ELEMENTÁRNÍ DŮKAZ CAUCHYOVY VĚTY PRO JEDNODUŠE SOUVISLÉ OBLASTI

JIŘÍ KOUKOL, Praha

(Došlo dne 24. října 1984)

Souhrn. V článku je popsána elementární konstrukce, která dovoluje od Cauchyovy věty pro interval přejít k Cauchyově větě pro obecnou jednoduše souvislou oblast.

Písmenem $\mathbf{E}$ budeme značit otevřenou Gaussovu rovinu. $\int_\varphi \mathbf{F}$ bude křivkový integrál funkce $\mathbf{F}$ po křivce φ, $\langle\varphi\rangle$ geometrický obraz křivky φ. Symbolu $\operatorname{komp}_x \mathbf{G}$ budeme užívat pro komponentu bodu $\boldsymbol{x}$ množiny $\mathbf{G}$. (Viz též [1].)

Budeme vycházet z toho, že je již dokázáno, že

(1) funkce holomorfní v otevřeném intervalu v něm má primitivní funkci.

Na základě toho dokážeme Cauchyovu větu pro obecnou jednoduše souvislou oblast:

Věta. *Je-li $\mathbf{F}$ holomorfní v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbf{F}$, má $\mathbf{F}$ v Ω primitivní funkci.*

Je dobře známo, že tvrzení věty je ekvivalentní s podmínkou, že

(2) pro každou uzavřenou křivku φ v Ω s konečnou délkou je $\int_\varphi \mathbf{F} = 0$.

Při přechodu od speciálního tvrzení (1) k obecnému tvrzení věty využijeme následujícího lemmatu (viz [2]):

Lemma. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{E}$ je oblast, která je sjednocením oblastí Ω_j, $j = 1, \ldots, n$, přičemž*

(3) $\left(\bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j\right) \cap \Omega_{k+1}$ *je neprázdná souvislá množina pro každé* $k = 1, \ldots, n - 1$,

(4) $\mathbf{F}$ *ma v každé oblasti Ω_j primitivní funkci*

Pak $\mathbf{F}$ má primitivní funkci v celém Ω.

Důkaz věty. Buď dána jednoduše souvislá oblast Ω a uzavřená křivka φ v Ω s konečnou délkou. Zvolme kladné číslo h tak, že okolí množiny $\langle\varphi\rangle$ o poloměru $4h$ je obsaženo v Ω; takové h existuje, protože množina $\langle\varphi\rangle$ je kompaktní částí Ω. Sestrojme čtvercovou síť $\mathscr{S}$ v $\mathbf{E}$ s krokem h a označem Ω' vnitřek sjednocení všech čtverců sítě $\mathscr{S}$, které mají neprázdný průnik s $\langle\varphi\rangle$. Množina Ω' je pak otevřená. Jelikož $\langle\varphi\rangle$ je omezená množina, je i Ω' omezená. Protože každé $z \in \langle\varphi\rangle$ leží zřejmě ve vnitřku sjednocení všech čtverců sítě, které jej obsahují, je $\langle\varphi\rangle \subset \Omega'$. Protože čtverec je konvexní množina, lze každý bod $z \in \Omega'$ spojit úsečkou alespoň s jedním bodem $\langle\varphi\rangle$. Uvážíme-li navíc, že $\langle\varphi\rangle$ je souvislá množina, vidíme, že i množina Ω' je souvislá. Tím je dokázáno, že

(5) Ω' je omezená oblast, jejíž podmnožinou je $\langle\varphi\rangle$.

Dokážeme, že

(6) každá omezená komponenta $\boldsymbol{K}$ množiny $\boldsymbol{E} - \Omega'$ je podmnožinou Ω.

V opačném případě by existoval bod $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K} \cap (\boldsymbol{E} - \Omega)$. Protože $\Omega' \subset \Omega$, je $\boldsymbol{E} - \Omega \subset \boldsymbol{E} - \Omega'$, takže $\mathrm{komp}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{E} - \Omega) \subset \mathrm{komp}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{E} - \Omega') = \boldsymbol{K}$. Množina $\boldsymbol{E} - \Omega$ by tedy měla omezenou komponentu, což je spor s předpokladem jednoduché souvislosti oblasti Ω.

Oblast Ω' není obecně jednoduše souvislá; proto budeme postupovat takto: Označme Ω'' sjednocení oblasti Ω' se všemi omezenými komponentami jejího doplňku. Z předchozího plyne, že Ω'' je částí Ω a nemá žádné omezené komponenty doplňku. Ω'' je otevřená množina, neboť $\boldsymbol{E} - \Omega''$ je rovna neomezené komponentě množiny $\boldsymbol{E} - \Omega'$. Protože oblast Ω' není oddělená od žádné komponenty svého doplňku, je množina Ω'' souvislá. Tím je dokázáno, že Ω'' je jednoduše souvislá oblast.

Snadno se přitom nahlédne, že každé dva různé body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{E} - \Omega''$ lze spojit lomenou čarou tvaru $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \bigcup_{k=0}^{m} \boldsymbol{L}_k \subset \boldsymbol{E} - \Omega''$ s těmito vlastnostmi: Je-li $1 \leqq k \leqq m - 1$, je $\boldsymbol{L}_k$ úsečka spojující středy dvou sousedních čtverců $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{Q}_{k+1}$ sítě. Je-li $\boldsymbol{a}$ resp. $\boldsymbol{b}$ střed čtverce $\boldsymbol{Q}_1$ resp. $\boldsymbol{Q}_m$, je $\boldsymbol{L}_0 = \emptyset$ resp. $\boldsymbol{L}_m = \emptyset$; v opačném případě je $\boldsymbol{L}_0$ resp. $\boldsymbol{L}_m$ úsečka spojující bod $\boldsymbol{a}$ se středem čtverce $\boldsymbol{Q}_0$ resp. bod $\boldsymbol{b}$ se středem čtverce $\boldsymbol{Q}_m$.

Uzávěr oblasti Ω'' rozdělme na intervaly, jejichž vrcholy jsou uzly sítě $\mathscr{S}$, vodorovné strany mají délku $\boldsymbol{h}$ a svislé strany jsou co nejdelší. Systém všech těchto intervalů označme $\mathscr{M}$. Každý interval $\boldsymbol{I} \in \mathscr{M}$ má tvar $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \rangle \times \langle \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c} \rangle$; označme pak $\boldsymbol{I}^* = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{h}/3; \boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{h}/3) \times (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$, $\mathscr{M}^*$ nechť je systém všech $\boldsymbol{I}^*$ a $\boldsymbol{n}$ počet jeho prvků.

Systém $\mathscr{M}^*$ má zřejmě tyto vlastnosti:

(7) každý interval $\boldsymbol{I}^* \in \mathscr{M}^*$ je tvaru $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{h}/3; \boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{h}/3) \times (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$, přičemž body $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}; \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}; \boldsymbol{c}]$ jsou uzly sítě $\mathscr{S}$,

(8) jsou-li $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{h}/3; \boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{h}/3) \times (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$ a $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{h}/3; \boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{h}/3) \times (\boldsymbol{b}'; \boldsymbol{c}')$ dva intervaly z $\mathscr{M}^*$, je buď $\boldsymbol{c}' < \boldsymbol{b}$ nebo $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{b}'$.

Dokažme ještě, že

(9) oblast $\boldsymbol{G}^* = \bigcup_{\boldsymbol{I}^* \in \mathscr{M}} \boldsymbol{I}^*$ je jednoduše souvislá.

Množina $\boldsymbol{G}^*$ je sjednocením množiny Ω'' posunuté vlevo a vpravo o $\boldsymbol{h}/3$. Jsou-li $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ dva body z $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}^*$, lze je spojit v $\boldsymbol{E} - \Omega''$ lomenou čarou $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ s nahoře uvedenými vlastnostmi; je však zřejmé, že $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \subset \boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}^*$. Tím je souvislost množiny $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}^*$ dokázána.

Dokážeme, že v $\mathscr{M}^*$ existuje interval, který má neprázdný průnik právě s jedním ze zbylých intervalů z $\mathscr{M}^*$.

Vezměme libovolný interval $\boldsymbol{I}^* \in \mathscr{M}^*$; má-li neprázdný průnik právě s jedním z ostatních intervalů, je tvrzení správné. V opačném případě označme tento interval $\boldsymbol{I}_1^*$ a zvolme interval $\boldsymbol{I}_2^*$, který má neprázdný průnik s $\boldsymbol{I}_1^*$. Má-li $\boldsymbol{I}_2^*$ požadovanou vlastnost, tvrzení platí. V opačném případě zvolme interval I_3^*, který má neprázdný průnik s I_2^* a je různý od I_1^*. Opakováním postupu buď nalezneme interval požadované vlastnosti nebo po nejvýše n krocích dostaneme interval I_q^*, který je roven některému I_p^*, kde $p < q$. Nechť I_q^* je interval s nejmenším indexem, pro který existuje interval $I_p^* = I_q^*$, kde $p < q$. Množina $G = \bigcup_{j=p}^{q} I_j^*$ je zřejmě otevřená a souvislá.

Dokážeme, že G má omezenou komponentu doplňku. Jelikož

(10) posloupnost $I_p^*, I_{p+1}^*, \ldots, I_{q-1}$ je prostá a $I_p^* = I_q^*$,

existují podle (7) intervaly I_k^*, I_l^*, $k \neq l$, které mají tvar $I_k^* = (a - h/3; a + 4h/3) \times \times (b; c)$, $I_l^* = (a - h/3; a + 4h/3) \times (b'; c')$; podle (8) je buď $c' < b$ nebo $c < b'$. Z (8) dále plyne, že interval $(a - h/3; a + 4h/3) \times (c'; b)$ resp. interval $(a - h/3; a + 4h/3) \times (c; b')$ nemůže být celý podmnožinou G^*, a tedy tím spíše ne podmnožinou G. Existuje tedy bod z tohoto intervalu, který leží v doplňku G. Z (10) a ze souvislosti G plyne, že komponenta tohoto bodu v $E - G$ je omezená, což je spor s vlastností (9)

Nechť I je interval, který má neprázdný průnik právě s jedním intervalem z $\mathcal{M}^*$. Dokážeme, že pak systém $\mathcal{M}^* - \{I\}$ má vlastnosti obdobné vlastnostem (7), (8), (9).

Platnost (7) a (8) je zřejmá.

Dokážeme platnost (9). Označme $G_1^* = \bigcup_{I^* \neq I} I^*$. Otevřenost G_1^* je zřejmá. Kdyby G_1^* měla dvě různé komponenty, pak by z (9) plynulo, že obě mají neprázdný průnik s I, což není možné. Protože $E - G^*$ je souvislá a není oddělena od I, je i $E - G_1^*$ souvislá.

Intervaly z $\mathcal{M}^*$ nyní označíme tak, že $\Omega_n = I$. Ω_{n-1} bude ten interval, který má neprázdný průnik právě s jedním intervalem z $\mathcal{M}^* - \{\Omega_n\}$. Po konečném počtu kroků zbude jediný interval, který označíme Ω_1.

Intervaly $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ mají vlastnost (3) a jsou obsaženy v Ω. F je tedy holomorfní v každém Ω_j a podle (1) tam má primitivní funkci. Podle lemmatu má tedy primitivní funkci i v $G^* = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$, takže $\int_\varphi F = 0$. Jelikož φ byla libovolně zvolená uzavřená křivka v Ω s konečnou délkou, má Ω vlastnost (2). Tím je věta dokázána.

Literatura

[1] *I. Černý:* Analýza v komplexním oboru. Academia 1983.

[2] *B. Novák:* Funkce komplexní proměnné. Skripta MFF UK, 1973.

Резюме

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КОШИ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

ИРЖИ КОУКОЛ

В статье описана элементарная конструкция, позволяющая перейти от теоремы Коши для интервала к теореме Коши для общей односвязной области.

Summary

AN ELEMENTARY PROOF OF CAUCHY THEOREM FOR SIMPLY CONNECTED REGIONS

JIŘÍ KOUKOL

The article deals with the elementary structure which makes it possible to pass from the Cauchy theorem for an interval to the Cauchy theorem for the general simply connected region.

Author's address: 166 27 Praha 6, Thákurova 7 (stavební fakulta ČVUT, KMDG).