin[kBX(t)]\}$$

тогда назовем бесконечным рядом гармонических составляющих. Если этот ряд сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом $\omega_1 = \alpha(t) - t$.

6. Основная система гармонических составляющих

Пусть X есть при данной функции α решением функциального уравнения

$$X[\alpha(t)] - X(t) = 2\pi. \qquad (1)$$

Определение: *Основной системой гармонических составляющих в интервале* $\langle X^{-1}(c),\ X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$, c*-произвольное число, будем называть систему функций*

$$1, \cos X(t), \sin X(t), \dots, \cos n\,X(t), \sin n\,X(t), \dots \qquad (2)$$

Теорема: *Функции системы (2) имеют период* $\omega_1 = \alpha(t) - t$.

Это очевидно.

Теорема: *Система функций (2) в интервале* $\langle X^{-1}(c), X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$ *ортогональна с весом* $X'(t)$.

Доказательство: Действительно, легко проверить следующие формулы. Для целого $n \neq 0$ имеет место:

$$1)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \cos n\, X(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0, \qquad 2)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \sin n\, X(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0,$$

$$3)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \cos^2 nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \pi, \qquad 4)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \sin^2 nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \pi,$$

для $m \neq n$:

$$5)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \cos nX(t) \cos mX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0,$$

$$6)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \sin nX(t) \sin mX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0;$$

для целых m, n:

$$7)\ \int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} \sin m\, X(t) \cos nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

7. Ряд Фурье периодической функции с периодом $\omega_1 = \alpha(t) - t$

Пусть функция f обладает периодом ω_1. Так как каждая функция системы 6. (2) обладает тем же периодом, то можно предположить, что для разложения функции f имеет место

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos [nX(t)] + b_n \sin [nX(t)]\}. \tag{1}$$

Для данной функции f коэффициенты a_n, b_n найдем легко. Предположим, что данный ряд и тот, который получится после преобразования, можно интегрировать почленно. Умножим обе стороны (1) $X'(t)$ и интегрируем в интервале $\langle X^{-1}(c), X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$. Получим

$$\int_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} f(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = a_0\pi;$$

отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{X^{-1}}^{X^{-1}(c+2\pi)} f(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int\limits_{c}^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)]\, \mathrm{d}t.$$

Также умножим обе стороны (1) выражением $\cos nX(t)\, X'(t)$ и интегрируем в интервале $\langle X^{-1}(c),\ X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$. Получим

$$\int\limits_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} f(t) \cos nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = a_n \pi;$$

отсюда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} f(t) \cos nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int\limits_{c}^{(c+2\pi)} f[X^{-1}(t)] \cos nt\, \mathrm{d}t.$$

Таким же образом мы получили бы, что

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{X^{-1}(c)}^{X^{-1}(c+2\pi)} f(t) \sin nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int\limits_{c}^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)] \sin nt\, \mathrm{d}t.$$

Коэффициенты a_n, b_n будем называть коэффициентами Фурье и ряд (1) с такими коэффициентами — рядом Фурье функции f, принадлежающей к системе 6. (2).

То, что к функции f принадлежит ряд Фурье, обозначим просто

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nX(t) + b_n \sin nX(t)].$$

Из выведенных уравнений видно, что коэффициенты Фурье функции f, принадлежающей к системе 6. (2). такие же, как коэффициенты функции $f[X^{-1}(t)]$, соответствующие основной системе

$$1, \cos t, \sin t, \ \ldots, \cos nt, \sin nt, \ \ldots$$

в интервале $\langle c, c + 2\pi\rangle$.

Замечания.

1. *Имеет место* $X^{-1}(c + 2\pi) = \alpha[X^{-1}(c)]$.

Действительно, из функционального уравнения $X[\alpha(t)] - X(t) = 2\pi$ сейчас же следует, что $X\{\alpha[X^{-1}(t)]\} = t + 2\pi$ и следовательно $X^{-1}(t + 2\pi) = \alpha[X^{-1}(t)]$. Отсюда следует утверждение, если положить $t = c$.

2. *Длина интервала* $\langle X^{-1}(c), X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$, *равна* $X^{-1}(c + 2\pi) - X^{-1}(c) = \alpha[X^{-1}(c)] - X^{-1}(c) = \omega(t_0)$, *где* $t_0 = X^{-1}(c)$, $\omega = \alpha(t) - t$.

8. Четные и нечетные функции

Рассмотрим две функции f и g такие, для которых существует сложная функция fg.

Определение: *Будем говорить, что функция f четная (нечетная) по отношению к g, если имеет место*

$$f[g(-t)] = f[g(t)] \text{ соотв. } f[g(-t)] = -f[g(t)].$$

Если $g(t) = t$, тогда определение согласуется с известным определением четной и нечетной функции. Если функция f четная (нечетная) по отношению к g, то это значит, что сложная функция $f[g(t)]$ четная (нечетная).

Легко доказать предложение:

Теорема: *Если функция f четная (нечетная) по отношению к g, тогда*

$$\int_{-c}^{c} f[g(t)]\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int_{0}^{c} f[g(t)]\mathrm{d}t \quad \text{соотв.} \quad \int_{-c}^{c} f[g(t)]\,\mathrm{d}t = 0$$

для произвольного c.

9. Особые ряды Фурье

1. *Пусть X — решение функционального уравнения* 6. (1). *Пусть f четная функция по отношению к X^{-1}. Потом функция $f[X^{-1}(t)]\,.\cos nt$ четная.*

В таком случае коэффициенты Фурье функции f по отношению к системе 6. (1) определены выражениями

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f[X^{-1}(t)]\cos nt\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и ряд Фурье соответствующий функции f

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nX(t),$$

где коэффициенты a_n определены выражениями (1).

2. *Пусть X-решение функционального уравнения* 6. (1). *Пусть f — нечетная функция по отношению к функции X^{-1}. Тогда и функция $f[X^{-1}(t)]\,.\sin nt$ нечетная.*

В таком случае коэффициенты Фурье функции f по отношению к системе 6. (2) определены выражениями

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f[X^{-1}(t)]\sin nt\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и ряд Фурье соответствующий функции f

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nX(t),$$

где коэффициенты b_n определены выражениями (2).

10. Примеры ортогональных систем функций с весом

Пусть функция X имеет свойства 2. (3), и является решением функциального уравнения

$$X[\alpha(t)] - X(t) = \pi,$$

где α — данная функция имеющая свойства 1. (1).

Системы функций

$$1, \cos X(t), \quad \cos 2X(t), \ \ldots, \quad \cos nX(t), \ldots \tag{1}$$

$$\sin X(t), \quad \sin 2X(t), \ldots, \quad \sin nX(t), \ldots \tag{2}$$

являются в интервале $\langle X^{-1}(0),\ X^{-1}(\pi)\rangle$ *ортогональными с весом* $X'(t)$.

Доказательство:

Имеет место $\displaystyle\int_{X^{-1}(0)}^{X^{-1}(\pi)} \cos nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots;$

$$\int_{X^{-1}(0)}^{X^{-1}(\pi)} \cos nX(t) \cos mX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0 \text{ для } m \neq n; \int_{X^{-1}(0)}^{X^{-1}(\pi)} \cos^2 nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда легко проверить утверждение о системе (1).

Далее имеет место $\displaystyle\int_{X^{-1}(0)}^{X^{-1}(\pi)} \sin mX(t) \sin nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = 0$ для $m \neq n$,

$$\int_{X^{-1}(0)}^{X^{-1}(\pi)} \sin^2 nX(t)\, X'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда вытекает утверждение о системе (2).

Рассмотрим сейчас функцию f, определенную в интервале (a, b) и составим соответствующие ряды Фурье по отношению к системам (1) и (2). Легко проверить, что в первом случае имеет место

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos X(t) + a_2 \cos 2X(t) + \ldots + a_n \cos nX(t) + \ldots,$$

где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f[X^{-1}(t)]\,\mathrm{d}t; \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f[X^{-1}(t)]\,\mathrm{d}t, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Во втором случае мы имеем

$$f(t) \sim b_1 \sin X(t) + b_2 \sin 2X(t) + \ldots + b_n \sin nX(t) + \ldots,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f[X^{-1}(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Замечание. Из нашего рассуждения вытекает, что классическую теорию ортогональных систем функций и разложение функций в ряд с помощью этих систем можно перенести непосредственно и на нами изучаемые ортогональные функции с весом. Не развивая дальше соответствующую теорию, мы займемся одним случаем использования этих систем функций, когда оказывается возможным расширить применение метода Фурье к решению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

11. Метод Фурье интегрирования дифференциального уравнения в частных производных

$$p(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Q(t)\, u\right] = q(t)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(x)\, u\right].$$

Пусть функция α, определенная для $t \in (a, b)$, и фунция β, определенная для $x \in (\overline{a}, \overline{b})$, имеет свойства 1. (1). Пусть X и $\overline{X}$ соответствующие решения функциональных уравнений

$$X[\alpha(t)] - X(t) = \pi \quad \text{соовт.} \quad \overline{X}[\beta(x)] - \overline{X}(x) = \pi,$$

производная которых в каждой точке отлична от нуля и которые имеют непрерывную производную 3-го порядка и удовлетворяют начальным условиям $X(t_0) = 0$ соовт. $\overline{X}(x_0) = 0$, где $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (\overline{a}, \overline{b})$.

Для краткости обозначим $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0$; $\overline{X}(x_0) = \overline{X}_0$, $\overline{X}'(x_0) = \overline{X}'_0$; $\beta(x_0) = \beta_0$ и положим

$$q(t) = -X'^2(t), \qquad p(x) = -\overline{X}'^2(x),$$

$$Q(t) = \frac{3}{4}\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)} - \frac{1}{2}\frac{X'''(t)}{X'(t)}, \quad P(x) = \frac{3}{4}\frac{\overline{X}''^2(x)}{\overline{X}'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{\overline{X}'''(x)}{\overline{X}'(x)}.$$

Рассмотрим тенерь дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$p(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Q(t)\,u\right] = q(t)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(x)\,u\right]. \tag{1}$$

Будем искать решение $u(t, x) \neq 0$, которое удовлетворяет следующим краевым и начальным условиям

$$u(x_0, t) = u(\beta_0, t) = 0; \qquad x_0 \in (\overline{a}, \overline{b}), \tag{2}$$

$$u(x, t_0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} = g(x); \qquad t_0 \in (a, b), \tag{3}$$

где f, g данные функции, определенные в интервале $(\overline{a}, \overline{b})$.

Решение $u(x, t)$ будем искать в виде произведения

$$u(x, t) = \Phi(x)\,.\,T(t).$$

Подставляя $u(x, t)$ в уравнение (1), получим

$$\Phi(x)\,p(x)\,[T''(t) - Q(t)\,T(t)] = T(t)\,q(t)\,[\Phi''(x) - P(x)\,\Phi(x)].$$

и после преобразовании

$$\frac{T''(t) - Q(t)\,T(t)}{q(t)\,T(t)} = \frac{\Phi''(x) - P(x)\,\Phi(x)}{p(x)\,\Phi(x)};$$

очевидно выражения слева и справа являются константами. В случае, что эта константа положительная, λ^2, тогда получим

$$T'' = [Q(t) + \lambda^2 q(t)]\,.\,T, \tag{4}$$

$$\Phi'' = [P(x) + \lambda^2 p(x)]\,.\,\Phi. \tag{5}$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям (2), должно иметь место

$$\Phi(x_0) = \Phi(\beta_0) = 0. \tag{6}$$

Решение дифференциального уравнения (5) можно записать в виде

$$\Phi(x) = c_1 \frac{\cos \lambda \overline{X}(x)}{\sqrt{|\overline{X}'(x)|}} + c_2 \frac{\sin \lambda \overline{X}(x)}{\sqrt{|\overline{X}'(x)|}}.$$

Чтобы удовлетворить условиям (6), должно иметь место

$$c_1 \frac{\cos \lambda \overline{X}(x_0)}{\sqrt{|\overline{X}'(x_0)|}} + c_2 \frac{\sin \lambda \overline{X}(x_0)}{\sqrt{|\overline{X}'(x_0)|}} = 0,$$

$$c_1 \frac{\cos \lambda \overline{X}(\beta_0)}{\sqrt{|\overline{X}'(\beta_0)|}} + c_2 \frac{\sin \lambda \overline{X}(\beta_0)}{\sqrt{|\overline{X}'(\beta_0)|}} = 0.$$

Так как $\overline{X}(x_0) = 0$ и $\beta_0 = \beta(x_0)$ и следовательно $X(\overline{\beta_0}) = X[\overline{\beta}(x_0)] = \overline{X}(x_0) + \pi = \pi$, то из первого уравнения получаем условие $c_1 = 0$. Для нетривиального решения найдем, что $c_2 \neq 0$; однако в этом случае должно иметь место $\sin \lambda\overline{X}(\beta_0) = 0$, так как $\lambda\overline{X}(\beta_0) = k\pi$, k целое. Но $\lambda\overline{X}(\beta_0) = \lambda\pi$, следовательно $\lambda = k$.

Значит уравнение (5) имеет для $\lambda = k = 1, 2, 3, \ldots$ решение

$$\Phi_k(x) = \frac{\sin k\overline{X}(x)}{\sqrt{|\overline{X}'(x)|}},$$

которое удовлетворяет условию (6).

Таким же образом уравнение (4) имеет для $\lambda = k = 1, 2, 3, \ldots$ решение, которое можно, записать в виде

$$T_k(t) = c_k \frac{\cos kX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}} + d_k \frac{\sin kX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

и следовательно решение дифференциального уравнения (1) можно записать в виде

$$u_k(x, t) = \left[c_k \frac{\cos kX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}} + d_k \frac{\sin kX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}}\right] \cdot \frac{\sin k[\overline{X}(x)]}{\sqrt{|\overline{X}'(x)|}}.$$

Чтобы получить решение, которое удавлетворяет начальным условиям (3), можно положить

$$u(x, t) = \sum_1^\infty u_k(x, t) = \sum_1^\infty \left[c_k \frac{\cos kX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}} + d_k \frac{\sin kX(t)}{\sqrt{|X'(t)|}}\right] \cdot \frac{\sin k[\overline{X}(x)]}{\sqrt{|\overline{X}'(x)|}} \tag{7}$$

и требовать, чтобы имело место

$$\sqrt{|\overline{X}'(x)|}\sqrt{|X_0'|}\, u(x, t_0) = \sum_1^\infty c_k \sin\left[k\overline{X}(x)\right] = \sqrt{|X_0'|}\sqrt{|\overline{X}'(x)|}\, f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} = g(x).$$

Если преобразовать (7), тогда получим

$$\sqrt{|\overline{X}'(x)|}\sqrt{|X'(t)|}\, u(x, t) = \sum_1^\infty [c_k \cos kX(t) + d_k \sin kX(t)] \,.\, \sin[k\overline{X}(x)].$$

Дифференцируя для t, получим

$$\sqrt{|\overline{X}'(x)|} \cdot \left[\frac{\operatorname{sgn} X'(t)}{2} |X'(t)|^{-\frac{1}{2}} X''(t)\, u(x, t) + |X'(t)|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_1^\infty [-kc_k \sin kX(t) + kd_k \cos kX(t)]\, X'(t) \sin[k\overline{X}(x)]$$

и для $t = t_0$ отсюда вытекает

$$\sqrt{|\overline{X}'(x)|} \cdot \left[\frac{\operatorname{sgn} X_0'}{2} |X_0'|^{-\frac{1}{2}} X_0'' u(x, t_0) + |X_0'|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} k d_k X_0' \sin [k\overline{X}(x)].$$

Потом

$$\sum_{1}^{\infty} k d_k \sin [k\overline{X}(x)] = \left[\frac{1}{2} |X_0'|^{-\frac{3}{2}} X_0'' f(x) + |X_0'|^{-\frac{1}{2}} g(x)\right] \sqrt{|\overline{X}'(x)|}.$$

Видим, что коэффициенты c_k, d_k можно определить как коэффициенты Фурье функций

$$\sqrt{|X_0'|} \sqrt{|\overline{X}'(x)|} f(x) \quad \text{соовт.} \quad \left[\frac{1}{2} |X_0'|^{-\frac{3}{2}} X_0'' + |X_0'|^{-\frac{1}{2}} g(x)\right] \sqrt{|\overline{X}'(x)|}$$

по отношению к ортьогональной системе $\{\sin k\overline{X}(x)\}_1^{\infty}$ в интервале $\langle x_0, \beta_0 \rangle$ с весом $\overline{X}'(x)$, где $x_0 = \overline{X}^{-1}(0)$, $\beta_0 = \overline{X}^{-1}(\pi)$.

ZUSAMMENFASSUNG

BEITRAG ZU ORTHOGONALSYSTEMEN MIT GEWICHT

MIROSLAV LAITOCH

(Eingelangt am 21. 9. 1959)

In der vorliegenden Arbeit werden spezielle Orthogonalsysteme mit Gewicht untersucht.

Nehmen wir an, daß die Funktion α folgende Eigenschaften besitzt: 1) sie ist für $t \in (a, b)$ definiert, 2) in diesem Intervall besitzt sie eine positive stetige Ableitung, 3) für jedes $t \in (a, b)$ gilt $\alpha(t) > t$, 4) $\alpha(a+) = a$, $\alpha(b-) = b$, wobei $\alpha(a+) = \lim \alpha(t)$ für $t \to a+$, $\alpha(b-) = \lim \alpha(t)$ für $t \to b-$ bedeutet.

Setzen wir weiter: $\alpha_0(t) = t$, $\alpha_1(t) = \alpha(t)$, $\alpha_{\nu+1}(t) = \alpha_1[\alpha_\nu(t)]$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ und bezeichnen wir mit $\alpha_{-\nu}(t)$ die inverse Funktion zu $\alpha_\nu(t)$. Es ist leicht zu sehen, daß die Funktionen α_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ folgende Eigenschaften besitzen:

1) Sie sind im Intervall (a, b) definiert, 2) sie besitzen dort eine positive stetige Ableitung erster Ordnung, 3) für jedes $t \in (a, b)$ gilt $\alpha_\nu(t) > t$, $\alpha_{-\nu}(t) < t$, 4) $\alpha_{\pm\nu}(a+) = a$, $\alpha_{+\nu}(b-) = b$.

Es gelten folgende Sätze:

Die Funktionen α_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, bilden eine unendliche zyklische Gruppe mit dem Grundelement α_1 und mit dem Einselement α_0. Die Gruppenoperation ist die Zusammensetzung von Funktionen.

Wenn die Funktion f für $t \in (a, b)$ definiert ist und die Funktion α die angeführten Eingenchaften besitzt, so sagen wir, das die Funktion f eine periodische Funktion mit der Periode $\omega = \alpha(t) - t$ ist, wenn für jedes $t \in (a, b)$ die Gleichheit $f[\alpha(t)] = f(t)$ gilt.

Wenn die Funktion f periodisch mit der Periode ω ist, so besitzt sie auch die Perioden ω_ν, wo $\omega_\nu(t) = \alpha_\nu(t) - t$ für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ bedeutet.

Machen wir folgende Voraussetzungen:

1) die Funktion α sei im Intervall (a, b) definiert und habe dort die oben angeführten Eigenschaften, 2) die Funktion X sei im Intervall (a, b) definiert, habe dort eine stetige Ableitung erster Ordnung, wachse von $-\infty$ zu ∞ und sei eine Lösung der Funktionalgleichung $X[\alpha(t)] - X(t) = T$, wobei $T > 0$, 3) die Funktion f mit dem Definitionsbereich (a, b) sei periodisch mit der Periode $\omega = \alpha(t) - t$. Dann gilt die Behauptung: Die Funktion $f[X^{-1}(t)]$ ist im Interval $(-\infty, \infty)$ eine periodische Funktion mit der Periode T, wobei X^{-1} die inverse Funktion zu X bedeutet.

Wenn X eine Lösung der Funktionalgleichung $X[\alpha(t)] - X(t) = \dfrac{2\pi}{B}$, $B > 0$, mit den oben angeführten Eigenschaften ist, dann sind die Funktionen $y_k = A \sin[kBX(t) + C]$, A, C konstant, $k = 1, 2, 3, \ldots$, periodische Funktionen mit der Periode $\omega = \alpha(t) - t$.

Diese Funktionen nennen wir harmonische Funktionen.

Die Summe

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} \{a_k \cos[kBX(t)] + b_k \sin[kBX(t)]\},$$

wo a_0, a_k, b_k konstant sind, nennen wir Polynom harmonischer Funktionen n-ter Ordnung mit der Periode $\omega = \alpha(t) - t$.

Die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \{a_k \cos[kBX(t)] + b_k \sin[kBX(t)]\}$$

nennen wir unendliche Reihe harmonischer Funktionen mit der Periode $\omega = \alpha(t) - t$. Die Summe dieser Reihe, falls sie existiert, ist wieder eine Funktion mit der Periode ω.

Die Funktionen

$$1, \cos X(t), \sin X(t), \ldots, \cos nX(t), \sin nX(t), \ldots$$

bilden im Intervall $\langle X^{-1}(c), X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$ das Fundamentalsystem der harmonischen Funktionen, wobei c eine beliebige Zahl ist.

Wenn die Funktion f eine periodische Funktion mit der Periode ω ist, dann nennen wir die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \{a_k \cos[kX(t)] + b_k \sin[kX(t)]\}$$

die Fourierreihe der Funktion f bezüglich des Fundamentalsystems der harmonischen Funktionen in dem Falle, wenn für die Koeffizienten a_k, b_k folgende Formeln gelten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)]\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)] \cos kt\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)] \sin kt\,\mathrm{d}t.$$

Die vorliegenden Betrachtungen und Ergebnisse ermöglichen die Applikation der Fourier'schen Methode zur Auffindung einer partikularen Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ auch im Falle einer partiellen Differentialgleichung von allgemeinerem Typus

$$p(x) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Q(t)\,u\right] = q(t) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(x)\,u\right].$$

SHRNUTÍ

PŘÍSPĚVEK K ORTOGONÁLNÍM SYSTÉMŮM FUNKCÍ S VAHOU

MIROSLAV LAITOCH

(Došlo 21. 9. 1959)

V článku jsou studovány speciální ortogonální systémy funkcí s vahou.

Předpokládejme, že funkce α má tyto vlastnosti: 1. je definována pro $t \in (a, b)$, 2. má spojitou kladnou derivaci, 3. pro každé $t \in (a, b)$ platí $\alpha(t) > t$, 4. $\alpha(a+) = a$, $\alpha(b-) = b$, při čemž $\alpha(a+) = \lim \alpha(t)$ pro $t \to a+$, $\alpha(b-) = \lim \alpha(t)$ pro $t \to b-$.

Značí-li $\alpha_1(t) = \alpha(t)$, $\alpha_{\nu+1}(t) = \alpha_1[\alpha_\nu(t)]$ pro $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, $\alpha_{-\nu}(t)$ inversní funkci k $\alpha_\nu(t)$, $\alpha_0(t) = t$, ukáže se, že složené funkce α_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ mají tyto vlastnosti:

1. jsou definovány v intervalu (a, b), 2. mají spojitou kladnou derivaci, 3. pro každé $t \in (a, b)$ platí $\alpha_\nu(t) > t$, $\alpha_{-\nu}(t) < t$, 4. $\alpha_{\pm\nu}(a+) = a$, $\alpha_{\pm\nu}(b-) = b$.

Funkce α_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tvoří nekonečnou cyklickou grupu o základním prvku α_1. Jednotkovým prvkem je prvek α_0. Grupovou operací je skládání funkcí.

Nechť funkce f je definována pro $t \in (a, b)$ a nechť funkce α má výše uvedené vlastnosti.

Řekneme, že funkce f je periodická s periodou $\omega = \alpha(t) - t$, platí-li pro každé $t \in (a, b)$ rovnost $f[\alpha(t)] = f(t)$.

Platí následující věty:

Má-li funkce f periodu ω, má též periody ω_ν, kde $\omega_\nu(t) = \alpha_\nu(t) - t$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Nechť platí: 1. funkce α, definovaná pro $t \in (a, b)$, má dříve uvedené vlastnosti, 2. funkce X má tyto vlastnosti: je definována pro $t \in (a, b)$, má spojitou derivaci, roste od $-\infty$ do ∞ a je řešením funkční rovnice $X[\alpha(t)] - X(t) = T$, kde $T > 0$, 3. funkce f, definovaná pro $t \in (a, b)$, je periodická s periodou $\omega = \alpha(t) - t$. Potom složená funkce $f[X^{-1}(t)]$, definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$, je periodická s periodou T, při čemž X^{-1} značí inversní funkci k funkci X.

Nechť X je řešením funkční rovnice $X[\alpha(t)] - X(t) = \dfrac{2\pi}{B}$, $B > 0$, které má vlastnosti požadované v předchozí větě. Potom funkce $y_k = A \sin [kBX(t) + C]$, A, C konst., $k = 1, 2, 3, \ldots$, mají periodu $\omega = \alpha(t) - t$.

Tyto funkce nazýváme harmonickými složkami.

Součet

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \{a_k \cos [kBX(t)] + b_k \sin [kBX(t)]\},$$

kde a_0, a_k, b_k jsou konstanty, nazýváme mnohočlenem harmonických složek n-tého stupně s periodou $\omega = \alpha(t) - t$.

Výraz

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \{a_k \cos [kBX(t)] + b_k \sin [kBX(t)]\}.$$

nazýváme nekonečnou řadou harmonických složek. Součet řady, existuje-li, je pak funkce s periodou $\omega = \alpha(t) - t$.

Základním systémem harmonických složek v intervalu $\langle X^{-1}(c), X^{-1}(c + 2\pi)\rangle$ nazýváme systém funkcí

$$1, \cos X(t), \sin X(t), \ldots, \cos n\, X(t), \sin nX(t), \ldots,$$

při čemž c je libovolné číslo.

Je-li funkce f periodická s periodou ω, potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \{a_k \cos [kX(t)] + b_k \sin [kX(t)]\}$$

nazveme Fourierovou řadou funkce f příslušnou k základnímu systému harmonických složek, platí-li pro koeficienty a_k, b_k vzorce

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_c^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)]\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_c^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)] \cos kt\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_c^{c+2\pi} f[X^{-1}(t)] \sin kt\,\mathrm{d}t.$$

Provedené úvahy a získané výsledky umožňují aplikovat Fourierovu metodu k nalezení partikulárního řešení parciální diferenciální rovnice $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i v případě obecnější parc. diferenciální rovnice $p(x)\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Q(t)u\right] = q(t)\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(x)\,u\right]$, jak je ukázáno v posledním odstavci článku.