

Jozef Oboňa; Nikolaj Podtjagin

Eště o niektorých ďalších vlastnostiach kriviek triedy P a PP

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 4, 357--368

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117817>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## EŠTE O NIEKTORÝCH ĎALŠÍCH VLASTNOSTIACH KRIVIEK TRIEDY P A PP

JOZEF OBOŇA, NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 20. júna 1970, prepracovane dňa 19. augusta 1971)

V tejto práci sa odvozujú rovnice algebraických kriviek triedy P (definovaných v práci [1]) v ortogonálnych a polárnych súradniciach. Ďalej sa uvádzajú niektoré významné vlastnosti dotyčníc ku krivkám triedy PP (definovaných v práci [2]), ktoré sa odvozujú z rovníc dotyčníc ku týmto krivkám v ich niektorých významných bodoch.

V práci [1] krivky triedy P boli definované parametrickými rovnicami

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a \cos q\omega + b \cos (p + q) \omega, \\ y &= a \sin q\omega + b \sin (p + q) \omega, \end{aligned}$$

kde konštanty  $p, q$  sú nesúdeliteľné čísla, ani jedna z konstant  $a, b, p, q$  nie je rovná nule, pričom  $a, b, q$  sú čísla kladné. Parameter  $\omega$  sa mení v intervale  $[0, 2\pi)$ .

V menovanej práci bolo ďalej dokázané, že rovnice (1) pre  $a = b, p + q > 0$  určujú epicykloidy a hypocykloidy (presnejšie triedenie pozri [1]), pre  $a = b, p + 2q \neq 0$  ružice a pre  $a = b, p + 2q = 0$  úsečku na osi  $OX$ , ktorá sa nepovažuje za krivku triedy P.

### KRIVKY TRIEDY P V ORTOGONÁLNYCH SÚRADNICIACH

Rovnice kriviek triedy P sme ľahko stanovili parametrickými rovnicami (1). Aby sme získali ich rovnice v ortogonálnych súradniciach, musíme z rovníc (1) vylúčiť parameter  $\omega$ . Avšak priama eliminácia parametra nie je vždy možná, pretože tento postup vedie často k riešeniu algebraických rovníc vyššieho stupňa. Ukážeme jeden spôsob riešenia tejto úlohy, ktorý teoretický vždy vedie k želanému výsledku, hoci prakticky vyžaduje elementárne, ale veľmi zdĺhavé výpočty.

Položme

$$(2) \quad \begin{aligned} x + iy &= \xi, \\ x - iy &= \eta, \end{aligned}$$

kde  $i = \sqrt{-1}$ . Z rovníc (1) po úprave dostávame

$$\begin{aligned}x + iy &= a e^{iq\omega} + b e^{i(p+q)\omega}, \\x - iy &= a e^{-iq\omega} + b e^{-i(p+q)\omega},\end{aligned}$$

odkiaľ po dosadení rovníc (2) a po úprave bude

$$\begin{aligned}\xi &= a t^q + b \cdot t^{p+q}, \\ \eta &= a t^{-q} + b \cdot t^{-(p+q)},\end{aligned}$$

kde  $t = e^{i\omega}$ .

Zapíšme posledné dve rovnice v tvare

$$(3) \quad \begin{aligned}\xi &= t^q (a + b \cdot t^p), \\ \eta &= t^{-q}(a + b \cdot t^{-p}).\end{aligned}$$

Po vzájomnom prenasobení dostávame

$$\xi \cdot \eta = (a + b \cdot t^p) \cdot (a + b \cdot t^{-p}),$$

alebo

$$ab t^{2p} + (a^2 + b^2 - \xi\eta) t^p + ab = 0,$$

odkiaľ

$$(4) \quad t^p = \frac{\xi \cdot \eta - a^2 - b^2 \pm \sqrt{((\xi \cdot \eta - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2)}}{2ab}.$$

Vidíme, že  $t^p$  je funkcia premenných  $\xi, \eta$  a nezávisí od parametru  $\omega$ .

Položme teda

$$(5) \quad t^p = w$$

a rovnice (3) nadobudnú tvar

$$(6) \quad \begin{aligned}\xi^p &= w^q(a + bw)^p, \\ \eta^p w^{p+q} &= (aw + b)^p.\end{aligned}$$

Tieto rovnice predstavujú krivky triedy P ešte v dvoch rôznych tvaroch: v súradniciach  $\xi$  a  $\eta$  a odtiaľ teda aj v reálnych súradniciach  $x$  a  $y$ . Pretože krivky triedy P sú reálne, rovnice (6) po dosadení za  $\xi$  a  $\eta$  zo vzťahov (2), nemôžu obsahovať komplexné veličiny.

Ak vydělíme prvú rovnicu rovníc (6) druhou, dostaneme ešte jeden tvar rovnice kriviek triedy P v pravouhlých súradniciach

$$(7) \quad \xi^p = \eta^p \cdot w^{p+2q} \left( \frac{a + bw}{aw + b} \right)^p.$$

Táto rovnica má veľmi jednoduchý tvar pre  $a = b$ , teda

$$\xi^p = \eta^p \cdot w^{p+2q}.$$

Ako príklad uvažujeme prípad, keď v rovniciach (1) položíme  $p = 3$ ,  $q = 1$ . Krivka triedy P je potom krivkou 8-stupňa. Prvá z rovníc (6) nadobudne tvar

$$(8) \quad \xi^3 = w(a + bw)^3.$$

Ak pre zjednodušenie výpočtov položíme

$$(9) \quad \begin{aligned} u &= \xi \cdot \eta - a^2 - b^2, \\ v &= \pm \sqrt{(4a^2b^2 - u^2)}, \end{aligned}$$

potom na základe vzťahov (4) a (5) máme

$$(10) \quad w = \frac{u + v}{2ab}.$$

Ak túto hodnotu funkcie  $w$  dosadíme do rovnice (8), potom po jednoduchých úpravách dostávame

$$\begin{aligned} 2a^4b\xi^3 - u^4 - 3a^2u^3 - a^2(3a^2 - 4b^2)u^2 - a^4(a^2 - 9b^2)u + 2a^4b^2(3a^2 - b^2) &= \\ = [u^3 + 3a^2u^2 + a^2(3a^2 - 2b^2)u + a^4(a^2 - 3b^2)]v. \end{aligned}$$

Po dosadení za  $v$ , umocnení tejto rovnice na druhú a elementárnych, ale dosť dlhých výpočtoch dostaneme rovnicu tvaru

$$\begin{aligned} a^4b\xi^6 - [u^4 + 3a^2u^3 + a^2(3a^2 - 4b^2)u^2 + a^4(a^2 - 9b^2)u - 2a^4b^2(3a^2 - b^2)]\xi^3 + \\ + a^4b(u + a^2 + b^2)^3 = 0 \end{aligned}$$

a po dosadení za  $u$  z rovníc (9) a potom za  $\xi$  a  $\eta$  z rovníc (2), zdĺhavým výpočtom dostaneme konečný tvar krivky v ortogonálnych súradniciach

$$(11) \quad \begin{aligned} (x^2 + y^2)^4 - (a^2 + 4b^2)(x^2 + y^2)^3 - b^2(a^2 - 6b^2)(x^2 + y^2)^2 - \\ - 2a^4bx(x^2 - 3y^2) + b^2(5a^2b^2 - a^4 - 4b^4)(x^2 + y^2) - \\ - b^2(a^2 - b^2)^3 = 0. \end{aligned}$$

Príklad nám potvrdil, že na vyjadrenie kriviek triedy P v ortogonálnych súradniciach treba vykonať veľké množstvo elementárnych operácií.

## KRIVKY TRIEDY P V POLÁRNYCH SÚRADNICIACH

Vyjadrenie kriviek triedy P v polárnych súradniciach budeme hľadať cez diferenciálnu rovnicu týchto kriviek.

Vychádzajme zo vzťahov pre polárne súradnice  $\varrho$ ,  $\varphi$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

a potom

$$(12) \quad d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

za predpokladu, že súčasne  $x$  a  $y$  nenadobúdajú nulové hodnoty.

Z rovníc (1) dostávame

$$(13) \quad \begin{aligned} \varrho^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos p\omega, \\ x dy - y dx &= [a^2 q + b^2(p + q) + ab(p + 2q) \cos p\omega] d\omega. \end{aligned}$$

Z rovnice (12) potom dostávame

$$d\varphi = \frac{1}{\varrho^2} [a^2 q + b^2(p + q) + ab(p + 2q) \cos p\omega] d\omega.$$

Derivovaním rovnice (13) budeme mať

$$d\varrho = \frac{-abp \sin p\omega}{\varrho} d\omega$$

a z posledných dvoch rovníc teda máme

$$(14) \quad \frac{d\varrho}{d\varphi} = - \frac{abp \sin p\omega}{a^2 q + b^2(p + q) + ab(p + 2q) \cos p\omega}.$$

Z rovnice (13) môžeme dostať

$$\cos p\omega = \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

a potom teda

$$\sin p\omega = \frac{4a^2 b^2 - (\varrho^2 - a^2 - b^2)^2}{2ab}.$$

Diferenciálnu rovnicu (14) môžeme teda napísať vo tvare

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = - \frac{p\varrho \sqrt{(4a^2 b^2 - (\varrho^2 - a^2 - b^2)^2)}}{2a^2 q + 2b^2(p + q) + (p + 2q)(\varrho^2 - a^2 - b^2)},$$

alebo vo tvare

$$(15) \quad \frac{(p + 2q) \varrho^2 - p(a^2 - b^2)}{\sqrt{[\varrho^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 - \varrho^2]}} \frac{d\varrho}{\varrho} = -p d\varphi.$$

Táto rovnica je teda aj diferenciálnou rovnicou algebraických kriviek triedy P.

Pre  $a = b$  (teda pre  $p + 2q \neq 0$ , pozri [1]), tj. pre ružice, diferenciálna rovnica (15) má veľmi jednoduchý tvar

$$(16) \quad \frac{p + 2q}{\sqrt{(4a^2 - \varrho^2)}} d\varrho = -p d\varphi$$

a teda táto diferenciálna rovnica je diferenciálnou rovnicou všetkých ružíc.

Integrál, vyhovujúci diferenciálnej rovnici (16) a splňujúci počiatočnú podmienku (pre  $\varphi = 0$  musí byť  $\varrho = 2a$ ) je

$$(17) \quad \varrho = 2a \cos \frac{p}{p + 2q} \varphi$$

a táto rovnica súčasne definuje aj rovnice ružíc v polárnych súradniciach.

V prípade, keď  $a \neq b$  (epicykloidy a hypocykloidy) všeobecným integrálom rovnice (15) je rovnica

$$(18) \quad \int \frac{(p + 2q) \varrho^2 - p(a^2 - b^2)}{\sqrt{[\varrho^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 - \varrho^2]}} \frac{d\varrho}{\varrho} = -p\varphi + C.$$

Označme integrál na ľavej strane tejto rovnice ako  $I$  a položíme  $z = \varrho^2 - a^2 - b^2$  a potom budeme mať

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(p + 2q)(a^2 + b^2 + z) - p(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + z) \sqrt{(4a^2b^2 - z^2)}} dz,$$

alebo po čiastočnej integrácii

$$(19) \quad I = -\frac{p + 2q}{2} \arccos \frac{z}{2ab} - \frac{p(a^2 - b^2)}{2} I_1,$$

kde

$$I_1 = \int \frac{dz}{(a^2 + b^2 + z) \sqrt{(4a^2b^2 - z^2)}}.$$

Tento integrál vypočítame opäť substitúciou  $1/v = a^2 + b^2 + z$  a po dosazení, výpočte integrálu dostávame v pôvodných premenných

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2) \varrho^2}{2ab\varrho^2}.$$

Pre integrál  $I$  na základe vzťahu (19) potom budeme mať výraz

$$I = -\frac{p+2q}{2} \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} - \frac{p}{2} \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2}.$$

Všeobecné riešenie (18) diferenciálnej rovnice (15) môžeme teda napísať vo tvare

$$(p+2q) \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} + p \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2} = 2p\varphi + C.$$

Lubovoľnú konštantu  $C$  určíme z počiatočnej podmienky: pre  $\varphi = 0$  musí byť  $\varrho = a + b$ . Ak dosadíme tieto hodnoty  $\varrho$  a  $\varphi$  do poslednej rovnice, ľahko vypočítame  $C = p\pi$ .

Rovnica krivky triedy P v polárnych súradniciach nadobúda konečný tvar

$$(20) \quad (p+2q) \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} + p \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2} = \\ = p(2\varphi + \pi).$$

Poznámame, že táto rovnica platí aj pre  $a = b$ . Skutočne, v tom prípade nadobúda tvar

$$(p+2q) \arccos \frac{\varrho^2 - 2a^2}{2a^2} = 2p\varphi,$$

odkiaľ dostávame

$$\varrho^2 = 2a^2 \left( 1 + \cos \frac{2p}{p+2q} \varphi \right),$$

a tedy aj

$$\varrho = 2a \cos \frac{p}{p+2q} \varphi,$$

čo sa zhoduje so vzťahom (17) pre ružice.

Podobne ako v práci [3] môžeme skúmať vlastnosti dotyčníc ku krivkám triedy P, vyjadrených v ortogonálnych súradniciach, kedy je vhodné použiť tvaru (10), pre funkciu  $w$ . Analogicky je možné skúmať vlastnosti dotyčníc aj v polárnych súradniciach.

Niektoré významné vlastnosti dotyčníc kriviek triedy PP.

V práci [2] krivky triedy PP boli definované rovnicami

$$(21) \quad x = a \cos qq'\omega + b \cos (p+q)q'\omega + c \cos (p'q + pq' + qq')\omega \\ y = a \sin qq'\omega + b \sin (p+q)q'\omega + c \sin (p'q + pq' + qq')\omega,$$

kde  $\omega$  je parameter, meniaci sa v intervale  $[0, 2\pi/\bar{q}]$ ;  $p, q, p', q'$  sú nesúdeliteľné čísla, pričom  $q, q'$  sú čísla kladné;  $\bar{q}$  je najväčší spoločný deliteľ čísel  $q$  a  $q'$ ;  $a, b, c$ , sú ľubovoľné kladné čísla.

V spomenutej práci bolo ďalej dokázané, že pre

$$aqq' - b(p + q)q' + c(p'q + pq' + qq') = 0$$

rovnice (21) určujú prostú epiepicykloidu, pre

$$aqq' + b(p + q)q' - c(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú epihypocykloidu, pre

$$aqq' - b(p + q)q' - c(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú hypoepicykloidu a pre

$$aqq' + b(p + q)q' + c(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú hypohypocykloidu.

V práci [2] bolo tiež dokázané, že pre  $p = \bar{p} \cdot p_1$ ,  $p' = \bar{p} \cdot p_2$ ,  $q = \bar{q} \cdot q_1$ ,  $q' = \bar{q} \cdot q_2$ , kde  $\bar{p}$  je najväčší spoločný deliteľ čísel  $p$  a  $p'$ , potom:

1. Na každej krivke triedy PP existuje práve  $p$  bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť  $\varrho = a + b + c$ , určených vzťahom

$$(22) \quad \omega = \frac{2k\pi}{\bar{p} \cdot \bar{q}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \bar{p} - 1.$$

2. Pre  $|p_2| \cdot q_1$  párne na každej krivke triedy PP existuje  $\bar{p}$  rôznych bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť  $\varrho = |a - b - c| > 0$ , určených vzťahom

$$(23) \quad \omega = \frac{(2k + 1)\pi}{\bar{p}\bar{q}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \bar{p} - 1.$$

3. Pre  $|p_1|, |p_2|, q_1, q_2$  nepárne na každej krivke triedy PP existuje  $p$  rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je  $\varrho = |a - b + c| > 0$  a ktoré sú definované vzťahom (23).

4. Pre  $|p_1| \cdot q_2$  párne na každej krivke triedy PP existuje  $\bar{p}$  rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je  $\varrho = |a + b - c| > 0$  a ktoré sú opäť určené vzťahom (23).

Z rovníc (21) vyplýva, že všetky krivky triedy PP sú súmerné vzhľadom na os  $OX$ . Ak  $\bar{p}$  je párne číslo, tieto krivky sú súmerné aj vzhľadom na os  $OY$ .



2. Pre smernicu dotyčnice ku krivke triedy PP v jej ľubovoľnom bode  $(x, y)$  máme

$$(24) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{aqq' \cos qq'\omega + b(p+q)q' \cos(p+q)q'\omega + c(p'q + pq' + qq') \cos(p'q + pq' + qq')\omega}{aqq' \sin qq'\omega + b(p+q)q' \sin(p+q)q'\omega + c(p'q + pq' + qq') \cos(p'q + pq' + qq')\omega}.$$

Smernica dotyčnice v bode  $\omega = 0$  môže byť konečná len pre

$$aqq' + b(p+q)q' + c(p'q + pq' + qq') = 0,$$

z toho vyplýva, že dotyčnica ku každej krivke triedy PP v jej počiatkovom bode  $\omega = 0$ , s výnimkou prostých hypohypocykloid, je vždy kolmá na os  $OX$ .

Počiatkový bod  $\omega = 0$  prostej hypohypocykloidy je singulárny bod zvratu, v ktorom dotyčnicou je os  $OX$ . Ak  $\bar{p}$  je číslo párne, aj dotyčnica v bode súmernom s bodom  $\omega = 0$  vzhľadom na os  $OY$ , je tiež os  $OX$ .

1° Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť  $\varrho = a + b + c$ , sú určené hodnotami (22) parametra  $\omega$ , pre ktoré máme

$$\cos p'q\omega = \cos pq'\omega = 1.$$

Vzťah (24) v nich nadobúda tvar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[aqq' + b(p+q)q' + c(p'q + pq' + qq')] \cos qq'\omega}{[aqq' + b(p+q)q' + c(p'q + pq' + qq')] \sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté hypohypocykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy PP v uvedených bodoch platí

$$(25) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos q q' \omega}{\sin q q' \omega}.$$

Pre rovnice dotyčníc v týchto bodoch potom máme

$$(26) \quad X \cos q q' \omega + Y \sin q q' \omega = x \cos q q' \omega + y \sin q q' \omega,$$

kde  $x, y$  sú súradnice dotykového bodu krivky PP, vzdialeného od počiatku  $O$  na  $\varrho = a + b + c$ ;  $X, Y$  sú premenné súradnice bodov dotyčnice. Ak dosadíme hodnoty (22) parametra  $\omega$ , potom pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, dostaneme rovnice dotyčníc

$$(27) \quad X \cos qq_2 \frac{2k\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{2k\pi}{\bar{p}} = a + b + c, \quad k = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1.$$

Pre  $\bar{p}$  nepárne ani jedna z týchto dotyčníc, okrem dotyčnice v počiatkovom bode  $\omega = 0$ , nemôže byť kolmá ani na jednu zo súradnicových osí.

Pretože čísla  $qq_2, \bar{q}$  nemajú spoločných deliteľov, pre  $\bar{p}$  párne ( $\bar{p} = 2k_1$ ) dotyčnica v uvažovaných bodoch je kolmá na os  $OX$  len v tom prípade, keď číslo  $t = k/k_1$  je celé. Pretože  $k \leq \bar{p} - 1$ , musí byť  $t \leq (2k_1 - 1)/k_1 = 2 - 1/k_1 < 2$  a teda  $t$  môže nadobúdať len dve hodnoty 0 a 1. To znamená, že pre  $\bar{p}$  párne každá krivka triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, má len dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = a + b + c$ , v ktorých dotyčnice sú kolmé na os  $OX$ . Tieto dotyčnice sú dané rovnicami (25). Pretože číslo  $qq_2$  je nepárne, sú teda dané rovnicami  $X = \pm(a + b + c)$ .

Ak aj  $\bar{p}/2$  je číslo párne ( $\bar{p} = 4k_2$ ), dotyčnica v bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy má  $\varrho = a + b + c$  je kolmá na os  $OY$  vtedy a len vtedy, keď  $t = k/k_2$  je celé nepárne číslo. Pretože  $k \leq \bar{p} - 1$  musíme mať  $t \leq (4k_2 - 1)/k_2 = 4 - 1/k_2 < 4$  a teda  $t$  môže mať len hodnoty 1 a 3. V prípade, keď  $\bar{p}/2$  je číslo párne, každá krivka triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = a + b + c$ , v ktorých dotyčnice sú kolmé na os  $OY$ . Sú dané rovnicami (25) pre  $k = k_2$  a  $k = 3k_2$ , teda  $Y = \pm(a + b + c)$ .

2°. V bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = |a - b - c|$ , tj. pre  $|p_2| \cdot q_1$  párne, určených vzťahom (23) máme

$$\cos pq'\omega = -1, \quad \cos p'q\omega = 1.$$

Vzťah (24) pre tieto body nadobúda tvar

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{[aqq' - b(p+q)q' - c(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[aqq' - b(p+q)q' - c(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté hypocykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy PP pre uvedené body platí vzťah (25).

Pre dotyčnice v týchto bodoch potom platí rovnica (26). Ak do nej dosadíme hodnoty (23) parametra  $\omega$  pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = |a - b - c|$  u všetkých kriviek triedy PP, s výnimkou prostých hypocykloid, dostaneme konečne rovnice

$$(28) \quad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a - b - c, \\ k = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1.$$

3°. Pre  $|p_1|, |p_2|, q_1, q_2$  nepárne, máme v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = |a - b - c|$ , určených vzťahom (21)

$$\cos pq'\omega = -1, \quad \cos p'q\omega = -1.$$

Vzťah (24) pre tieto body nadobúda tvar

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{[aqq' - b(p+q)q' + c(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[aqq' - b(p+q)q' + c(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté epipepicykloidy. Pre ostatné krivky triedy PP v uvedených bodoch znovu platí vzťah (25).

Pre rovnice dotyčníc v týchto bodoch platí zase rovnica (25) a po dosadení do nej hodnôt (23) pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = |a - b - c| > 0$ , pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých epipepicykloid dostaneme teraz rovnice

$$(29) \quad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a - b + c,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \bar{p} - 1.$$

4°. Pre  $|p_1| \cdot q_2$  párne v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = |a + b - c|$ , určených vzťahom (23), máme

$$\cos pq'\omega = 1, \quad \cos p'q\omega = -1.$$

Vzťah (24) potom nadobúda tvar

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{[aqq' + b(p+q)q' - c(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[aqq' + b(p+q)q' - c(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}.$$

Nemá zmysel pre prosté epihypocykloidy. Pre ostatné krivky triedy PP, pre uvedené body platia znovu vzťahy (25) a (26). Ak dosadíme do rovnice (26) hodnoty (23) parametra  $\omega$ , pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na  $\varrho = |a + b - c| > 0$ , pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých epihypocykloid, dostaneme rovnice

$$(30) \quad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a + b - c,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \bar{p} - 1.$$

Ak porovnáme rovnice (28), (29) a (30) vidíme, že sa líšia len ich pravými stranami. Môžeme ich teda zapísať v spoločnom tvare

$$(31) \quad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = m, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \bar{p} - 1.$$

kde u kriviek triedy PP v prípade 2°  $m = a - b - c$ , v prípade 3°  $m = a - b + c$ , v prípade 4°  $m = a + b - c$ .

Rovnice (31) platia pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých hypoepepicykloid v prípade 2°, prostých epipepicykloid v prípade 3° a prostých epihypocykloid v prípade 4°.

Pre  $a - b - c = 0$  v prípade 3°, pre  $a - b + c = 0$  v prípade 3° a pre  $a + b - c = 0$  v prípade 4° máme tedy  $m = 0$ . Krivka prechádza počiatkom súradni-

covej sústavy. Dotyčnice v tomto prípade sú určené pre všetky uvedené prípady jedi-  
ným tvarom rovníc

$$X \cos qq_2 \frac{(2k + 1) \pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k + 1) \pi}{\bar{p}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \bar{p} - 1.$$

Pri vyšetrowaní podmienok, pri ktorých sú dotyčnice kolmé na súradnicové osi  
v prípadoch  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  a  $4^\circ$  vychádzame zo spoločného tvaru rovníc dotyčníc (31) a postu-  
pujúc analogicky ako v prípade  $1^\circ$  avšak presne tak, ako to bolo uvedené v práci [3]  
pre krivky triedy P, môžeme dokázať, že:

1. Pre  $\bar{p}$  párne dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy  
na  $\varrho = m$  nemôžu byť kolmé na os  $OY$ . Každá krivka triedy PP, s výnimkou hore  
vymenovaných prípadov, má len v jednom z uvedených bodov dotyčnicu kolmú na  
os  $OX$ , a to pre  $qq_2$  párne jej rovnica je

$$(32) \quad X = m$$

a pre  $qq_2$  nepárne

$$(33) \quad X = -m.$$

2. Pre  $\bar{p}$  párne dotyčnica v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy  
na  $\varrho = m$  nemôže byť kolmá na os  $OX$ . Každá krivka triedy PP, s výnimkou hore  
vymenovaných prípadov, má dva a len dva z uvedených bodov, v ktorých dotyčnice  
sú kolmé na os  $OY$ , ak  $\bar{p}$  je párne a  $\frac{1}{2}\bar{p}$  nepárne číslo.

Ich rovnice sú  $Y = \pm m$ .

#### Literatúra

- [1] Podtjagin N.: O jednej triede racionálnych kriviek, Časop. pěst. mat., 90 (1965), 181—190.  
[2] Podtjagin N.: Ešte o jednej triede racionálnych kriviek, Čas. pěst. mat., 92 (1967), 294—312.  
[3] Podtjagin N., Oboňa J.: O niektorých ďalších vlastnostiach kriviek triedy P, Časop. pěst.  
mat., 96 (1971), 398—405.

Adresa autora: 884 20 Bratislava, Gottwaldovo nám. 2 (Stavebná fakulta SVŠT).

#### Résumé

### ENCORE SUR QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES COURBES DES CLASSES P ET PP

NIKOLAJ PODTJAGIN, JOZEF OBOŇA, Bratislava

Les courbes algébriques en question ont été définies dans l'article [1] par les équations (1) où  $\omega$  est un paramètre réel,  $\omega \in [0, 2\pi)$ , a et b sont deux constantes positives arbitraires, et p, q deux nombres entiers sans diviseur commun, q étant de plus positif.

Dans le présent article, nous démontrons que les équations paramétriques (1) des courbes de la classe P deviennent les équations (6) en coordonnées  $\xi, \eta$  par la substitution (3), tandis que la substitution (2) les transforme en équations en coordonnées rectangulaires. Nous trouvons les équations (20) de ces courbes en coordonnées polaires; (15) est l'équation différentielle des courbes de la classe P.

Nous étudions aussi des propriétés nouvelles des courbes de la classe PP, dont la définition a été donnée dans [2] au moyen des équations (21) où  $\omega$  est un paramètre réel,  $\omega \in [0, 2\pi/\bar{q}]$ ,  $p, q$  et  $p', q'$  sont deux paires de nombres entiers sans diviseurs communs,  $q$  et  $q'$  étant positifs;  $\bar{q}$  est le PGCD des nombres  $q$  et  $q'$ ;  $a, b, c$  sont des constantes positives arbitraires.

Nous trouvons les équations des tangentes aux points situés à une distance de  $a + b + c$  de l'origine

$$X \cos qq_2(2k\pi)/\bar{p} + Y \sin qq_2(2k\pi)/\bar{p} = a + b + c, \quad k = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1;$$

ici,  $\bar{p}$  est le PGCD des nombres  $|p|$  et  $p'$ ;  $q_2$  étant défini par l'égalité  $q' = \bar{q}q_2$ . Ces équations sont valides pour toutes les courbes de la classe PP à l'exception des hypohypocloïdes. Il en résulte que dans le cas où  $\bar{p}$  est impair, ces tangentes (à l'exception de la tangente en  $\omega = 0$ ) ne peuvent pas être perpendiculaires aux axes des coordonnées. Si  $\bar{p}$  est pair, les courbes de la classe PP – excepté les hypohypocloïdes simples – ont chacune deux points distants de  $a + b + c$  de l'origine, avec des tangentes perpendiculaires à l'axe  $OX$ . Mais si  $\bar{p}/2$  est pair aussi, la courbe a de plus deux points situés à une distance de  $a + b + c$  de l'origine et où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe  $OY$ .

Nous trouvons les équations des tangents en des points distants de  $m = a - b - c$ , soit de  $m = a - b + c$ , soit encore de  $m = a + b - c$  de l'origine

$$X \cos qq_2(2k + 1)\pi/\bar{p} + Y \sin qq_2(2k + 1)\pi/\bar{p} = m, \quad k = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1.$$

Ces équations sont valides pour toutes les courbes de la classe PP, à l'exception des hypoépicycloïdes simples pour  $m = a - b - c$ , des épiépicycloïdes simples pour  $m = a - b + c$  et des épihypocycloïdes simples pour  $m = a + b - c$ . On en voit que dans le cas où  $\bar{p}$  est impair, les tangentes en question ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe  $OY$ . Cependant, la tangente en un de ces points est perpendiculaire à l'axe  $OX$ .

Dans le cas où  $\bar{p}$  est pair, les tangentes en ces points ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe  $OX$ . Mais si  $\bar{p}$  est pair et  $\bar{p}/2$  impair, la courbe de la classe PP a deux points distants de  $m$  de l'origine et où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe  $OY$ .