

Abdelmalek Azizi; Mohammed Talbi

Capitulation dans certaines extensions non ramifiées de corps quartiques cycliques

Archivum Mathematicum, Vol. 44 (2008), No. 4, 271--284

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119767>

Terms of use:

© Masaryk University, 2008

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

CAPITULATION DANS CERTAINES EXTENSIONS NON
RAMIFIÉES DE CORPS QUARTIQUES CYCLIQUESABDELMALEK AZIZI[†] AND MOHAMMED TALBI

ABSTRACT. Let $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ with $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ where l is a prime number such that $l = 2$ or $l \equiv 5 \pmod{8}$, ε the fundamental unit of k , p a prime number such that $p \equiv 1 \pmod{4}$ and $(\frac{p}{l})_4 = -1$, $K_2^{(1)}$ the Hilbert 2-class field of K , $K_2^{(2)}$ the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$ and $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ the Galois group of $K_2^{(2)}/K$. According to E. Brown and C. J. Parry [7] and [8], $C_{2,K}$, the Sylow 2-subgroup of the ideal class group of K , is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, consequently $K_2^{(1)}/K$ contains three extensions F_i/K ($i = 1, 2, 3$) and the tower of the Hilbert 2-class field of K terminates at either $K_2^{(1)}$ or $K_2^{(2)}$. In this work, we are interested in the problem of capitulation of the classes of $C_{2,K}$ in F_i ($i = 1, 2, 3$) and to determine the structure of G .

RÉSUMÉ. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ avec $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ où l est un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, ε l'unité fondamentale de k , p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K , $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. D'après E. Brown et C. J. Parry [7] et [8], $C_{2,K}$, le 2-groupe de classes de K , est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par conséquent $K_2^{(1)}/K$ contient trois extensions F_i/K ($i = 1, 2, 3$) et la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K s'arrête en $K_2^{(1)}$ ou en $K_2^{(2)}$. Dans ce travail, on s'intéresse au problème de capitulation des classes de $C_{2,K}$ dans F_i ($i = 1, 2, 3$) et à déterminer la structure de G .

1. INTRODUCTION

Soient K un corps de nombres (de degré fini sur \mathbb{Q}), $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K , $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K , $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$.

Supposons que $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$, alors $K_2^{(1)}/K$ a trois sous-corps quadratiques qu'on note par F_1 , F_2 et F_3 . Dans [14], en utilisant un calcul sur le transfert, H. Kisilevsky a lié le problème de capitulation dans les extensions F_i/K , pour

2000 *Mathematics Subject Classification*: primary 11R27; secondary 11R37.

Key words and phrases: corps biquadratiques cycliques, groupe de classes, capitulation, corps de classes de Hilbert.

[†]Recherche soutenue par l'Académie Hassan II des Sciences et Techniques, Maroc.

Received June 29, 2007. Editor R. Kučera.

$i \in \{1, 2, 3\}$, à la structure du groupe G . Dans [1], A. Azizi a étudié le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux des corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés et $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$, en utilisant les unités, il a trouvé le nombre des classes de K qui capitulent dans les sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$, ensuite il a déterminé la structure du groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$.

De notre part on s'intéresse, dans ce papier, au problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps K , imaginaires cycliques de degré 4 sur \mathbb{Q} tel que $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$, dans les sous-corps quadratiques F_i ($i = 1, 2, 3$) de $K_2^{(1)}/K$ et à déterminer la structure du groupe de Galois G de $K_2^{(2)}/K$.

Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$. D'après E. Brown et C. J. Parry [7] et [8], la 2-partie $C_{2,K}$ du groupe de classes de K est de type $(2, 2)$, par suite $K_2^{(1)}$ contient trois extensions F_i/K ; $i = 1, 2, 3$. En particulier, on démontre le résultat principal suivant :

Théorème. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tels que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$, F_1, F_2 et F_3 les sous-corps quadratiques de $K_2^{(1)}/K$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$, alors :

- (1) Si $(\frac{l}{p})_4 = 1$, alors les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et le groupe G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (2) Si $(\frac{l}{p})_4 = -1$, alors dans chaque extension F_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,K}$ qui capitulent et le groupe G est quaternionique d'ordre 8.

2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans cette section on va donner certains résultats qu'on utilise dans la suite.

Définition 1. On appelle corps de genres d'un corps de nombres K , qu'on note $K^{(*)}$, la plus grande extension de K de la forme KL qui est non ramifiée pour tous les idéaux premiers de K , finis et infinis, et telle que L est une extension abélienne de \mathbb{Q} .

Proposition 1. Soit K un corps de nombres abélien sur \mathbb{Q} , de degré n . Si $n = r^s$ où r est un nombre premier et $s > 0$, alors :

$$K^{(*)} = \left(\prod_{p|D_K, p \neq r} M_p \right) K = \left(\prod_{p|D_K, p \neq r} M_p \right) M_r,$$

où M_p est l'unique sous-corps, de degré e_p (l'indice de ramification de p dans K) sur \mathbb{Q} , de $\mathbb{Q}(\xi_p)$ le p -ième corps cyclotomique, M_r est un sous-corps de degré e_r (l'indice de ramification de r dans K) sur \mathbb{Q} , d'un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\xi_{r^\nu})$ pour un certain $\nu \in \mathbb{N}$ et D_K le discriminant de K .

Proof. Voir [12]. □

Lemme 1. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$ et p un nombre premier différent de l , alors $K^{(*)} = K(\sqrt{p^*})$ où $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$.

Proof. Comme l et p sont les seuls premiers de \mathbb{Q} qui se ramifient dans K avec $e_l = 4$ et $e_p = 2$, alors, d'après la Proposition 1, on a $K^{(*)} = M_p K$ avec M_p est l'unique sous-corps, de degré 2 sur \mathbb{Q} , de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ à savoir $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$, ainsi $K^{(*)} = K(\sqrt{p^*})$. □

Proposition 2. Soient L/M une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2, 2)$, et L_1, L_2, L_3 ses sous extensions quadratiques. Alors

$$h(L) = \frac{2^{d-\kappa-2-v}q(L)h(L_1)h(L_2)h(L_3)}{h(M)^2},$$

où $q(L) = [E_L : E_1E_2E_3]$ est l'indice des unités de L/M , d le nombre des premiers infinis de M qui se ramifient dans L/M , κ est le \mathbb{Z} -rang du groupe E_M des unités de M , est $v = 0$ sauf si $L \subseteq M(\sqrt{E_M})$ où $v = 1$.

Proof. Voir [18]. □

Théorème 1. Soit L/M une extension cyclique non ramifiée de degré un nombre premier, alors le nombre des classes qui capitulent (deviennent principaux) dans L/M est égal à:

$$[L : M][E_M : N_{L/M}(E_L)].$$

Proof. Voir [11]. □

Proposition 3. Soient G un 2-groupe fini d'ordre 2^m et G' son sous-groupe dérivé. Alors G/G' est de type $(2, 2)$ si et seulement si G est isomorphe à l'un des 2-groupes suivants :

$$\begin{aligned} Q_m = \langle x, y \rangle & \quad \text{où } x^{2^{m-2}} = y^2 = a, \quad a^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1} \quad \text{avec } m \geq 3, \\ D_m = \langle x, y \rangle & \quad \text{où } x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1} \quad \text{avec } m \geq 3, \\ S_m = \langle x, y \rangle & \quad \text{où } x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1} \quad \text{avec } m \geq 4, \\ (2, 2) = \langle x, y \rangle & \quad \text{où } x^2 = y^2 = 1, \quad xy = yx, \end{aligned}$$

où Q_m le groupe des quaternions, D_m le groupe diédral, S_m le groupe semi-diédral d'ordres 2^m et un groupe de type $(2, 2)$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proof. Voir [14]. □

Supposons que G est un 2-groupe fini d'ordre 2^m tel que G/G' est de type $(2, 2)$, alors G est isomorphe à Q_m, D_m, S_m ou à un groupe de type $(2, 2)$. Soient $\{x, y\}$ une partie génératrice de G satisfaisant aux relations citées dans la Proposition 3. Par un simple calcul on peut voir que le sous-groupe dérivé $G' = [G, G] = \langle x^2 \rangle$ et que G à trois sous-groupes d'indice 2 à savoir $H_1 = \langle x \rangle, H_2 = \langle x^2, y \rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy \rangle$. De plus si G est de type $(2, 2)$, alors les sous-groupes H_i sont cycliques d'ordre 2, si $G \simeq Q_3$, alors les sous-groupes H_i sont cycliques d'ordre 4 et si $G \simeq Q_m$ avec $m > 3$ ou à D_m ou à S_m , alors H_1 est cyclique et H_i/H'_i est de type $(2, 2)$ pour

$i \in \{2, 3\}$ où H'_i est le sous-groupe dérivé de H_i .

Dans toute la suite de cette section on désigne par K un corps de nombres, C_K son groupe de classes, $C_{2,K}$ la 2-partie de C_K , $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K , $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$ et G' son sous-groupe dérivé. Alors $G' \simeq \text{Gal}(K_2^{(2)}/K_2^{(1)})$ et $G/G' \simeq \text{Gal}(K_2^{(1)}/K)$, et on sait par la théorie des corps de classes que $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq C_{2,K}$, ainsi $G/G' \simeq C_{2,K}$.

Définition 2 (Conditions de Taussky). *Soient F une extension cyclique non ramifiée de K et j : l'application de C_K dans C_F qui fait correspondre à la classe d'un idéal \mathfrak{a} de K , la classe de l'idéal engendré par \mathfrak{a} dans F . Alors:*

- L'extension F/K est dite de type (A) si et seulement si $|\ker j \cap N_{F/K}(C_F)| > 1$,
- L'extension F/K est dite de type (B) si et seulement si $|\ker j \cap N_{F/K}(C_F)| = 1$.

Supposons maintenant que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ce qui donne que G' est cyclique. Donc la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K s'arrête en $K_2^{(2)}$.

De plus, on sait que si G est d'ordre 2^m et $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors, G est isomorphe à Q_m, D_m, S_m ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans tous ces cas, on a $G' = \langle x^2 \rangle$ et les trois sous-groupes d'indice 2 dans G sont : $H_1 = \langle x \rangle, H_2 = \langle x^2, y \rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy \rangle$, et soit F_i ($i = 1, 2, 3$) le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par H_i et j_i l'application j définie pour $F = F_i$.

Si $G' \neq 1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et $\langle x^4 \rangle$ est l'unique sous-groupe de G' d'indice 2 et notons L le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par $\langle x^4 \rangle$, alors $\text{Gal}(L/K)$ est isomorphe soit à Q_3 soit à D_3 , et on a

Théorème 2. *On suppose que $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors on a :*

- (1) *Si $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$, alors les corps F_i sont de type (A), $|\ker j_i| = 4$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
- (2) *Si $\text{Gal}(L/K) \simeq Q_3$, alors les corps F_i sont de type (A), $|\ker j_i| = 2$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq Q_3$.*
- (3) *Si $\text{Gal}(L/K) \simeq D_3$, alors les corps F_2 et F_3 sont de type (B) et $|\ker j_2| = |\ker j_3| = 2$. De plus; si F_1 est de type (B) alors $|\ker j_1| = 2$ et $G \simeq S_m$. Si F_1 est de type (A) et $|\ker j_1| = 2$, alors $G \simeq Q_m$. Enfin si F_1 est de type (A) et $|\ker j_1| = 4$, alors $G \simeq D_m$.*

$ \ker j_1 $ (A/B)	$ \ker j_2 $ (A/B)	$ \ker j_3 $ (A/B)	G
4	4	4	$(2, 2)$
2A	2A	2A	Q_3
4	2B	2B	$D_m, m \geq 3$
2A	2B	2B	$Q_m, m > 3$
2B	2B	2B	$S_m, m \geq 4$

Proof. Voir [14]. □

Remarque 1. Soient K tel que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors les 2-groupes de classes des corps F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont cycliques si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- 1) $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$;
- 2) $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ et $G \simeq Q_3$.

On trouve plus d'informations sur le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux d'un corps de nombres K où $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$ dans [14].

3. UNITÉS DE CERTAINS CORPS DE NOMBRES DE DEGRÉ 4 OU 8 SUR \mathbb{Q}

Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $d_3 = d_1d_2$, ε_1 (resp. $\varepsilon_2, \varepsilon_3$) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2}), k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_3})$), $K_0 = k_1k_2$ et N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de K_0/k_1 (resp. $K_0/k_2, K_0/k_3$).

On sait d'après [17] qu'un système fondamental d'unités (**SFU**) de K_0 est, à une permutation près des indices, l'un des systèmes suivants :

- (i) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$;
- (ii) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ ($N_2(\varepsilon_3) = 1$);
- (iii) $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ($N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = 1$) ;
- (iv) $\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ ($N_1(\varepsilon_2) = N_1(\varepsilon_3) = 1$) ;
- (v) $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}\}$ ($N_2(\varepsilon_3) = N_3(\varepsilon_j) = 1, j = 1, 2$) ;
- (vi) $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ($N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = N_2(\varepsilon_3) = \pm 1$).

Proposition 4. Soit K_0 un corps de nombres, abélien réel et β un entier algébrique de K_0 , positif, sans facteurs carrés. On suppose que $K = K_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension quadratique de K_0 , abélienne sur \mathbb{Q} et que $i = \sqrt{-1}$ n'appartient pas à K . Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un **SFU** de K_0 . On choisit, sans restreindre la généralité, les unités ε_j positives. Alors on a :

- (1) S'il existe une unité de K_0 de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \{0, 1\}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carré dans K_0 , alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un **SFU** de K .
- (2) Dans le cas contraire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ est un **SFU** de K .

Proof. Voir [2] ou [5]. □

Corollaire 1. Soient $K = k(\sqrt{-n\varepsilon\sqrt{d}})$ une extension cyclique de degré 4 sur \mathbb{Q} , où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec d un entier naturel sans facteurs carrés et n un entier naturel premier à d et sans facteurs carrés, alors $\{\varepsilon\}$ est un **SFU** de K .

Proof. On a $\{\varepsilon\}$ est un **SFU** de k et $n\sqrt{d}$ n'est pas un carré dans k , ainsi, d'après la Proposition 4, $\{\varepsilon\}$ est aussi un **SFU** de K . □

Théorème 3. Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, ε_1 (resp. $\varepsilon_2, \varepsilon_3$) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$) et $F_3 = K_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$. Alors on a :

- (i) Si ε_3 est de norme 1, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0 et de F_3 .
- (ii) Sinon, $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0 et de F_3 .

Proof. Voir [6]. □

Théorème 4. Soient $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$ avec l et p deux nombres premiers différents tel que $l \equiv p \equiv 1 \pmod 4$, ε_1 (resp. $\varepsilon_2, \varepsilon_3$) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{lp})$) et $F_3 = K_0(\sqrt{-n\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où n est un entier naturel sans facteurs carrés. Alors on a :

- (1) Si ε_3 est de norme 1, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0 et de F_3 .
- (2) Si ε_3 est de norme -1 , alors $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0 et de F_3 .

Proof. Tout d'abord, d'après [19] on a :

$$h_2(K_0) = \frac{1}{4}Q_{K_0}h_2(l)h_2(p)h_2(lp),$$

où $h_2(K_0)$, $h_2(m)$ sont respectivement la 2-partie du nombre de classes de K_0 et de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ avec $m \in \{l, p, lp\}$ et Q_{K_0} est l'indice des unités de K_0 . Comme $K_0/\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est cyclique (voir [13]), alors $h_2(lp) = 2h_2(K_0)$ et comme $h_2(l) = h_2(p) = 1$, alors $Q_{K_0} = 2$, et comme $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont de norme -1 , alors on a :

(1) si ε_3 est de norme 1, alors, en utilisant les résultats de [17], on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0 . Soient N_i la norme de K_0 sur k_i ($i = 1, 2, 3$), alors, d'après la Proposition 4, pour montrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de F_3 , on montre que $\mu n\varepsilon_1\sqrt{l}$ n'est pas un carré dans K_0 , pour $\mu = \varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\varepsilon_3^{j_3}$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$, sinon, en utilisant N_2 ou N_3 on trouve que $\pm l$ est un carré dans k_2 ou k_3 , ce qui est impossible.

(2) si ε_3 est de norme -1 , alors, en utilisant les résultats de [17], on trouve que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0 . D'après la Proposition 4, pour montrer que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_3 il suffit de montrer que $\mu n\varepsilon_1\sqrt{l}$ n'est pas un carré dans K_0 , pour $\mu = \varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\varepsilon_3^{j_3}$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$, sinon, en calculant la norme dans K_0/k_2 , on trouve que $\pm l$ ou $\pm l\varepsilon_2$ est un carré dans k_2 , ce qui n'est pas possible. □

Théorème 5. Soient l et p deux nombres premiers différents tels que $l = 2$ ou $l \equiv 1 \pmod 4$, $p \equiv 1 \pmod 4$, h (resp. h_1) le nombre des classes de $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$ (resp. $k_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{lp})$) et e la norme de l'unité fondamentale de k_0 .

- (1) Si $\left(\frac{l}{p}\right) = -1$, alors h est impair, $h_1 \equiv 2 \pmod 4$ et $e = -1$.
- (2) Si $\left(\frac{l}{p}\right) = 1$, alors on a :

- a) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 \neq \left(\frac{p}{l}\right)_4$, alors h est impair, $h_1 \equiv 2 \pmod 4$ et $e = 1$.

- b) Si $(\frac{l}{p})_4 = (\frac{p}{l})_4 = -1$, alors h est pair, $h_1 \equiv 4 \pmod 8$ et $e = -1$.
- c) Si $(\frac{l}{p})_4 = (\frac{p}{l})_4 = 1$, alors h est pair et $h_1 \equiv 0 \pmod 4$. De plus, si $e = -1$, alors $h_1 \equiv 0 \pmod 8$.

Proof. Voir [16]. □

4. CAPITULATION DES 2-CLASSES D'IDÉAUX DE K ET STRUCTURE DE G

Dans toute la suite, soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod 8$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$ avec $(\cdot)_4$ désigne le symbole biquadratique rationnel, ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, ε_3 celle de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$, h_0 est le nombre de classes de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ (h_0 est impair), $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K , $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. Alors, d'après [7] et [8], $C_{2,K}$, la 2-partie du groupe de classes de K , est de type $(2, 2)$, donc $K_2^{(1)}$ a trois sous-corps quadratiques F_1, F_2 et F_3 sur K .

Comme $(\frac{p}{l}) = 1$, alors ils existent deux idéaux premiers \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de k tel que $(p) = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ dans k , or $\mathcal{B}_1^{h_0}$ et $\mathcal{B}_2^{h_0}$ sont des idéaux principaux de k , donc on peut choisir a et b strictement positifs tels que $\mathcal{B}_1^{h_0} = (a+b\sqrt{l})$ et $\mathcal{B}_2^{h_0} = (a-b\sqrt{l})$ dans k avec $a + b\sqrt{l}$ et $a - b\sqrt{l}$ sont strictement positifs et on a $p^{h_0} = a^2 - lb^2$.

(a) Si $l = 2$, alors, comme $p \equiv 1 \pmod 8$, donc $p = n^2 - 32m^2$ avec n et m dans \mathbb{N} , et on a $p = \pi_1\pi_2$ dans $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec $\pi_1 = n + 4m\sqrt{2}$ et $\pi_2 = n - 4m\sqrt{2}$ et d'après [13] (Théorème 2, page 324) on a $(\frac{p}{2})_4 = (\frac{2}{n})$ et $(\frac{2}{p})_4 = (\frac{-2}{n})$, de plus, comme $(\frac{p}{2})_4 = -1$ (ce qui veut dire que $p \equiv 9 \pmod{16}$), alors $n \equiv \pm 5 \pmod 8$, ainsi :

- (1) Si $(\frac{2}{p})_4 = 1$, alors $n \equiv -5 \pmod 8$;
- (2) Si $(\frac{2}{p})_4 = -1$, alors $n \equiv 5 \pmod 8$.

On a $K(\sqrt{\pi_1}) \neq K(\sqrt{\pi_2})$ (resp. $K(\sqrt{-\pi_1}) \neq K(\sqrt{-\pi_2})$) car si non $\pi_1\pi_2$ sera un carré dans K ce qui donne que $\sqrt{p} \in K$ ce qui n'est pas possible. De plus, comme π_1 (resp. π_2) est ramifié dans K/k , alors il existe \mathcal{P}_1 (resp. \mathcal{P}_2) un idéal premier de K tel que $(\pi_1) = \mathcal{P}_1^2$ (resp. $(\pi_2) = \mathcal{P}_2^2$), et on a si $(\frac{2}{p})_4 = 1$, alors $-\pi_1 \equiv 1 \pmod 4$ (resp. $-\pi_2 \equiv 1 \pmod 4$), ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_1})/K$ (resp. $K(\sqrt{-\pi_2})/K$) est non ramifiée, et si $(\frac{2}{p})_4 = -1$, alors $\pi_1 \equiv 1 \pmod 4$ (resp. $\pi_2 \equiv 1 \pmod 4$), ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_1})/K$ (resp. $K(\sqrt{\pi_2})/K$) est non ramifiée.

(b) Si $l \equiv 5 \pmod 8$, alors $p^{h_0} = a^2 - lb^2 = \pi_1\pi_2$ avec $\pi_1 = a + b\sqrt{l} = \frac{x+y\sqrt{l}}{2}$ et $\pi_2 = a - b\sqrt{l} = \frac{x-y\sqrt{l}}{2}$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et on a $4p^{h_0} = pz^2 = x^2 - ly^2$ avec $z = 2p^{\frac{h_0-1}{2}}$.

Tout d'abord $x \not\equiv 0 \pmod 4$, car sinon on trouve que $p \equiv -1 \pmod 4$, ce qui n'est pas le cas, ainsi $x \equiv \pm 1 \pmod 4$ ou $x \equiv 2 \pmod 4$.

Des deux équations $x^2 \equiv ly^2 \pmod{p}$ et $x^2 \equiv pz^2 \pmod{l}$ on tire que $\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{l}{p}\right)_4 \left(\frac{y}{p}\right)$ et $\left(\frac{x}{l}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)_4 \left(\frac{z}{l}\right)$, et en multipliant les deux dernières équations on trouve que

$$\left(\frac{l}{p}\right)_4 \left(\frac{p}{l}\right)_4 = \left(\frac{x}{lp}\right) \left(\frac{y}{p}\right) \left(\frac{z}{l}\right).$$

Si $x \equiv \pm 1 \pmod{4}$, alors y est impair et on a $pz^2 = x^2 - ly^2$, donc $\left(\frac{-l}{x}\right) = \left(\frac{p}{x}\right)$ ce qui veut dire que $\left(\frac{x}{lp}\right) = \left(\frac{lp}{x}\right) = \left(\frac{-1}{x}\right)$.

Et comme $l \equiv 5 \pmod{8}$, alors $\left(\frac{2}{l}\right) = -1$ et on a $\left(\frac{p}{l}\right) = 1$, ainsi $\left(\frac{z}{l}\right) = -1$, ce qui donne que $\left(\frac{x}{l}\right) = 1$ et $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right) \left(\frac{y}{p}\right)$, or $\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{p}{y}\right) = 1$, par suite

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{l}\right) = 1 \\ \left(\frac{l}{p}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right). \end{cases}$$

Si $x \equiv 2 \pmod{4}$, alors $x = 2x'$ avec $x' \equiv \pm 1 \pmod{4}$. En utilisant le fait que $l \equiv p \equiv 1 \pmod{4}$ on trouve que $y \equiv 0 \pmod{4}$. Par le même raisonnement que précédemment, on trouve que

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{l}\right) = -\left(\frac{x'}{l}\right) = 1 \\ \left(\frac{l}{p}\right)_4 = -\left(\frac{-1}{x'}\right) \left(\frac{2}{p}\right) \left(\frac{y}{p}\right). \end{cases}$$

Comme $y \equiv 0 \pmod{4}$, alors $y = 2^j u$ avec u est un entier impair et $j \geq 2$, ainsi

$$\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^j \left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^j \left(\frac{p}{u}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^j,$$

et on a $j = 2$ implique que $p \equiv 5 \pmod{8}$ et $j \geq 3$ implique que $p \equiv 1 \pmod{8}$, ce qui donne que $\left(\frac{y}{p}\right) = 1$, par suite on a

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{l}\right) = 1 \\ \left(\frac{l}{p}\right)_4 = -\left(\frac{-1}{x'}\right) \left(\frac{2}{p}\right). \end{cases}$$

Ainsi les formes possibles de x et y sont :

- (1) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$ et $l \equiv 5 \pmod{16}$, alors $x \equiv 1 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ou $x \equiv 5 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$ ou $x \equiv 2 \pmod{8}$, $y \equiv 4 \pmod{8}$ ou $x \equiv 6 \pmod{8}$, $y \equiv 0 \pmod{8}$;
- (2) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$ et $l \equiv 13 \pmod{16}$, alors $x \equiv 1 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$ ou $x \equiv 5 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ou $x \equiv 2 \pmod{8}$, $y \equiv 4 \pmod{8}$ ou $x \equiv 6 \pmod{8}$, $y \equiv 0 \pmod{8}$;
- (3) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$ et $l \equiv 5 \pmod{16}$, alors $x \equiv 3 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$ ou $x \equiv 7 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ou $x \equiv 2 \pmod{8}$, $y \equiv 0 \pmod{8}$ ou $x \equiv 6 \pmod{8}$, $y \equiv 4 \pmod{8}$;
- (4) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$ et $l \equiv 13 \pmod{16}$, alors $x \equiv 3 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ou $x \equiv 7 \pmod{8}$, $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$ ou $x \equiv 2 \pmod{8}$, $y \equiv 0 \pmod{8}$ ou $x \equiv 6 \pmod{8}$, $y \equiv 4 \pmod{8}$.

On a $K(\sqrt{-\pi_1}) \neq K(\sqrt{-\pi_2})$ (resp. $K(\sqrt{\pi_1}) \neq K(\sqrt{\pi_2})$) car si non π_1/π_2 sera un carré dans K ce qui donne que $\sqrt{p} \in K$ ce qui n'est pas possible. De plus, comme \mathcal{B}_1 (resp. \mathcal{B}_2) est ramifié dans K/k , alors $(\pm\pi_1)$ (resp. $(\pm\pi_2)$) est le carré d'un idéal de K .

Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$, alors l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ pour $i \in \{1, 2\}$ est non ramifiée. En effet, soit $l \equiv 5 \pmod{16}$, donc si $x \equiv 1 \pmod{8}$ et $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{1 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+3}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{1 \pm 3\sqrt{l}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 5 \pmod{8}$ et $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{5 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+19}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{5 \pm \sqrt{l}}{2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \pmod{8}$ et $y \equiv 4 \pmod{8}$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{2 + 4\sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{1 + \sqrt{l}}{2} - \frac{2 + 4\sqrt{l}}{2} = 1 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 6 \pmod{8}$ et $y \equiv 0 \pmod{8}$, alors

$$-\pi_i \equiv -3 \equiv 1 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée.

Soit $l \equiv 13 \pmod{16}$, donc si $x \equiv 1 \pmod{8}$ et $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{1 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+11}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{1 \pm \sqrt{l}}{2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 5 \pmod{8}$ et $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{5 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+11}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{5 \pm 3\sqrt{l}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \pmod{8}$ et $y \equiv 4 \pmod{8}$ ou si $x \equiv 6 \pmod{8}$ et $y \equiv 0 \pmod{8}$, alors, de même que dans le cas où $l \equiv 5 \pmod{16}$, on trouve que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée.

Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, alors l'extensions $K(\sqrt{\pi_i})/K$ pour $i \in \{1, 2\}$ est non ramifiée. En effet, soit $l \equiv 5 \pmod{16}$, donc si $x \equiv 3 \pmod{8}$ et $y \equiv \pm 1 \pmod{8}$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{3 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv \frac{3 \pm \sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l+19}{8} \pm \sqrt{l}}{2} = \left(\frac{5 \pm \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 7 \pmod{8}$ et $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{7 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv \frac{7 \pm 3\sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l-13}{8} \mp \sqrt{l}}{2} = \left(\frac{1 \mp \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod{4},$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \pmod 8$ et $y \equiv 0 \pmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv 1 \pmod 4,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 6 \pmod 8$ et $y \equiv 4 \pmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{6 + 4\sqrt{l}}{2} \equiv \frac{6 + 4\sqrt{l}}{2} - 4\frac{1 + \sqrt{l}}{2} = 1 \pmod 4,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée. Soit $l \equiv 13 \pmod{16}$, donc si $x \equiv 3 \pmod 8$ et $y \equiv \pm 3 \pmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{3 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv \frac{3 \pm 3\sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l-5}{8} \mp \sqrt{l}}{2} = \left(\frac{1 \mp \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod 4,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 7 \pmod 8$ et $y \equiv \pm 1 \pmod 8$, alors

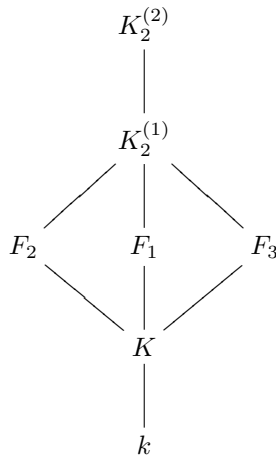
$$\pi_i \equiv \frac{7 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv \frac{7 \pm \sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l+11}{8} \pm \sqrt{l}}{2} = \left(\frac{5 \pm \sqrt{l}}{2}\right)^2 \pmod 4,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \pmod 8$ et $y \equiv 0 \pmod 8$ ou si $x \equiv 6 \pmod 8$ et $y \equiv 4 \pmod 8$, alors, de même que dans le cas où $l \equiv 5 \pmod{16}$, on trouve que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée.

En résumé on a :

Lemme 2. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où l est un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod 8$, ε_1 l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$, π_1 et π_2 définis comme au dessus, alors $K_2^{(1)}$ a trois sous-corps quadratiques F_1, F_2 et F_3 sur K tels que:

- (1) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$, alors $F_1 = K(\sqrt{-\pi_1})$, $F_2 = K(\sqrt{-\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$;
- (2) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, alors $F_1 = K(\sqrt{\pi_1})$, $F_2 = K(\sqrt{\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$.



On va faire une étude du problème de la capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les différentes sous-extensions quadratiques F_i/K de $K_2^{(1)}/K$, et par suite nous déterminons la structure de G .

Proposition 5. *Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$, \mathcal{P}_1 l'idéal premier de K au dessus de \mathcal{B}_1 , \mathcal{P}_2 celui au dessus de \mathcal{B}_2 et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$. Alors les classes de \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et de \mathcal{P} sont d'ordre 2 dans K et $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . De plus \mathcal{P} capitule dans F_3 , \mathcal{P}_1 capitule dans F_1 et \mathcal{P}_2 capitule dans F_2 .*

Proof. La classe de \mathcal{P} est d'ordre 2, en effet, soient \mathcal{O}_k l'anneau des entiers de k et \mathcal{O}_K celui de K , alors on a $p\mathcal{O}_k = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_i\mathcal{O}_K = \mathcal{P}_i^2$ pour $i \in \{1, 2\}$, ainsi $p\mathcal{O}_K = \mathcal{P}^2$ dans K . On suppose que $\mathcal{P} = (\alpha)$ pour un certain α dans K , ce qui est équivalent à $(\alpha^2) = (p)$ dans K . Il existe donc ε une unité de K telle que $p\varepsilon = \alpha^2$, or il existe c et d dans k tel que $\alpha = c + d\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}$, ainsi $p\varepsilon = c^2 - p\varepsilon_1\sqrt{l}d^2 + 2cd\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}$ et comme $\{\varepsilon_1\}$ est un SFU de K et $i = \sqrt{-1} \notin K$, alors $p\varepsilon \in k$ par suite c ou $d = 0$. Si $d = 0$, alors $p\varepsilon = c^2$, ainsi $p = c'^2$ ou $p\varepsilon_1 = c''^2$ dans k , ce qui donne que $\sqrt{p} \in k$ dans le premier cas et $\sqrt{-1} \in k$ dans le deuxième cas, ce qui est impossible, et de même, si $c = 0$ on trouve que $\pm l$ est un carré dans \mathbb{Q} . Donc la classe de \mathcal{P} est d'ordre 2. La classe de \mathcal{P}_1 (resp. \mathcal{P}_2) est aussi d'ordre 2, sinon on utilise le même raisonnement, on trouve que p ou lp est un carré dans \mathbb{Q} , ce qui n'est pas possible, par suite $C_{2,K}$ est engendré par les classes de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

Pour montrer que \mathcal{P} capitule dans $F_3 = K(\sqrt{p})$, il suffit de voir que \sqrt{p} est dans F_3 et $(\sqrt{p^2}) = (p)$ dans F_3 , donc \mathcal{P} capitule dans F_3 . Et de même on montre que \mathcal{P}_1 capitule dans F_1 et \mathcal{P}_2 capitule dans F_2 . □

Théorème 6. *Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, ε_1 l'unité fondamentale de k , p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$ et $F_3 = K(\sqrt{p})$. Alors C_{2,F_3} , la 2-partie du groupe de classes de F_3 , est cyclique d'ordre $h_2(F_3) = h_2(lp)$ où $h_2(lp)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$.*

Proof. L'extension F_3/K est de type (A), en effet, soient $\pi_1, \pi_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ définis comme au début de cette section et soit $K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{l}})$, alors on a $KK' = F_3$, $N_{K/k}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}_1$ et \mathcal{B}_1 est non ramifié dans K'/k , ainsi, pour montrer que \mathcal{P}_1 est inerte dans F_3/K il suffit de montrer que \mathcal{B}_1 est inerte dans K'/k (théorème de translation), et pour ceci on calcul le symbole du reste normique suivant $\left(\frac{\pi_1, -\varepsilon_1\sqrt{l}}{\mathcal{B}_1}\right)$, or, d'après [7] et [8], on a

$$\left(\frac{\pi_1, -\varepsilon_1\sqrt{l}}{\mathcal{B}_1}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1,$$

ainsi \mathcal{B}_1 est inerte dans K'/k , ce qui donne que \mathcal{P}_1 reste inerte dans F_3/K et de même on montre que \mathcal{P}_2 reste inerte dans F_3/K et comme $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ capitule dans

F_3 , alors par application de la loi de réciprocité d'Artin, on trouve que F_3/K est de type (A), par conséquent, d'après [14], on trouve que C_{2,F_3} est cyclique. Comme F_3/k est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type (2, 2), de sous-extensions quadratiques $K, K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{l}})$ et $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$, alors d'après la Proposition 2, on trouve que

$$h_2(F_3) = \frac{1}{2}q(F_3)h_2(K)h_2(K')h_2(K_0),$$

ceci car $d = 2, \kappa = 1, v = 0$. Or on a $h_2(K) = 4, h_2(K') = 1$ (voir [9]), et comme l'extension $K_0/\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est cyclique (voir [13]), alors $h_2(K_0) = \frac{1}{2}h_2(lp)$, ce qui donne que $h_2(F_3) = q(F_3)h_2(lp)$ et on a $\{\varepsilon_1\}$ est un SFU de K et de K' et d'après les théorèmes 3 et 4, K_0 et F_3 ont même SFU qui est l'un des systèmes $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ ou $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, ainsi $q(F_3) = 1$, ce qui donne que $h_2(F_3) = h_2(lp)$. \square

Remarque 2. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, ε_1 est l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. Alors $|G| = 2h_2(lp)$ où $h_2(lp)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$.

En effet, comme $K_2^{(1)}/F_3$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de F_3 est cyclique, alors F_3 et $K_2^{(1)}$ ont un même 2-corps de classes de Hilbert à savoir $K_2^{(2)}$, ainsi $|G| = 2h_2(F_3) = 2h_2(lp)$.

Théorème 7. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod{8}$, ε_1 l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1, F_1, F_2$ et F_3 les sous-corps quadratiques de $K_2^{(1)}/K$. Alors on a :

- (1) Si $(\frac{l}{p})_4 = 1$, alors les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et le groupe G est abélien,
- (2) Si $(\frac{l}{p})_4 = -1$, alors dans chaque extension $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,K}$ qui capitulent et le groupe G est quaternionique d'ordre 8.

Proof. Comme $(\frac{p}{l}) = 1$, alors ils existent deux idéaux premiers \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de k tel que $(p) = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ dans k et comme \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 se ramifient dans K , donc soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 les idéaux premiers de K au dessus de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 respectivement et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$, par suite, d'après la Proposition 5, on a que $C_{2,K}$, le 2-groupe de classes de K , est engendré par les classes de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

(1) Si $(\frac{l}{p})_4 = 1$, alors $F_1 = K(\sqrt{-\pi_1}), F_2 = K(\sqrt{-\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$ et comme $(\frac{p}{l})_4 \neq (\frac{l}{p})_4$, alors $h_2(lp) = 2$ (Théorème 5), d'où $h_2(F_3) = 2$ (Théorème 6), par suite $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$, G est abélien et les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

(2) Si $(\frac{l}{p})_4 = -1$, alors $F_1 = K(\sqrt{\pi_1}), F_2 = K(\sqrt{\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$ et

comme $(\frac{l}{p})_4 = (\frac{l}{p})_4 = -1$, donc $h_2(lp) = 4$ et ε_3 est de norme -1 (Théorème 5), par suite G est d'ordre 8 (Remarque 2) et $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_3 (Théorèmes 3 et 4), et comme $N_{F_3/K}(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\varepsilon_1$ et $N_{F_3/K}(\varepsilon_2) = N_{F_3/K}(\varepsilon_3) = -1$, donc $N_{F_3/K}(E_{F_3}) = E_K$, et en utilisant le Théorème 1, on trouve que deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent dans F_3 à savoir la classe de \mathcal{P} et son carré et comme les corps $F_1 = K(\sqrt{\pi_1})$ et $F_2 = K(\sqrt{\pi_2})$ sont conjugués, alors, seulement la classe de \mathcal{P}_1 et son carré capitulent dans F_1 et seulement la classe de \mathcal{P}_2 et son carré capitulent dans F_2 et comme l'extension F_3/K est de type (A), alors, d'après le théorème 2, G est quaternionique, ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Remarque 3. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \pmod 8$, ε_1 l'unité fondamentale de k , p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$, F_1, F_2, F_3 les sous-corps quadratiques de $K_2^{(1)}/K$ et C_{2,F_i} le 2-groupe de classes de F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors on a:

- (1) Si $(\frac{l}{p})_4 = 1$, alors $C_{2,F_1} \simeq C_{2,F_2} \simeq C_{2,F_3} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
- (2) Si $(\frac{l}{p})_4 = -1$, alors $C_{2,F_1} \simeq C_{2,F_2} \simeq C_{2,F_3} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exemples numériques:

(1) Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-89(2 + \sqrt{2})})$. Comme $89 \equiv 9 \pmod{16}$ et $(\frac{2}{89})_4 = 1$, alors $F_1 = K(\sqrt{-(11 + 4\sqrt{2})})$, $F_2 = K(\sqrt{-(11 - 4\sqrt{2})})$ et $F_3 = K(\sqrt{89})$, et on a, d'après le théorème 7, G est abélien et les quatres 2-classes de K capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

(2) Soient $K = k(\sqrt{-109\varepsilon\sqrt{5}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unité fondamentale de k . Comme $5 \equiv 5 \pmod 8$, $109 \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{109}{5})_4 = -(\frac{5}{109})_4 = -1$, alors, $F_1 = K(\sqrt{-(17 + 6\sqrt{5})})$, $F_2 = K(\sqrt{-(17 - 6\sqrt{5})})$ et $F_3 = K(\sqrt{109})$ et d'après le Théorème 7, G est abélien et les quatres 2-classes de K capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

(3) Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-41(2 + \sqrt{2})})$. Comme $41 \equiv 9 \pmod{16}$ et $(\frac{2}{41})_4 = -1$, alors $F_1 = K(\sqrt{29 + 20\sqrt{2}})$, $F_2 = K(\sqrt{29 - 20\sqrt{2}})$ et $F_3 = K(\sqrt{41})$, et on a, d'après le théorème 7, $G \simeq Q_3$ et dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ il existe exactement deux 2-classes de K qui capitulent.

(4) Pour $K = k(\sqrt{-233\varepsilon\sqrt{13}})$ où $\varepsilon = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$. Comme $13 \equiv 5 \pmod 8$, $233 \equiv 1 \pmod 4$ et $(\frac{233}{13})_4 = (\frac{13}{233})_4 = -1$, alors $F_1 = K(\sqrt{21 + 4\sqrt{13}})$, $F_2 = K(\sqrt{21 - 4\sqrt{13}})$ et $F_3 = K(\sqrt{233})$ et d'après le Théorème 7, $G \simeq Q_3$ et dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ il existe exactement deux 2-classes de K qui capitulent.

Remerciements. Nous remercions le référé de cet article pour ses remarques et ses suggestions précieuses.

REFERENCES

- [1] Azizi, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (2) (1997), 127–130.
- [2] Azizi, A., *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur \mathbb{Q}* , Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), 87–93.
- [3] Azizi, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$* , Acta Arith. **94** (2000), 383–399.
- [4] Azizi, A., *Sur une question de capitulation*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2197–2002.
- [5] Azizi, A., *Sur les unités de certains corps de nombres de degré 8 sur \mathbb{Q}* , Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), 111–129.
- [6] Azizi, A., Talbi, M., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps biquadratiques cycliques*, Acta Arith. **127** (2007), 231–248.
- [7] Brown, E., Parry, C. J., *The 2-class group of certain biquadratic number fields I*, J. Reine Angew. Math. **295** (1977), 61–71.
- [8] Brown, E., Parry, C. J., *The 2-class group of certain biquadratic number fields II*, Pacific J. Math. **78** (1) (1978), 11–26.
- [9] Conner, P. E., Hurrelbrink, J., *Class number parity*, Ser. Pure Math., 8, World Sci, 1988.
- [10] Hasse, H., *Neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols*, J. Reine Angew. Math. **162** (1930), 134–143.
- [11] Heider, F. P., Schmithals, B., *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math. **366** (1982), 1–25.
- [12] Ishida, M., *The genus fields of algebraic number fields*, Lecture Notes in Math. **555** (1976).
- [13] Kaplan, P., *Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine Angew. Math. **283/284** (1976), 313–363.
- [14] Kisilevsky, H., *Number fields with class number congruent to 4 modulo 8 and Hilbert's theorem 94*, J. Number Theory **8** (1976), 271–279.
- [15] Kubota, T., *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65–85.
- [16] Kučera, R., *On the parity of the class number of biquadratic field*, J. Number Theory **52** (1995), 43–52.
- [17] Kuroda, S., *Über den Dirichletschen Zahlkörper*, Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I **4** (1943), 383–406.
- [18] Lemmermeyer, F., *Kuroda's class number formula*, Acta Arith. **66** (3) (1994), 245–260.
- [19] Wada, H., *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 201–209.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES, UNIVERSITÉ MOHAMED I

OUDJA, MAROC

E-mail: abdelmalekazizi@yahoo.fr talbimm@yahoo.fr