Zdeněk Rozenský

Ein Beitrag zur Theorie der Orthogonalität auf Mengen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 104 (1979), No. 3, 255--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118021

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1978), Praha

EIN BEITRAG ZUR THEORIE DER ORTHOGONALITÄT AUF MENGEN

ZDENĚK ROZENSKÝ, Praha

(Eingegangen am 18. Februar 1977)

1. EINFÜHRUNG

Der Begriff der Orthogonalität spielt eine wichtige Rolle in den mathematischen Grundlagen von Quantentheorien. In einem von Prof. JIŘÍ FÁBERA an der Elektrotechnischen Fakultät der TH Prag geleiteten Seminar, das sich mit diesen Grundlagen beschäftigt, wird unter Anderem auch diesem Begriff grosse Aufmerksamkeit gewidmet. In der Arbeit [1] hat J. HAVRDA die Orthogonalitätsrelation auf Mengen als eine natürliche Verallgemeinerung der z. B. aus der Theorie des Hilbertschen Raumes bekannten Orthogonalität eingeführt.

In diesem Artikel gehen wir von der obenerwähnten Arbeit aus und untersuchen einige Enigenschaften der Orthogonalität auf Mengen. Vor allem zeigen wir eine gewisse Verallgemeinerung des bekannten Schmidtschen Orthogonalisationsverfahrens. Weiter führen wir zwei Abbildungen ein: die sog. l-Abbildung als eine Veraalgemeinerung der stetigen linearen Abbildung im Hilbertraum und die sog. $\perp$-Abbildung (Orthoabbildung) als eine orthogonaltreue Abbildung und untersuchen einige ihre Eigenschaften.

2. GRUNDBEGRIFFE UND BEZEICHNUNGEN

Nach [1] nennen wir eine auf einer nichtleeren Menge Ω definierte binäre Relation $\perp$ *Orthogonalität* auf der Menge Ω genau dann, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

a) Ist $x, y \in \Omega$, $x \perp y$, dann gilt $y \perp x$.

b) Es existiert ein Element $o \in \Omega$ so, dass $o \perp x$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

c) Wenn $x \perp x$ für $x \in \Omega$ gilt, dann ist $x = o$.

Über die Elemente $x, y \in \Omega$, für welche $x \perp y$ gilt, sagt man, dass sie untereinander *orthogonal* sind. Wir bezeichnen weiter für $\emptyset \neq A \subseteq \Omega$,

$$A^{\perp} = \{x \in \Omega : \forall y \in A \;\; x \perp y\} .$$

Anstelle von $(A^{\perp})^{\perp}$ schreibt man $A^{\perp\perp}$. Ausser des Begriffes der Orthogonalität brauchen wir noch den Begriff der *grösseren Orthogonalität* ($>$-Orthogonalität), wie sie in der Arbeit [2] eingeführt wird. Zu derer Einführung ist es nötig zwei Axiome annehmen, die wir mit α und β bezeichnen (im Artikel [1] sind sie mit A und V bezeichnet). Setzen wir stets voraus, dass auf einer Menge Ω eine Orthogonalität $\perp$ definiert wird, und es sei $\mathscr{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$, wo $S = \{A \subset \Omega : A \neq \emptyset,\ A = A^{\perp\perp}\}$ ist, ein durch diese Orthogonalität induzierter vollständiger Verband.

Axiom α: Für jedes Element $x \in \Omega$, $x \neq o$ gilt, dass $\{x\}^{\perp\perp}$ ein Atom in $\mathscr{S}$ ist.

Axiom β: Ist $x \in \Omega$, $x \notin A$, $x \notin A^{\perp}$, $\{o\} \neq A \in S$, dann existieren Atome A_1, A_2 in $\mathscr{S}$, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A^{\perp}$ so, dass $x \in A_1 \vee A_2$ ist.

Jetzt können wir schon definieren: Auf der Menge Ω wird eine *$>$-Orthogonalität* genau dann definiert, wenn auf dieser Menge die Orthogonalität $\perp$ definiert wird, der Verband $\mathscr{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$ orthomodular ist und wenn er die Axiome α und β erfüllt.

Im Weiteren verwenden wir folgende Bezeichnung. Es bedeute f eine Abbildung der Menge Ω in die Menge Ω, es sei $A \subset \Omega$; dann haben die Symbole $f_1(A)$ und $f_{-1}(A)$ folgende Bedeutung:

$$f_1(A) = \{f(a) : a \in A\}\,, \quad f_{-1}(A) = \{x \in \Omega : f(x) \in A\}\,.$$

3. DAS SCHMIDTSCHE ORTHOGONALISATIONSVERFAHREN

In diesem Absatz zeigen wir, wie man das bekannte Schmidtsche Orthogonalisationsverfahren verallgemeinern kann. Wir setzen voraus, dass auf einer Menge Ω die $>$-Orthogonalität definiert wird und benutzen weiter die Folgerung 5.8 aus der Arbeit [2]: Ist $\mathscr{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$ ein orthomodulärer Verband, dann genügt er genau dem Axiom β, wenn für alle solche $x \in \Omega$, für welche $x \in A$, $x \notin A^{\perp}$ gilt, $(\{x\}^{\perp\perp} \vee A^{\perp}) \cap A$, $(\{x\}^{\perp\perp} \vee A) \cap A^{\perp}$ Atome in $\mathscr{S}$ sind, wo $A \in S$ beliebig ist und $\{o\} \neq A \neq \Omega$ gilt.

Wir führen vor allem den Begriff der unabhängigkeit der Elemente aus der Menge Ω ein.

3.1. Definition. Das Element $x_1 \in \Omega$ nennt man genau dann *unabhängig*, wenn $x_1 \neq o$ ist; die Elemente $x_1, x_2 \in \Omega$ nennen wir genau dann *unabhängig*, wenn $x_2 \notin \{x_1\}^{\perp\perp}$ und $x_1 \notin \{x_2\}^{\perp\perp}$ ist; die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ nennen wir genau dann unabhängig, wenn

$$x_j \notin \{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_{j-1}\}^{\perp\perp} \vee \{x_{j+1}\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}$$

für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Eine Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots \in \Omega$ nennen wir genau dann *unabhängig*, wenn für $n = 1, 2, \ldots$ gilt, dass die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig sind.

3.2. Satz. *Sind die Elemente* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ *unabhängig, dann gilt* $x_j \neq o$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Der Beweis ergibt sich leicht durch einen Widerspruch.

3.3. Satz. *Sind* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ *unabhängig und* $1 \leqq k < n$, *dann sind* $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k$ *unabhängig.*

Der Beweis (wieder durch einen Widerspruch) ist evident.

3.4. Satz. (Schmidt). *Es sei* $x_1, x_2, \ldots \in \Omega$ *eine unanhängige Folge von Elementen. Dann existiert eine Folge von Elementen* $y_1, y_2, \ldots \in \Omega$ *so, dass* $y_i \perp y_j$ *für* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$ *gilt und dass für* $n = 1, 2, \ldots$

$$\{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp} = \{y_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{y_n\}^{\perp\perp}$$

ist.

Beweis (durch vollständige Induktion). Für $n = 1$ legen wir $y_1 = x_1$.

Setzen wir nun voraus, dass $\{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp} = \{y_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{y_n\}^{\perp\perp}$ gilt, wo $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ist. Wenn $x_{n+1} \perp y_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ gilt, dann ist $x_{n+1} \in \{y_j\}^{\perp}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, woraus folgt, dass

$$x_{n+1} \in \{y_i\}^{\perp} \cap \ldots \cap \{y_n\}^{\perp} = (\{y_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{y_n\}^{\perp\perp})^{\perp},$$

also gilt $x_{n+1} \perp \{y_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{y_n\}^{\perp\perp}$. Im Gegenteil wenn $x_{n+1} \perp \{y_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots$ $\ldots \vee \{y_n\}^{\perp\perp}$ ist, dann ist $x_{n+1} \in \{y_1\}^{\perp} \cap \ldots \cap \{y_n\}^{\perp}$ und deswegen gilt $x_{n+1} \in$ $\in \{y_j\}^{\perp}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$, d. h. es ist $x_{n+1} \perp y_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. In diesem Fall setzen wir $y_{n+1} = x_{n+1}$.

Es sei deshalb $x_{n+1} \notin \{y_1\}^{\perp} \cap \ldots \cap \{y_n\}^{\perp}$. Es ist auch

$$x_{n+1} \notin (\{y_1\}^{\perp} \cap \ldots \cap \{y_n\}^{\perp})^{\perp} =$$
$$= \{y_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{y_n\}^{\perp\perp} = \{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}.$$

Weil auf Ω die $>$-Orthogonalität definiert wird, existiert $z_1 \in \{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}$, $z_1 \neq o$, und weiter existiert $y_{n+1} \in \{y_1\}^{\perp} \cap \ldots \cap \{y_n\}^{\perp}$, $y_{n+1} \neq o$ so, dass $x_{n+1} \in$ $\in \{z_1\}^{\perp\perp} \vee \{y_{n+1}\}^{\perp\perp}$ gilt. Daraus ergibt sich, dass $\{x_{n+1}\}^{\perp\perp} \subseteq \{z_1\}^{\perp\perp} \vee \{y_{n+1}\}^{\perp\perp}$ gilt, woraus

$$(\{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}) \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp} \subseteq (\{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots$$
$$\ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}) \vee \{z_1\}^{\perp\perp} \vee \{y_{n+1}\}^{\perp\perp} = (\{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}) \vee \{y_{n+1}\}$$

folgt. Bezeichnet man $A = \{x_1\}^{\perp\perp} \vee \ldots \vee \{x_n\}^{\perp\perp}$, dann bekommt man $A^{\perp} \cap$ $\cap (A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp}) \subseteq A^{\perp} \cap (A \vee \{y_{n+1}\}^{\perp\perp}) = \{y_{n+1}\}^{\perp\perp}$, denn es gilt $\{y_{n+1}\}^{\perp\perp} \subseteq$ $\subseteq A^{\perp}$.

Wenn $\{o\} = A^\perp \cap (A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp})$ wäre, dann hätten wir von $A \subseteq A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp}$ auch $A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp} = A \vee [A^\perp \cap (A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp})] = A$ oder auch $\{x_{n+1}\}^{\perp\perp} \subseteq A$, das bedeutet aber $x_{n+1} \in A$ und diese Tatsache widerspricht der Voraussetzung.

Daraus und aus dem Axiom α ergibt sich, dass $A^\perp \cap (A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp}) = \{y_{n+1}\}^{\perp\perp}$ gilt, d. h. es ist $A \vee \{x_{n+1}\}^{\perp\perp} = A \vee \{y_{n+1}\}^{\perp\perp}$, und damit ist der Satz bewiesen.

4. DIE l-ABBILDUNG

Aus der Theorie des Hilbertschen Raumes ist bekannt, dass das Original eines jeden seiner (abgeschlossenen) Unterräume bei einer stetigen linearen Abbildung wieder ein Unterrraum des Hilbertschen Raumes ist. Dabei induziert die üblicherweise im Hilbertschen Raume definierte Orthogonalität einen Verband der Unterräume dieses Raumes. Eine auf der Menge mit Orthogonalität $(\Omega, \perp)$ definierte Abbildung f, die die angedeutete Eigenschaft einer linearen stetigen Abbildung besitzt, nähmlich dass das Original von Elementen des induzierten Verbandes mit Orthogonalität wieder ein Element des induzierten Verbandes mit Orthogonalität ist, bezeichnen wir als die sog. l-Abbildung und leiten einige ihre Eigenschaften her.

4.1. Definition. Es sei auf einer Menge Ω_i die Orthogonalität $\perp_i$ definiert, $\mathcal{S}_i = (S_i, \subseteq, \Omega_i, \perp_i)$ sei der entsprechende induzierte Verband mit Orthogonalität, $i = 1, 2$. Dann nennen wir die Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ genau dann eine *l-Abbildung*, wenn $f_{-1}(A) \in S_1$ für jedes $A \in S_2$ ist.*)

4.2. Satz. *Ist f eine l-Abbildung von der Definition* 4.1, *dann ist* $f(o_1) = o_2$, *wo o_i das „Nullelement" in Ω_i, $i = 1, 2$ bedeutet.*

Beweis. Weil $\{o_2\} \in S_2$ ist, gilt nach der Definition 4.1 $f_{-1}(\{o_2\}) \in S_1$. Da aber $o_1 \in A$ für jedes $A \in S_1$ ist, gilt auch $o_1 \in f_{-1}(\{o_2\})$, also ist $f(o_1) = o_2$.

4.3. Bemerkung. Es sei $A, B \in S_2$. Nachdem $A \subseteq A \vee_2 B$, $B \subseteq A \vee_2 B$ ist, gilt

$$f_{-1}(A) \subseteq f_{-1}(A \vee_2 B), \quad f_{-1}(B) \subseteq f_{-1}(A \vee_2 B).$$

Daraus folgt, dass $f_{-1}(A) \vee_1 f_{-1}(B) \subseteq f_{-1}(A \vee_2 B)$ ist, aber hier – im Gegenteil zu der allgemein geltenden Beziehung $f_{-1}(A \cap B) = f_{-1}(A) \cap f_{-1}(B)$ – braucht keine Gleichheit vorzukommen. Ist $A \in S_i$, braucht $f_1(A) \in S_2$ nicht zu gelten. Das folgende Beispiel, in dem wir einfachheitshalber

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega, \quad \perp_1 = \perp_2 = \perp, \quad \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$$

wählen, illustriert diese Behauptung.

*) Im weiteren Text unterscheiden wir mit Hilfe von Indexen $i = 1, 2$ auch die „Nullelemente", in Ω_i und die Verbandsoperationen.

4.4. Beispiel. Es sei $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Die Orthogonalität sei durch den Graphen auf der Abb. 4.1 (das Element o ist ausgelassen ebenso wie bei den restlichen Beispielen in diesem Absatz).

Dann ist $S = \{\{o\}, \Omega, \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_2, \omega_4\}, \{o, \omega_4\}, \{o, \omega_2, \omega_3\}\}$.

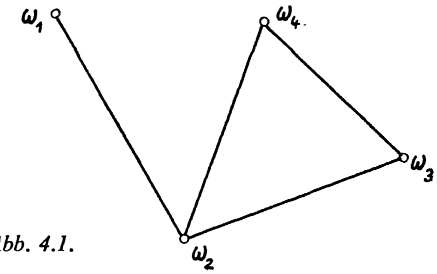

Abb. 4.1.

Die Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ sei folgendermassen definiert: $f(o) = o$, $f(\omega_1) = \omega_2$, $f(\omega_2) = \omega_1$, $f(\omega_3) = \omega_2$, $f(\omega_4) = \omega_2$. Man sieht sofort, dass f eine l-Abbildung ist. Dabei gilt

$$f_{-1}(\{o, \omega_3\}) \vee f_{-1}(\{o, \omega_2, \omega_4\}) = \{o, \omega_1, \omega_3, \omega_4\},$$

während

$$f_{-1}(\{o, \omega_3\} \vee \{o, \omega_2, \omega_4\}) = f_{-1}(\Omega) = \Omega$$

ist. Ferner gilt

$$f_1(\{o, \omega_2\}) = \{o, \omega_1\} \notin S.$$

4.5. Bemerkung. Ist die l-Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ injektiv (auch hier gilt die Bezeichnung vom Schluss der Bemerkung 4.3), dann gilt nach Satz 4.2 $f_{-1}(\{o\}) = \{o\}$. Ist f ausserdem noch eine surjektive Abbildung, dann braucht $f_1(A) \in S$ für $A \in S$ ebenfalls nicht zu gelten. Dies zeigt das weitere Beispiel (wieder bei der schon benützten Bezeichnung).

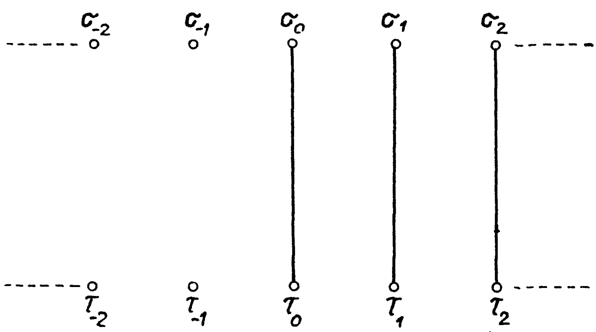

Abb. 4.2.

4.6. Beispiel. Es sei $\Omega = \{o, \ldots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots\}$ und die Orthogonalität $\perp$ sei durch den Graphen auf der Abb. 4.2 gegeben.

Dann ist $S = \{\{o\}, \Omega, \{o, \sigma_0\}, \{o, \tau_0\}, \{o, \sigma_1\}, \{o, \tau_1\}, \ldots\}$. Definieren wir die Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ folgendermassen: $f(o) = o$, $f(\sigma_i) = \sigma_{i-1}$, $f(\tau_i) = \tau_{i-1}$ für alle ganze Zahlen i. Die Abbildung f ist eine bijektive l-Abbildung und dabei gilt $f_1(\{o, \sigma_0\}) = \{o, \sigma_{-1}\} \in S$.

4.7. Satz. *Es sei $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ eine bijektive Abbildung. Ist f eine l-Abbildung und f^{-1} auch eine l-Abbildung (d. h. für jedes $A \in S_1$ gilt $f_1(A) \in S_2$), dann gilt*

$$f_{-1}(A) \vee_1 f_{-1}(B) = f_{-1}(A \vee_2 B)$$

für jedes $A, B \in S_2$ und

$$f_1(C) \vee_2 f_1(D) = f_1(C \vee_1 D)$$

für jedes $C, D \in S_1$.

Beweis. Ist $C \in S_1$ und gilt $f_{-1}(A) \subseteq C, f_{-1}(B) \subseteq C$, dann ist

$$A = f_1(f_{-1}(A)) \subseteq f_1(C), \quad B = f_1(f_{-1}(B)) \subseteq f_1(C).$$

Davon ergibt sich $A \vee_2 B \subseteq f_1(C)$, so dass $f_{-1}(A \vee_2 B) \subseteq f_{-1}(f_1(C)) = C$ ist. Nach der Bemerkung 4.3 gilt aber $f_{-1}(A) \vee_1 f_{-1}(B) \subseteq f_{-1}(A \vee_2 B)$, also nach der Definition von Supremum $\vee_1$ ist $f_{-1}(A) \vee_1 f_{-1}(B) = f_{-1}(A \vee_2 B)$. Die zweite Behauptung kann man ganz analogisch beweisen.

4.8. Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.7, wenn man

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega, \quad \perp_1 = \perp_2 = \perp, \quad \mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \mathscr{S}$$

wählt, gilt $f_{-1}(A) \vee f_{-1}(A^\perp) = f_1(A) \vee f_1(A^\perp) = \Omega$ für $A \in S$. Dabei ist $f_{-1}(A) \cap \cap f_{-1}(A^\perp) = f_1(A) \cap f_1(A^\perp) = \{o\}$, so dass $f_{-1}(A^\perp)$ ein Komplement zu $f_{-1}(A)$ und $f_{-1}(A^\perp)$ ein Komplement zu $f_1(A)$ ist. Es muss sich aber um keine Orthokomplemente handeln, wie das folgende Beispiel zeigt.

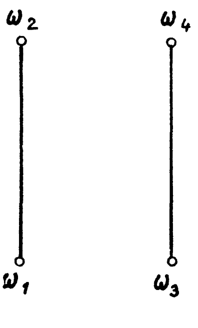

Abb. 4.3a.

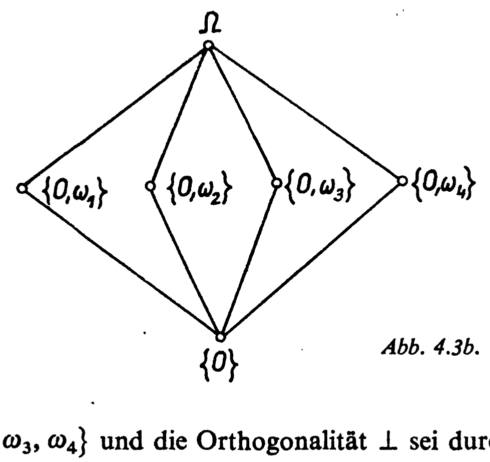

Abb. 4.3b.

4.9. Beispiel. Es sei $\Omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und die Orthogonalität $\perp$ sei durch den Graphen auf der Abbildung 4.3a gegeben. Dann ist

$$S = \{\{o\}, \Omega, \{o, \omega_1\}, \{o, \omega_2\}, \{o, \omega_3\}, \{o, \omega_4\}\}.$$

Der Graph des Verbandes $\mathscr{S}$ ist auf Abb. 4.3b zu sehen. Die Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ sei folgendermassen gegeben: $f(o) = o$, $f(\omega_1) = \omega_3$, $f(\omega_2) = \omega_2$, $f(\omega_3) = \omega_1$, $f(\omega_4) = \omega_4$. Die Abbildungen f und f^{-1} sind l-Abbildungen. Wir wählen $A = \{o, \omega_1\}$. Es gilt

$$A^{\perp} = \{o, \omega_2\}\,, \quad f_{-1}(A) = \{o, \omega_3\}\,,$$

$$f_{-1}(A^{\perp}) = \{o, \omega_2\} \quad \text{und} \quad \{o, \omega_3\}^{\perp} = \{o, \omega_4\} \neq \{o, \omega_2\}\,.$$

Eine analogische Situation zeigt sich für die Abbildung f_1.

4.10. Satz. *Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine bijektive Abbildung. Sind f und f^{-1} l-Abbildungen, $A \in S_1$ ein Atom in $\mathscr{S}_1$, dann ist $f_1(A)$ auch ein Atom in $\mathscr{S}_2$. Ist $A \in S_2$ ein Atom in $\mathscr{S}_2$, dann ist auch $f_{-1}(A)$ ein Atom in $\mathscr{S}_1$.*

Beweis. Es sei $\{o_2\} \neq B \in S_2$, $B \subseteq f_1(A)$. Dann ist $\{o_1\} \neq f_{-1}(B) \subseteq f_{-1}(f_1(A)) = A$, also es gilt $f_{-1}(B) = A$. Davon ergibt sich $B = f_1(f_{-1}(B)) = f_1(A)$. Den zweiten Teil der Behauptung beweist man ganz analogisch.

5. DIE $\perp$-ABBILDUNG

In diesem Absatz untersuchen wir eine auf Mengen mit Orthogonalität definierte Abbildung, die orthogonaltreu ist, analogisch wie z. B. ein unitärer Operator im Hilbertschen Raum.

5.1. Definition. Es sei auf einer Menge Ω_i die Orthogonalität $\perp_i$ definiert, $\mathscr{S}_i = (S_i, \subseteq, \Omega_i, \perp_i)$ sei der induzierte Verband mit Orthogonalität, $i = 1, 2$. Dann nennen wir eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ genau dann *$\perp$-Abbildung* (*Orthoabbildung*), wenn die Implikation

$$(x, y \in \Omega_1,\ x \perp_1 y) \Rightarrow f(x) \perp_2 f(y)$$

gilt.

5.2. Satz. *Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine $\perp$-Abbildung. Dann gilt:*

1. *Ist $A, B \subseteq \Omega_1$, $A \neq \emptyset \neq B$ und $A \subseteq B^{\perp_1}$, dann ist $f_1(A) \subseteq f_1(B)^{\perp_2}$.*
2. *Ist f surjektiv und $A \subseteq \Omega_2$, $A \neq \emptyset$, dann gilt $f_{-1}(A)^{\perp_1} \subseteq f_{-1}(A^{\perp_2})$.*

Beweis. 1. Diese Behauptung ist evident.

2. Ist $x \in f_{-1}(A)^{\perp_1}$, dann ist $x \perp_1 y$ für alle $y \in f_{-1}(A)$, d. h. es gilt $f(x) \perp_2 f(y)$ für alle $y \in f_{-1}(A)$, woraus $f(x) \in [f_1(f_{-1}(A))]^{\perp_2}$ folgt. Da f eine surjektive Abbildung ist, gilt $f_1(f_{-1}(A)) = A$, also ist $f(x) \in A^{\perp_2}$ und daher ist $x \in f_{-1}(A^{\perp_2})$.

5.3. Folgerung. *Ist* $\emptyset \neq A \subseteq \Omega_1$ *und ist* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *eine* $\perp$*-Abbildung, dann ist* $f_1(A) \subseteq f_1(A^{\perp_1})^{\perp_2}$ *und auch* $f_1(A^{\perp_1}) \subseteq f_1(A)^{\perp_2}$. *Ist* $A, B \in S_1$, $A \perp_1 B$, *dann gilt* $f_1(A) \perp_2 f_1(B)$. *Alle diese Behauptungen ergeben sich aus der Behauptung* 1 *des Satzes* 5.2.

5.4. Bemerkung. Ist auf den Mengen Ω_i eine Orthogonalität $\perp_i$ definiert, ist $\mathcal{S}_i = (S_i, \subseteq, \Omega_i, \perp_i)$ der induzierte Verband und ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine $\perp$-Abbildung, dann braucht f^{-1} keine $\perp$-Abbildung zu sein, und ist $A \in S_1$, dann muss $f_1(A^{\perp_1}) = f_1(A)^{\perp_2}$ nicht gelten. Diese Tatsachen zeigt das Beispiel 5.5, wo wir einfachheitshalber (ähnlich wie in den Beispielen des vorkommenden Absatzes) $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\perp_1 = \perp_2 = \perp$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$ legen.

5.5. Beispiel. Es sei $\Omega = \{o, \omega, \ldots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots\}$ und die Orthogonalität sei durch den Graphen auf der Abb. 5.1 (wieder mit Auslassung des Nullelementes – siehe die Graphen im Absatz 4) gegeben.

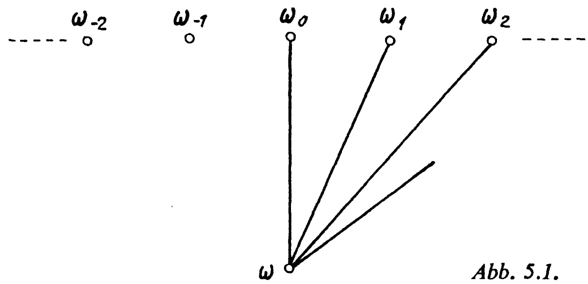

Abb. 5.1.

Dann ist $S = \{\{o\}, \Omega, \{o, \omega\}, \{o, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\}\}$. Definieren wir $f(o) = o$, $f(\omega) = \omega, f(\omega_i) = \omega_{i+1}$, i ist eine ganze Zahl. Es ist $\omega \perp \omega_0$, aber es gilt $f^{-1}(\omega) = \omega \not\perp \omega_{-1} = f^{-1}(\omega_0)$. *)

Wählen wir weiter $A = \{o, \omega\}$. Dann gilt

$$f_1(A) = \{o, \omega\}, \quad A^{\perp} = \{o, \omega_0, \omega_1, \ldots\},$$

$$f_1(A^{\perp}) = \{o, \omega_1, \omega_2, \ldots\}, \quad f_1(A)^{\perp} = \{o, \omega_0, \omega_1, \ldots\},$$

so dass zwar $f_1(A^{\perp}) \subseteq f_1(A)^{\perp}$ gilt, aber $f_1(A^{\perp}) \neq f_1(A)^{\perp}$ ist.

5.6. Satz. *Es sei* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *eine bijektive* $\perp$*-Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. f^{-1} *ist eine* $\perp$*-Abbildung.*
2. *Für alle* $A \subseteq \Omega_1$, $A \neq \emptyset$, *gilt* $f_1(A^{\perp_1}) = f_1(A)^{\perp_2}$.

*) $\omega \not\perp \omega_{-1}$ bedeutet, dass ω und ω_{-1} untereinander nicht in der Relation $\perp$ sind.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass 2 aus 1 folgt. Ist $A \subseteq \Omega_1$, $A \neq \emptyset$, dann gilt nach Folgerung 5.3 $f_1(A^{\perp_1}) \subseteq f_1(A)^{\perp_2}$. Wir beweisen die umgekehrte Inklusion. Es sei also $x \in f_1(A)^{\perp_1}$. Dann ist $x \perp_2 f(g)$ für alle $y \in A$. Es existiert genau ein Element $x_0 \in \Omega_1$ so, dass $x = f(x_0)$ ist. Aus der Beziehung $f(x_0) \perp_2 f(y)$ für alle $y \in A$ und angesichts der Voraussetzung, dass f^{-1} eine $\perp$-Abbildung ist, bekommt man $x_0 \perp_1 y$ für alle $y \in A$. Es ist demzufolge $x_0 \in A^{\perp_1}$, woraus $x = f(x_0) \in f_1(A^{\perp_1})$ folgt, d. h. es gilt $f_1(A)^{\perp_2} \subseteq f_1(A^{\perp_1})$. Damit ist die zweite Aussage bewiesen.

Wir beweisen nun, dass 1 aus 2 folgt. Es seien $x, y \in \Omega_1$, und $f(x) \perp_2 f(y)$. Sollte $x \perp_1 y$ nicht gelten, dann wäre $x \notin \{y\}^{\perp_1}$, d. h. $f(x) \notin f_1(\{y\}^{\perp_1})$. Nach der Voraussetzung ist $f_1(\{y\}^{\perp_1}) = f_1(\{y\})^{\perp_2} = \{f(y)\}^{\perp_2}$, demzufolge ist $f(x) \notin \{f(y)\}^{\perp_2}$, so dass $f(x) \perp_2 f(y)$ nicht gilt. Dies widerspricht aber der Voraussetzung.

5.7. Satz. *Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine bijektive $\perp$-Abbildung und f^{-1} sei ebenfalls eine $\perp$-Abbildung. Dann ist $f_1 : S_1 \to S_2$ (bzw. $f_{-1} : S_2 \to S_1$) ein Isomorphismus des vollständigen Verbandes mit Orthogonalität $\mathscr{S}_1 = (S_1, \subseteq, \Omega_1, \perp_1)$ auf den vollständigen Verband mit Orthogonalität $\mathscr{S}_2 = (S_2, \subseteq, \Omega_2, \perp_2)$ (bzw. $\mathscr{S}_2$ auf $\mathscr{S}_1$).*

Beweis. Es sei $A \in S_1$. Nach Satz 5.6 gilt

$$f_1(A)^{\perp_2} = f_1(A^{\perp_1}), \quad \text{d. h.} \quad f_1(A)^{\perp_2\perp_2} = f_1(A^{\perp_1})^{\perp_2} = f_1(A^{\perp_1\perp_2}) = f_1(A),$$

wo die letzte Gleichheit infolge dessen gilt, dass $A \in S_1$ ist. Nachdem aber $f_1(A)^{\perp_2\perp_2} = f_1(A)$ ist, gilt $f_1(A) \in S_2$. Demzufolge ist f^{-1} eine l-Abbildung. Analogisch zeigt man, dass auch f eine l-Abbildung ist.

Sind nun $A_i \in S_1$, $i \in I \neq \emptyset$, nach Satz 4.7 (den man offenbar für eine beliebige Verbindung verallgemeinern kann) gilt:

$$f_1\Big(\bigvee_{i \in I}{}_1 A_i\Big) = \bigvee_{i \in I}{}_2 f_1(A_i).$$

Die Beziehung

$$f_1\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} f_1(A_i)$$

ist klar. Zusätzlich haben wir nach Satz 5.6 $f_1(A^{\perp_1}) = f_1(A)^{\perp_2}$ für $A \in S_1$.

Auf gleiche Weise kann man analogische Beziehungen für die Abbildung f_{-1} beweisen. Damit ist der Satz bewiesen.

5.8. Satz. *Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine bijektive $\perp$-Abbildung. Gilt $f_{-1}(A^{\perp_2}) = f_{-1}(A)^{\perp_1}$ für alle $A \in S_2$, dann ist $f_{-1} : S_2 \to S_1$ ein Isomorphismus des vollständigen Verbandes mit Orthogonalität $\mathscr{S}_2$ auf den vollständigen Verband mit Orthogonalität $\mathscr{S}_1$.*

Beweis. Ist $A \in S_2$, dann ist $A^{\perp_2} \in S_2$, also gilt

$$f_{-1}(A) = f_{-1}(A^{\perp_2\perp_2}) = f_{-1}(A^{\perp_2})^{\perp_1} \in S_1,$$

d. h. f ist eine l-Abbildung. Wir zeigen, dass auch f^{-1} eine l-Abbildung ist. Es sei $A \in S_1$. Dann ist $f_1(A) \subseteq f_1(A)^{\perp_2\perp_2} \in S_2$. Es existiert das kleinste (im Sinne der Mengeninklusion) Element $B \in S_2$ so, dass $f_1(A) \subseteq B \subseteq f_1(A)^{\perp_2\perp_2}$ ist; es ist ein Durchschnitt aller solchen $C \in S_2$, für die $f_1(A) \subseteq C$ gilt. Eins von solchen Elementen C ist $f_1(A)^{\perp_2\perp_2}$. Offensichtlich ist $f_1(A)^{\perp_2} \subseteq B^{\perp_2} \subseteq f_1(A)^{\perp_2}$. Davon und nach der Folgerung 5.3 haben wir $f_1(A^{\perp_1}) \subseteq f_1(A)^{\perp_2} = B^{\perp_2}$. Es ist also $A^{\perp_1} \subseteq f_{-1}(B^{\perp_2})$ und weil $A \subseteq f_{-1}(B)$ gilt, bekommen wir $f_{-1}(B)^{\perp_1} \subseteq A^{\perp_1} \subseteq f_{-1}(B^{\perp_2})$. Da $B \in S_2$ ist, nach Voraussetzung $f_{-1}(B)^{\perp_1} = f_{-1}(B^{\perp_2})$, d. h. $f_{-1}(B)^{\perp_1} = A^{\perp_1}$ gilt und weil f eine l-Abbildung ist, ist auch $f_{-1}(B) \in S_1$, also es gilt $f_{-1}(B)^{\perp_1\perp_1} = f_1(B)$. Da $A \in S_1$ ist, gilt ähnlicherweise $A^{\perp_1\perp_1} = A$. Davon und aus der Gleichheit $f_{-1}(B)^{\perp_1} = A^{\perp_1}$ ergibt sich $f_{-1}(B) = A$, d. h. es ist $B = f_1(A)$. Da $B \in S_2$ gilt, ist auch $f_1(A) \in S_2$. Deshalb ist f^{-1} auch eine l-Abbildung.

Die Behauptung des Satzes folgt nun leicht vom Satz 4.7 und aus den Voraussetzungen.

5.9. Bemerkung. Im Zusammenhang mit dem Satz 5.7 entsteht die Frage, ob dann – unter den Voraussetzungen, dass f eine bijektive $\perp$-Abbildung ist, f und f^{-1} l-Abbildungen sind – f^{-1} eine $\perp$-Abbildung ist. Im folgenden Beispiel (wo wir ähnlich wie im Beispiel 5.5

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega\,, \quad \perp_1 = \perp_2 = \perp\,, \quad \mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2 = \mathscr{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$$

wählen) zeigen wir, dass dieses allgemein nicht zu gelten braucht.

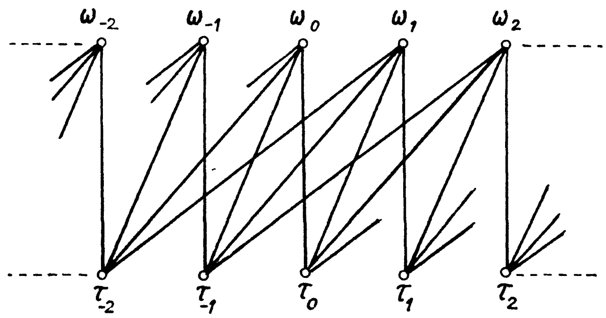

Abb. 5.2.

5.10. Beispiel. Es sei $\Omega = \{o, \ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots\}$ und die Orthogonalität $\perp$ sei folgendermassen gegeben (siehe auch die Abb. 5.2): $\omega_i \perp \tau_j$ für $j = i, i-1, i-2, \ldots$, und natürlich $o \perp \tau_i$, $o \perp \omega_i$, i ist eine ganze Zahl.

Für die Trägermenge S des Verbandes $\mathscr{S} = (S, \subseteq, \Omega, \perp)$ haben wir dann:

$$S = \{\{o\}, \Omega, \ldots, \{\ldots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, o\}, \{\ldots, \tau_0, \tau_1, o\}, \{o, \omega_1, \omega_2, \ldots\}, \ldots\}\,.$$

Definieren wir $f(o) = o$, $f(\tau_i) = \tau_i$, $f(\omega_i) = \omega_{i+1}$, wo i eine ganze Zahl ist. Leicht sieht man, dass f eine $\perp$-Abbildung ist, f und f^{-1} l-Abbildungen sind. Dagegen aber ist $\tau_0 \perp \omega_0$, während $f^{-1}(\tau_0) = \tau_0 \not\perp \omega_{-1} = f^{-1}(\omega_0)$ gilt. D. h. f^{-1} ist keine $\perp$-Abbildung.

Es ist interressant zu bemerken, dass der Verband aus diesem Beispiel nicht einmal ein Atom enthält. Wie man ferner sehen wird, sieht die Situation anders aus, wenn der Verband $\mathscr{S}$ dem Axiom α aus dem Absatz 2 genügt. Jetzt beweisen wir folgenden

5.11. Satz. *Es sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine bijektive $\perp$-Abbildung und eine l-Abbildung und sei f^{-1} auch eine l-Abbildung. Erfüllt der Verband $\mathscr{S}_1 = (S_1, \subseteq, \Omega_1, \perp_1)$ den Axiom α aus dem Absatz* 2, *dann gilt*

$$f_1(\{x\}^{\perp_1\perp_1}) = f_1(\{x\}^{\perp_1})^{\perp_2} = f_1(\{x\})^{\perp_2\perp_2}$$

für jedes $x \in \Omega_1$, $x \neq o_1$, und dieses Element ist ein Atom in $\mathscr{S}_2 = (S_2, \subseteq, \Omega_2, \perp_2)$.

Beweis. Es sei $x \in \Omega_1$, $x \neq o_1$. Nach Folgerung 5.3 gilt $f_1(\{x\}^{\perp_1}) \subseteq f_1(\{x\})^{\perp_2}$, woraus $\{o_2\} \neq f_1(\{x\})^{\perp_2\perp_2} \subseteq f_1(\{x\})^{\perp_2}$ folgt. Wieder nach Folgerung 5.3 haben wir $\{o_2\} \neq f_1(\{x\}^{\perp_1\perp_1}) \subseteq f_1(\{x\}^{\perp_1})^{\perp_2}$. Wenn wir beweisen, dass $f_1(\{x\})^{\perp_1})^{\perp_2}$ ein Atom in $\mathscr{S}_2$ ist, ist der Beweis durchgeführt, denn Dank der Tatsache, dass f^{-1} eine l-Abbildung ist, gilt $f_1(\{x\}^{\perp_1\perp_2}) \in S_2$. Es sei also $\{o_2\} \neq A \in S_2$, $A \subseteq f_1(\{x\}^{\perp_1})^{\perp_2}$. Dann ist $f_1(\{x\}^{\perp_1}) \subseteq A^{\perp_2} = f_1(f_{-1}(A^{\perp_2}))$, woraus sich $\{x\}^{\perp_1} \subseteq f_{-1}(A^{\perp_2})$ ergibt und weiter gilt $f_{-1}(A^{\perp_2})^{\perp_1} \subseteq \{x\}^{\perp_1\perp_2}$.

Weil $\{o_1\} \neq f_{-1}(A^{\perp_2})^{\perp_1} \in S_1$ gilt, bekommen wir auf Grund des Axioms α aus dem Absatz 2 die Gleichung $f_{-1}(A^{\perp_2})^{\perp_1} = \{x\}^{\perp_1\perp_1}$, d. h. $f_{-1}(A^{\perp_2}) = \{x\}^{\perp_1}$, woraus $A^{\perp_2} = f_1(\{x\}^{\perp_1})$ folgt und schliesslich $A = f_1(\{x\}^{\perp_1})^{\perp_2}$ ist. Also ist $f_1(\{x\}^{\perp_1})^{\perp_2}$ tatsächlich ein Atom in $\mathscr{S}_2$ und der Satz ist bewiesen.

Auf Grund des oben bewiesenen Satzes erklärt man schon leicht das vor dem Satz 5.11 angedeutete Problem.

5.12. Satz. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes* 5.11 *erfüllt. Dann ist f^{-1} eine $\perp$-Abbildung.*

Beweis. Es seien $x, y \in \Omega_1$, $f(x) \perp_2 f(y)$. Sollte $x \perp_1 y$ gelten, dann wäre $x \neq o_1 \neq y$ und $x \in \{y\}^{\perp_1}$, also ist $f(x) \notin f_1(\{y\}^{\perp_1})$ und nach Satz 5.11 gilt also $f(x) \notin f_1(\{y\})^{\perp_2}$. Aber nach der Voraussetzung gilt $f(x) \perp f(y)$, d. h. $f(x) \in \{f(y)\}^{\perp_2} = f_1(\{y\})^{\perp_2}$. Durch diesen Widerspruch ist der Satz bewiesen.

•

5.13. Bemerkung. Aus dem Satz 5.12 folgt, dass unter den Voraussetzungen des Satzes 5.11 auch die Behauptung des Satzes 5.7 über den Isomorfismus der Verbände $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{S}_2$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] *Havrda, J.*: Ortogonalita na množinách. (Orthogonalität auf Mengen.) Čas. pro pěst. mat. *100* (1975), 339—354, Praha.
[2] *Havrda, J.*: Ortogonalita na množinách. (Orthogonalität auf Mengen.) Habilitationsarbeit, Elektrotechnische Fakultät der TH Prag, Prag 1973.

Anschrift des Verfassers: 166 27 Praha 6, Suchbátarova 2 (elektrotechnická fakulta ČVUT).