Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

RŮZNÉ

# FLOQUETOVA TEORIE PRO ZOBECNĚNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Došlo dne 17. července 1972)

Nechť $\mathbf{A}(t)$ je čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž prvky jsou zleva spojité funkce proměnné $t$ definované pro $t \in (-\infty, +\infty)$. Nechť platí

$$\mathbf{A}(t + \omega) - \mathbf{A}(t) = \mathbf{C}, \tag{1}$$

kde $\omega > 0$ a $\mathbf{C}$ je konstantní matice typu $n \times n$. Buďte dále prvky matice $\mathbf{A}(t)$ takové, že jejich variace v intervalu $[a, a + \omega]$ je konečná, $a$ je libovolné reálné číslo. (Odtud a z (1) ihned plyne, že variace každého prvku matice $\mathbf{A}(t)$ v libovolném intervalu délky $\omega$ je konečná.)

Vyšetřujme homogenní systém zobecněných lineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = D[\mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}] \tag{H}$$

(viz [1]). Vektorová funkce $\mathbf{x}(\tau)$ je řešením systému (H) v intervalu $(a, b)$, když pro každé $\tau_1, \tau_2 \in (a, b)$, $\tau_1 < \tau_2$ platí rovnost

$$\mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}[\mathbf{A}(t)]\, \mathbf{x}(t),$$

kde integrál v této rovnosti je Perron-Stieltjesův (nebo ekvivalentně Kurzweilův). Takto definované systémy (H) jsou předmětem vyšetřování v [1]; v [1] jsou uvedeny věty o existenci a jednoznačnosti řešení (H) pro rostoucí hodnoty nezávisle proměnné, zaveden pojem fundamentální matice a jsou vyšetřeny její základní vlastnosti.

Buď dáno $a \in (-\infty, \infty)$ libovolně. Matici $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ typu $n \times n$ definovanou pro $\xi \geqq a$ nazveme fundamentální maticí systému (H) jestliže je det $\boldsymbol{\Phi}(a) \neq 0$ a jsou-li sloupce matice $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ řešení systému (H). Fundamentální matice $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ splňuje rovnost

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(a) + \int_a^{\xi} \mathrm{d}[\mathbf{A}(t)]\, \boldsymbol{\Phi}(t) \quad \text{pro} \quad \xi \geqq a. \tag{2}$$

Nechť $\Phi(\xi)$ je fundamentální matice systému (H), $\xi \geqq a$. Položme $\Psi(\xi) = \Phi(\xi + \omega)$. S využitím (1) lze snadno ukázat, že matice $\Psi(\xi)$ splňuje rovnost (2) pro všechna $\xi \geqq a$. Není však zaručeno, že také $\det \Psi(a) = \det \Phi(a + \omega) \neq 0$. Tím také není zaručeno, že by matice $\Psi(\xi)$ byla fundamentální maticí systému (H). Výpočtem z (2) lze za předpokladu (1) jednoduše ukázat, že je

$$\Phi(\xi + \omega) = \Phi(\xi)\, \Phi^{-1}(a)\, \Phi(a + \omega)\,, \quad \xi \geqq a\,. \tag{3}$$

Podle věty 4,2 z [1] je $\Phi(\xi)$ nesingulární matice (tj. $\det \Phi(\xi) \neq 0$) pro každé $\xi \in [a, a + \omega]$ právě když je

$$\det(\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t)) \neq 0\,, \quad \forall t \in [a, a + \omega]\,, \tag{4}$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice typu $n \times n$ a $\Delta^+ \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+) - \mathbf{A}(t) = \lim_{\tau \to t+} \mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}(t)$.

Předpoklad (4) zaručí také existenci a jednoznačnost řešení systému (H) pro klesající hodnoty nezávisle proměnné (viz odst. 4 v [1]), a tedy vzhledem k (1) neomezenou pokračovatelnost řešení systému (H) na celý interval $(-\infty, +\infty)$. Tímto je umožněno definovat pro všechna $\xi \in (-\infty, +\infty)$ fundamentální matici $\Phi(\xi)$ systému (H). Tato bude splňovat rovnost (2) pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$ (viz opět odst. 4 v [1]), a tedy také vztah (3) pro každé $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

Předpokládejme tedy, že platí (4). Potom je podle výše uvedeného matice $\Phi(a + \omega)$ regulární, a tedy je regulární také matice $\Phi^{-1}(a)\, \Phi(a + \omega)$. Dle (3) je tedy mimo jiné $\Psi(\xi) = \Phi(\xi + \omega)$ fundamentální maticí systému (H). Dále odtud a ze známých úvah prováděných v případě klasických soustav lineárních diferenciálních rovnic se spojitou maticí systému (viz [2]) plyne existence matice $\mathbf{R}$ (tato však není určena jednoznačně) tak, že $\Phi^{-1}(a)\, \Phi(a + \omega) = e^{\omega \mathbf{R}}$; podle (3) tedy je $\Phi(\xi + \omega) = \Phi(\xi)\, e^{\omega \mathbf{R}}$ pro všechna $\xi \in (-\infty, \infty)$. Stejným postupem jako v [2] se nyní už dá ukázat, že platí

$$\Phi(\xi) = \mathbf{P}(\xi)\, e^{\xi \mathbf{R}}\,, \tag{5}$$

přičemž $\mathbf{P}(\xi)$ je regulární matice pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$, a platí $\mathbf{P}(\xi + \omega) = \mathbf{P}(\xi)$ pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$. Platí tedy

**Věta.** *Buď $\omega > 0$, $a \in (-\infty, +\infty)$. Nechť $\mathbf{A}(t)$ je matice typu $n \times n$ definovaná pro $t \in (-\infty, +\infty)$ se zleva spojitými prvky s konečnou variací v $[a, a + \omega]$ taková, že platí* (1) *a* (4). *Potom ke každé fundamentální matici $\Phi(\xi)$ systému* (H) *existuje matice $\mathbf{P}(\xi)$ definovaná pro $\xi \in (-\infty, \infty)$, regulární pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$, periodická s periodou $\omega$ a konstantní matice $\mathbf{R}$ typu $n \times n$ tak, že platí* (5).

Poznámka. Tato věta je přímé zobecnění základní věty Floquetovy teorie známé v případě klasických soustav lineárních diferenciálních rovnic se spojitou maticí soustavy (viz [2]).

## *Literatura*

[1] *Schwabik, Š.:* Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme, Čas. pěst. mat., 96 (1971), 183—211.
[2] *Coddington, E. A., Levinson, N.:* Theory of Ordinary Differential Equations, Mc-Graw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

*Adresa autora:* 115 67 Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV v Praze).