Pavel Bartoš

Poznámka o počte riešení optickej rovnice

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 99 (1974), No. 2, 173--176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117826

POZNÁMKA O POČTE RIEŠENÍ OPTICKEJ ROVNICE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 7. marca 1973)

P. ERDÖS v článku [1] uvádza, že o počte riešení diofantickej rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_j = a/b$ nič nie je známe. V článku [2] sa počet riešení rovnice $1/x + 1/y = 1/b$ vyjadruje pomocou počtu $d(b)$ deliteľov čísla b. V tejto úvahe sa určí dolné ohraničenie počtu riešení rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1\,, \quad n > 2 \tag{1}$$

tým, že sa stanoví počet (resp. jeho dolné ohraničenie) tých riešení (1), ktoré možno vypočítať podľa článku [3] a [4].

Pod riešením rovnice (1) rozumieme tzv. primitívne riešenie, vyhovujúce podmienke $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, v prirodzených číslach. Riešenia spĺňajúce podmienku $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ nazveme P-riešeniami, ich počet $p(n)$ a riešenia, ktoré túto podmienku nespĺňajú, Q-riešeniami a ich počet $q(n)$.

I. P-RIEŠENIA

Podľa definície 3 a vety 2 a 9 článku [3] dostaneme pre $n > 2$ tzv. prolongabilné riešenia rovnice (1) spĺňajúce podmienku $x_1 < x_2 \ldots < x_n$ nalsedovne:

$$a_0 = 1\,, \quad a_i = a_{i-1}\left(1 + \frac{a_{i-1}}{k_{i-1}}\right), \quad k_{i-1} \mid a_{i-1}\,, \quad k_i < a_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2}$$

$$x_i = a_{i-1} + k_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \quad x_n = a_{n-1}\,.$$

Podmienka $k_{i-1} \mid a_{i-1}^2$ vo vete 2 článku [3] bude splnená, ak $k_{i-1} \mid a_{i-1}$.

Veta 1. *Riešenia* (2) *rovnice* (1) *sú pro rôzne postupnosti* $\{k_j\}_{j=0}^{n-2}$ *rôzne P-riešenia.*

Dôkaz. Treba dokázať len, že rôzne postupnosti $\{k_j\}$ a $\{k'_j\}$ dajú rôzne riešenia. Pretože podľa (2) $a_0 = k_0 = 1$; $a_1 = 2$, $k_1 = 1$, existuje taký index j, $2 \leqq j \leqq \leqq n - 2$, že $k_0 = k'_0$, $k_1 = k'_1, \ldots, k_{j-1} = k'_{j-1}$, ale $k_j \neq k'_j$. Potom, pravdaže, aj $a_i = a'_i$, čo platí dokonca pre $i \leqq j$, lebo $a_j = a_{j-1}(1 + a_{j-1}/k_{j-1}) = a'_j$ a $a_i \neq a'_i$ pre $i > j$. Z toho vyplýva, že $x'_{j+1} - x_{j+1} = a'_j + k'_j - a_j - k_j = k'_j - k_j \neq 0$. Tým je veta dokázaná.

Lema 1. *Nech a_j, k_j sú čísla určené podľa (2), $j \geqq 2$. Počet $d'(a_j)$ deliteľov k_j, $k_j < a_j$, číslo a_j nie je menší než $j + 1$.*

Dôkaz. Pretože $a_2 = a_1(1 + a_1/k_1) = 2(1 + 2) = 6$, je $d'(a_2) = 3$ a lema pre $j = 2$ platí. Nech platí pre určité $j \geqq 2$, dokážeme, že platí pre $j + 1$. Podľa (2) je $a_{j+1} = a_j(1 + a_j/k_j)$, teda $a_j \mid a_{j+1}$, $a_j < a_{j+1}$, a preto $d'(a_{j+1}) \geqq d'(a_j) + 1$, lebo pribudol aspoň deliteľ a_j. Pretože predpokladáme $d'(a_j) \geqq j + 1$, je $d'(a_{j+1}) \geqq \geqq j + 2$. Tým je lema dokázaná.

Veta 2. *Pre počet $p(n)$ P-riešení rovnice (1) platí*

$$p(n) \geqq \tfrac{1}{2}(n-1)!\,, \quad n > 2\,.$$

Dôkaz. Veta platí pre $n = 3$ (s rovnosťou), lebo $p(3) = 1$ (riešenie $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$). Dokážeme, že ak veta platí pre nejaké $n \geqq 3$, platí aj pre $n + 1$. Z každého P-riešenia pre n dostane sa totiž podľa (2) aspoň toľko P-riešení pre $n + 1$, koľko je počet $d'(a_{n-1})$, lebo $x_{n+1} = a_n = a_{n-1}(1 + a_{n-1}/k_{n-1})$, takže $p(n + 1) \geqq p(n) \,.\, d'(a_{n-1}) \geqq \frac{1}{2}(n - 1)!\, n = \frac{1}{2}n!$ Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Podľa vety (1) nedostaneme všetky P-riešenia rovnice (1). Napr. riešenie (2, 4, 6, 12) rovnice (1) pre $n = 4$ pomocou vety 1 nedostaneme.

II. Q-RIEŠENIA

Neúplný počet Q-riešení rovnice (1) určí sa podľa vety 2 článku [4], ktorá hovorí, že rovnica

$$\sum_{i=1}^{l} b_i/\xi_i = 1\,, \quad l > 1 \tag{3}$$

má rekurentne určené riešenie

$$\xi_1 = 1 + b_1\,, \quad \xi_i = 1 + b_i\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{i-1}\,, \quad i = 2, 3, \ldots, l - 1\,, \tag{4}$$
$$\xi_l = b_l\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{l-1}\,.$$

Toto riešenie rovnice (3) poskytuje zrejme aj riešenie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovnice (1) v tom prípade, ak $b_1 + b_2 + \ldots + b_l = n$. Označiac $s_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_i$,

$i = 1, 2, \ldots, l$ je tým riešením

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{s_1} = \xi_1 ; \tag{5}$$

$$x_{s_1+1} = \ldots = x_{s_2} = \xi_2 ; \ \ldots ; \ x_{s_{l-1}+1} = x_{s_{l-1}+2} = \ldots = x_{s_l} = \xi_l ; \quad s_l = n ,$$

a zrejme platí $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$.

Veta 3. *Riešenia (5) rovnice (1) sú rôzne Q-riešenia pre všetky usporiadané partície $b_1 + b_2 + \ldots + b_l = n$, $1 \leqq l \leqq n$, čísla n okrem partícií $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ a $n = n$.*

Dôkaz. Partícia $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ dá podľa (4) a (5) tzv. extrémne riešenie rovnice (1) určené rekurentne takto: $x_1 = 2$, $x_i = 1 + x_1 x_2 \ldots x_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$, $x_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$. Pretože pre $n > 2$ platí pre toto riešenie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (pozri [1]), nie je Q-riešenie.

Riešenie pre partíciu $n = n$ dostaneme aj z partície $n = (n - 1) + 1$ (nie však z partície $n = 1 + (n - 1)$, o čom sa podľa (4) ľahko presvedčíme.

Ak vynecháme spomenuté partície $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ a $n = n$ potom pre každú inú partíciu (a) $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ platí $l \geqq 2$ a existuje aspoň jedno také i, že $b_i \geqq 2$. No zo (4) a (5) je zrejmé, že $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ zodpovedajúce tejto partícii sú jednoznačne určené a to isté platí o x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ďalej dvom rôznym partíciam (a) budú na základe (4) a (5) zodpovedať dve rôzne Q-riešenia rovnice (1)

Tým je veta dokázaná.

Veta 4. *Pre počet $q(n)$ rôznych Q-riešení rovnice (1) platí*

$$q(n) \geqq 2^{n-1} - 2 , \quad n > 2 .$$

Dôkaz. Podľa knihy [5] str. 26—29 je počet usporiadaných partícií čísla $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ $(1 \leqq l \leqq n)$ 2^{n-1}. Pretože sme vylúčili vo vete 3 dve partície, máme podľa tejto vety $2^{n-1} - 2$ Q-riešení rovnice (1). Rovnosť platí pri $n = 3$, avšak už pri $n = 4$ je $q(n) > 2^{n-1} - 2$ (napr. riešenie (2, 4, 8, 8) rovnice (1) nedostaneme pomocou partície $4 = 1 + 1 + 2$). Tým je veta dokázaná.

III.

Zhrnúc výsledky kap. I a II môžeme vysloviť vetu:

Veta 5. *Pre počet $m(n)$ všetkých riešení rovnice (1) splňajúcich podmienku $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ platí*

$$m(n) = p(n) + q(n) \geqq \tfrac{1}{2}(n - 1)! + 2^{n-1} - 2 . \tag{6}$$

Dôkaz. Každé primitívne riešenie rovnice (1) je buď P-, buď Q-riešenie. Pretože tieto množiny sú disjunktné, platí dokazovaná veta podľa vety (2) a (4).

Poznámka 1. Dolné ohraničenie podľa vety 5 sa k vyšším hodnotám n stáva stále voľnejším, dôvody sú zrejmé.

Poznámka 2. Nerovnosť (6) platí aj pre riešenia rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1/a_0$, lebo ak $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je primitívne riešenie rovnice (1) je $(a_0x_1, a_0x_2, \ldots, a_0x_n)$ primitívne riešenie rovnice $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1/a_0$.

Poznámka 3. Vzhľadom na vetu 1 článku [6] platí nerovnosť (6) aj pre rovnicu $\sum_{i=1}^{n} x_i = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, ak za jej primitívne riešenia považujeme tie, pre ktoré platí $x_1 \lneqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ a $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Literatúra

[1] *Erdös P.:* Ak $1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n = a/b$ egyenlet egész számú megoldásairól. Mat. Lapok *I* (1950), 192—210.

[2] *Bartoš P.:* Poznámka o počte riešení rovnice $1/x + 1/y = a/b$. Čas. pro pěst. mat. *95* (1970), 411—415.

[3] *Bartoš P.:* O prolongabilných riešeniách optickej rovnice. Čas. pro pěst. mat. *95* (1970), 278—289.

[4] *Bartoš P.:* O niektorých diofantických rovniciach. Mat. časop. *19* (1969), 234—235.

[5] *Hall M.:* Комбинаторный анализ, Москва 1963.

[6] *Bartoš P.:* O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 367—370.

Adresa autora: 801 00 Bratislava 1, Sibírska 9.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZUR LÖSUNGENANZAHL DER OPTISCHEN GLEICHUNG

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

In der Abhandlung wird gezeigt, dass für die Anzahl $m(n)$ der Lösungen der diophantischen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} 1/x_i = 1\,, \quad n > 2\,, \quad x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n\,,$$

$$m(n) \geqq \tfrac{1}{2}(n-1)! + 2^{n-1} - 2$$

gilt.