Pavla Bajáková

Reper sítě na ploše v trojrozměrném afinním prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 100 (1975), No. 4, 384--390

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117892`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

REPER SÍTĚ NA PLOŠE V TROJROZMĚRNÉM AFINNÍM PROSTORU

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

(Došlo dne 1. října 1974)

1. Studium křivek na ploše v trojrozměrném prostoru patří k základním tématům diferenciální geometrie. R. N. ŠČERBAKOV k této problematice přistupuje z nového hlediska. Ščerbakovova reperu lze s výhodou použít ke studiu libovolné konjugované sítě. Při řešení některých geometrických problémů se však ukázala potřeba užívat reperu, který je invariantně připojen nikoliv ke konjugované, ale k obecné síti křivek na ploše. Vhodnou modifikací Ščerbakovova postupu sestrojil takový reper v trojrozměrném projektivním prostoru I. KOLÁŘ [1]. Podobnými úvahami se v případě ekviafinního prostoru zabývala L. MARKOVÁ [2].

V tomto článku je užitím Cartanových metod konstruován kanonický reper obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném afinním prostoru.

Reper v trojrozměrném afinním prostoru A^3 je tvořen bodem M s polohovým vektorem $\boldsymbol{M}$ a třemi lineárně nezávislými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Obecný pohyblivý reper R závisí na třech souřadnicích bodu M a devíti souřadnicích vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, tedy na dvanácti parametrech. Relativní komponenty ω^i a ω_i^k pohyblivého reperu jsou určeny rovnicemi

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{M} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3\,.$$

V nich ω^i, ω_i^k jsou Pfaffovy formy v diferenciálech parametrů, na nichž závisí reper R. Splňují rovnice struktury

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{d}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i\,, \quad \mathrm{d}\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k\,; \quad i, j, k = 1, 2, 3\,.$$

V prostoru A^3 uvažujme libovolnou nerozvinutelnou plochu opsanou bodem P s polohovým vektorem $\boldsymbol{P}$, kde $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(u, v)$ je vektorová funkce dvou argumentů. Ke každému bodu P přiřadíme pohyblivý reper tak, že jeho vrchol M splyne s bodem P. Tento reper R_9 závisí na dvou hlavních parametrech u, v a devíti parametrech vedlejších. Jako obvykle označme δ diferencování takové, že $\delta u = 0$, $\delta v = 0$. Tedy

$$\delta \boldsymbol{M} = e^i \mathbf{e}_i , \quad \delta \mathbf{e}_i = e_i^k \mathbf{e}_k ; \quad i, k = 1, 2, 3 .$$

Při uvedené volbě reperu jsou formy ω^1, ω^2, ω^3 hlavní.

Reper R_9 budeme nyní volit tak, aby vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ležely v tečné rovině plochy $\boldsymbol{P}(u, v)$. Tento požadavek je vyjádřen rovnicí

$$\omega^3 = 0 . \tag{3}$$

Vnějším diferencováním této rovnice a užitím Cartanova lemmatu dostaneme

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2 , \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2 , \tag{4}$$

z čehož je vidět, že Pfaffovy formy ω_1^3, ω_2^3 jsou hlavní. Získali jsme tak reper R_7.

Prodloužením rovnic (4) obdržíme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a - a(2\omega_1^1 - \omega_3^3) - 2b\omega_1^2 &= m\omega^1 + n\omega^2 , \\ \mathrm{d}b - b(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 &= n\omega^1 + p\omega^2 , \\ \mathrm{d}c - c(2\omega_2^2 - \omega_3^3) - 2b\omega_2^1 &= p\omega^1 + q\omega^2 . \end{aligned} \tag{5}$$

Při změně vedlejších parametrů platí

$$\begin{aligned} \delta a &= a(2e_1^1 - e_3^3) + 2be_1^2 , \\ \delta b &= b(e_1^1 + e_2^2 - e_3^3) + ae_2^1 + ce_1^2 , \\ \delta c &= c(2e_2^2 - e_3^3) + 2be_2^1 . \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnic (6) je především vidět, že volba $a = b = c = 0$ má invariantní charakter. Body, v nichž by byly splněny rovnice $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, vyloučíme z naší úvahy.

2. Na ploše mějme libovolnou síť $\mathrm{S} = \{S_1, S_2\}$, kde S_1, S_2 jsou vrstvy sítě S. Předpokládejme, že síť neobsahuje žádnou vrstvu asymptotických křivek. Uvažujeme-li okolí jistého bodu plochy, bude C_i $(i = 1, 2)$ značit křivku vrstvy S_i procházející tímto bodem. Ke každému bodu sítě S přiřadíme reper R_7, který budeme specialisovat tak, aby přímka $(M, \mathbf{e}_1)$, resp. $(M, \mathbf{e}_2)$ byla tečnou křivky jdoucí bodem M a náležící vrstvě S_1, resp. S_2 sítě S. Přímky $(M, \mathbf{e}_1)$, $(M, \mathbf{e}_2)$ budou nyní pevné, takže

$$[\delta \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] = 0 , \quad [\delta \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] = 0 .$$

Odtud plyne $e_1^2 = e_2^1 = 0$ a tedy Pfaffovy formy ω_1^2, ω_2^1 jsou hlavní. Položíme-li

$$\omega_1^2 = \lambda\omega^1 + \mu\omega^2 , \quad \omega_2^1 = \nu\omega^1 + \varrho\omega^2 , \tag{7}$$

dostaneme reper R_5. Vzhledem k tomuto reperu má síť S diferenciální rovnici

$$\omega^1\omega^2 = 0 .$$

Budeme ji proto nazývat *parametrickou sítí.*

V dalším budeme předpokládat, že parametrická síť S není konjugovaná. Tento předpoklad je vyjádřen vztahem $b \neq 0$, jak je vidět z rovnice

$$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0$$

asymptotických křivek na ploše $\mathbf{P}(u, v)$.

Prodloužením rovnic (7) dostaneme

$$\begin{aligned}
(8)\qquad & d\lambda + \lambda(\omega_2^2 - 2\omega_1^1) - \mu\omega_1^2 + a\omega_3^2 = e\omega^1 + f\omega^2 , \\
& d\mu - \mu\omega_1^1 - \lambda\omega_2^1 + b\omega_3^2 = f\omega^1 + g\omega^2 , \\
& d\nu - \nu\omega_2^2 - \varrho\omega_1^2 + b\omega_3^1 = h\omega^1 + k\omega^2 , \\
& d\varrho + \varrho(\omega_1^1 - 2\omega_2^2) - \nu\omega_2^1 + c\omega_3^1 = k\omega^1 + l\omega^2 .
\end{aligned}$$

Při změně vedlejších parametrů tedy platí

$$\begin{aligned}
(9)\qquad & \delta\lambda = \lambda(2e_1^1 - e_2^2) - ae_3^2 , \\
& \delta\mu = \mu e_1^1 - be_3^2 , \\
& \delta\nu = \nu e_2^2 - be_3^1 , \\
& \delta\varrho = \varrho(2e_2^2 - e_1^1) - ce_3^1 .
\end{aligned}$$

Přejděme nyní k další specialisaci reperu. Vektor $\mathbf{e}_3$ budeme volit rovnoběžně se směrovým vektorem $\mathbf{e}$ průsečnice oskulačních rovin křivek $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$.

Oskulační rovina parametrické křivky $\omega^1 = 0$, resp. $\omega^2 = 0$ v bodě M je určena vektory $d_2\mathbf{M}$, $d_2^2\mathbf{M}$, resp. $d_1\mathbf{M}$, $d_1^2\mathbf{M}$, přičemž index 1, resp. 2 značí diferencování podél křivky $\omega^2 = 0$, resp. $\omega^1 = 0$. Uvažovaná volba je vyjádřena rovnicemi

$$(d_1^2\mathbf{M}, d_1\mathbf{M}, \mathbf{e}_3) = 0 , \quad (d_2^2\mathbf{M}, d_2\mathbf{M}, \mathbf{e}_3) = 0 ,$$

z nichž $\lambda = 0$, $\varrho = 0$. Z (9) plyne $e_3^1 = 0$, $e_3^2 = 0$, takže formy ω_3^1, ω_3^2 jsou hlavní. Obdržíme tak reper R_3, který závisí na dvou hlavních a třech vedlejších parametrech. Pro tento reper získáme z rovnic (7) a (8) vztahy

$$\omega_1^2 = \mu\omega^2 , \quad \omega_3^1 = \frac{k + \nu^2}{c}\,\omega^1 + \frac{1}{c}\,\omega^2 ,$$

$$\omega_2^1 = \nu\omega^1 , \quad \omega_3^2 = \frac{e}{a}\,\omega^1 + \frac{f + \mu^2}{a}\,\omega^2 .$$

Situace v reperu R_3 je přehledně vyjádřena rovnicemi

$$\delta \mathbf{e}_1 = e_1^1 \mathbf{e}_1 , \quad \delta \mathbf{e}_2 = e_2^2 \mathbf{e}_2 , \quad \delta \mathbf{e}_3 = e_3^3 \mathbf{e}_3 .$$

Vidíme, že vedlejší parametry ovlivňují jen normalisaci vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, směry vektorů závisí na hlavních parametrech u, v. Proto další specialisace reperu R_3 budou voleny tak, aby normalisovaly vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Normalisujme nejprve vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Uvažujme kongruenci vytvořenou přímkami $(M, \mathbf{e}_1)$. Bod $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + x\mathbf{e}_1$ je ohniskem kongruence právě tehdy, když $[\mathrm{d}\boldsymbol{F}, \mathbf{e}_1] = 0$. Z této podmínky dostaneme dvě rovnice

$$x\omega_1^3 = 0 , \quad \omega^2 + x\omega_1^2 = 0 .$$

Řešení $x = 0$ první rovnice určuje bod M a druhá rovnice dává $1 + x\mu = 0$. Druhým ohniskem je tedy bod

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\mu} \mathbf{e}_1 .$$

Nyní uvažujme kongruenci přímek $(M, \mathbf{e}_2)$. Analogicky vyjde pro druhé ohnisko $\boldsymbol{F}_2$ této kongruence vztah

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\nu} \mathbf{e}_2 .$$

Vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ budeme normalisovat tak, aby

$$\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{F}_1 , \quad \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{F}_2 .$$

Této normalisaci odpovídá volba $\mu = \nu = 1$ a z (9) plyne $e_2^2 = e_1^1 = 0$. V získaném reperu R_1 jsou kromě formy ω_3^3 již všechny formy hlavní a platí:

$$\omega_1^2 = \omega^2 , \quad \omega_3^1 = \frac{k+1}{c} \omega^1 + \frac{1}{c} \omega^2 , \tag{10}$$

$$\omega_2^1 = \omega^1 , \quad \omega_3^2 = \frac{e}{a} \omega^1 + \frac{f+1}{a} \omega^2 ,$$

$$\omega_1^1 = \left(\frac{e}{a} b - f\right) \omega^1 + \left(\frac{f+1}{a} b - g\right) \omega^2 ,$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{k+1}{c} b - h\right) \omega^2 + \left(\frac{1}{c} b - k\right) \omega^2 .$$

Z (6) obdržíme

$$\delta a = - a e_3^3 , \quad \delta b = - b e_3^3 , \quad \delta c = - c e_3^3 . \tag{11}$$

Zbývá normalisovat vektor $\mathbf{e}_3$. Za tím účelem uvažujme přímkovou plochu P_1 vytvořenou tečnami křivek vrstvy S_2 podél křivky C_1 a analogicky vytvořenou přímkovou plochu P_2. Plochy P_1, P_2 jsou nerozvinutelné, poněvadž síť S není podle předpokladu konjugovaná. Dále uvažujme kvadriku, která má dotyk prvního řádu s plochami P_1 a P_2 podél příslušných tečen křivek vrstev S_1 a S_2 jdoucích bodem M. Rovnici tečny ke křivce vrstvy S_i předpokládejme ve tvaru

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} + \lambda \mathbf{e}_i\,; \quad i = 1, 2\,, \tag{12}$$

z něhož

$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \mathrm{d}\mathbf{M} + \mathrm{d}\lambda \mathbf{e}_i + \lambda\, \mathrm{d}\mathbf{e}_i\,; \quad i = 1, 2\,. \tag{13}$$

Rovnici hledané kvadriky v lokálních souřadnicích můžeme uvažovat ve tvaru

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + 2l(\mathbf{X}) + a_{00} = 0\,, \tag{14}$$

kde f je bilineární symetrická forma a l lineární forma. Přitom pro $\mathbf{X} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ klademe $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = a_{ik} = a_{ki}$, $l(\mathbf{e}_i) = a_{i0}$. Diferencováním (14) obdržíme podmínku dotyku prvního řádu

$$f(\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X}) + l(\mathrm{d}\mathbf{X}) = 0\,. \tag{15}$$

Do (14) dosadíme výraz (12) a srovnáme koeficienty u mocnin λ. Dostaneme:

$$f(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 2l(\mathbf{M}) + a_{00} = 0\,, \quad f(\mathbf{M}, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_i) = 0\,, \quad f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0\,,$$

kde $i = 1, 2$. Dosadíme-li do (15) z (12) a (13), přičemž dbáme toho, aby tečna (12) ke křivce jedné vrstvy sítě byla vždy vedena bodem křivky druhé vrstvy sítě, obdržíme:

$$\begin{aligned}
&f(\mathrm{d}\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{M}) = 0\,,\\
&f(\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) + 2f(\mathrm{d}\mathbf{M}, \mathbf{e}_i) + f(\mathrm{d}\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) = 0\,,\\
&2f(\mathbf{e}_i, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) + f(\mathrm{d}\mathbf{e}_i, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) + l(\mathrm{d}\mathbf{e}_i) = 0\,; \quad i = 1, 2
\end{aligned}$$

a užitím (1)

$$\begin{aligned}
&l(\mathbf{e}_i)\, \omega^i = 0\,,\\
&f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\, \omega^i + l(\mathbf{e}_3)\, \omega_k^3 = 0\,; \quad i, k = 1, 2\,, \quad i \neq k\,,\\
&f(\mathbf{e}_i, \mathrm{d}\mathbf{e}_i) = 0\,; \quad i = 1, 2\,.
\end{aligned}$$

Z předcházejících rovnic dostaneme $a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{10} = a_{20} = 0$, $a_{12} = -ba_{30}$, $a_{13} = a_{30}$. $a_{23} = a_{30}$; dále volíme $a_{30} = 1$. Získáme svazek kvadrik

$$a_{33}z^2 - 2bxy + 2xz + 2yz + 2z = 0\,,$$

který nazveme *svazkem základních kvadrik sítě* S. Uvedený svazek obsahuje pro $a_{33} = -2/b$ paraboloid o rovnici

$$-z^2 - b^2xy + bxz + byz + bz = 0\,.$$

Jeho průsečíky s přímkou $(M, \mathbf{e}_3)$ jsou $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{M} + b\mathbf{e}_3$. Volme $b = 1$, takže

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{M} + \mathbf{e}_3 .$$

Touto volbou jsme provedli poslední specialisaci reperu a získali tak kanonický reper pro plochu s danou sítí S. Z (11) obdržíme $e_3^3 = 0$ a z (5) po dosazení vztahů (10) vyjde

$$\omega_3^3 = \omega^1 \left[n + \left(\frac{e}{a} - f \right) + \left(\frac{k+1}{c} - h \right) + a\nu \right] + \\ + \omega^2 \left[p + \left(\frac{f+1}{a} - g \right) + \left(\frac{1}{c} - k \right) + c\mu \right].$$

Kanonický reper sítě S je tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{M} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 , \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= (A\omega^1 + B\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + \omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + (C\omega^1 + D\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (\omega^1 + c\omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= (E\omega^1 + F\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (G\omega^1 + H\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (K\omega^1 + L\omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \frac{e}{a} - f , & B &= \frac{f+1}{a} - g , \\ C &= \frac{k+1}{c} - h , & D &= \frac{1}{c} - k , \\ E &= C + h , & F &= D + k , \\ G &= A + f , & H &= B + g , \\ K &= A + C + n + a\nu , & L &= B + D + p + c\mu . \end{aligned}$$

Síť na ploše je definována soustavou diferenciálních rovnic

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\omega^3 = 0 , \\ &\omega_1^1 = A\omega^1 + B\omega^2 , \quad \omega_2^1 = \omega^1 , \quad \omega_3^1 = E\omega^1 + F\omega^2 , \\ &\omega_1^2 = \omega^2 , \quad \omega_2^2 = C\omega^1 + D\omega^2 , \quad \omega_3^2 = G\omega^1 + H\omega^2 , \\ &\omega_1^3 = a\omega^1 + \omega^2 , \quad \omega_2^3 = \omega^1 + c\omega^2 , \quad \omega_3^3 = K\omega^1 + L\omega^2 . \end{aligned}$$

Vnějším diferencováním této soustavy rovnic obdržíme vnější kvadratické relace

$$\begin{aligned}
dA \wedge \omega^1 + dB \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(A - AB - B + BC + aF - E - 1),\\
dC \wedge \omega^1 + dD \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(C + CD - D - BC + cG + H + 1),\\
dE \wedge \omega^1 + dF \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(-AF + KF + CF - F + E - EL - H),\\
dG \wedge \omega^1 + dH \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(DG - LG - BG + G - H + KH + E),\\
dK \wedge \omega^1 + dL \wedge \omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^2(E - aF - cG - KB + LC - H + K - L),\\
da \wedge \omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2(A - 2aB + aL + a - K + C - 2),\\
dc \wedge \omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2(L + 2cC - cK - c - D - B + 2)
\end{aligned}$$

a konečně rovnice

$$1 = D - F + cE, \quad 1 = A + G + aH.$$

V obvyklém označení je $q = 10$, $s_1 = 7$, $s_2 = 3$, $Q = 13$, $N = 13$. Protože $Q = N$, je soustava (16) v involuci a její řešení závisí na třech libovolných funkcích dvou proměnných.

Literatura

[1] *Kolář I.:* Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném projektivním prostoru. Rozpravy Československé akademie věd, ročník *77*, sešit 5, 1967.

[2] *Marková L.:* Konstrukce kanonického reperu sítě na ploše v ekviafinním trojrozměrném prostoru. Časopis pro pěstování matematiky, sešit *96*, 1971, str. 133—144.

[3] *Щербаков Р. Н.:* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск 1960.

Adresa autorky: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).

Zusammenfassung

DAS BEWEGLICHE BEZUGSSYSTEM DES NETZES AUF EINER FLÄCHE IM DREIDIMENSIONALEN AFFINEN RAUM

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

In diesem Artikel wird mittels der Cartanschen Methoden das kanonische bewegliche Bezugssystem des allgemeinen Netzes von Kurven auf einer Fläche im dreidimensionalen affinen Raum konstruiert. Bei der angegebenen Konstruktion ist das bewegliche Bezugssystem dem Netz schon in der ersten Etappe der Spezialisierung zugeordnet. Die Spezialisierungen des beweglichen Bezugssystems sind geometrisch charakterisiert.