Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

LJAPUNOVOVA METODA V TEORII OMEZENOSTI LINEÁRNÍCH REGULOVANÝCH TOKŮ

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Došlo dne 16. února 1972)

1. Označení. Symbolem P označíme netriviální reálný lineární normovaný prostor, jehož nulový prvek je o a norma $\| \ \|$, R neprázdnou podmnožinu množiny reálných čísel, R^+ množinu kladných čísel, $m = \{(o, \vartheta) \in P \times R : \vartheta \in R\}$, U neprázdnou množinu, a t tok na P nad R s domain $t = \{(\vartheta, x, \alpha) \in R \times P \times R : \vartheta \geqq \alpha\} = D$, tj. zobrazení $t : D \to P$, jež má následující vlastnosti (přitom definujeme ${}_\vartheta t_\alpha x = t(\vartheta, x, \alpha)$):

(i) $(\alpha, x, \alpha) \in D \Rightarrow {}_\alpha t_\alpha x = x$,

(ii) ${}_\gamma t_\beta \circ {}_\beta t_\alpha x = {}_\gamma t_\alpha x$ pro všechna $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$ v R a každé $x \in P$.

Symbolem $\{t^u : u \in U\}$ označíme lineární regulovaný tok na P nad $R \times U$ (viz práce [1]), jenž je definován tímto způsobem:

(i) Pro každé $u \in U$ je t^u tok na P nad R a jsou-li $u \in U$, $v \in U$, pak domain $t^u =$ $=$ domain $t^v = D$,

(ii) $(\beta, x, \alpha) \in D$, $(\beta, y, \alpha) \in D$, $u \in U$, λ, μ reálná čísla $\Rightarrow {}_\beta t^u_\alpha(\lambda x + \mu y) = \lambda {}_\beta t^u_\alpha x +$ $+ \mu {}_\beta t^u_\alpha y$,

(iii) $(\beta, x, \alpha) \in D$, $u \in U$, ${}_\beta t^u_\alpha x = o \Rightarrow x = o$,

(iv) U je taková neprázdná množina, že pro každou posloupnost $u^k \in U$, $x_{k-1} \in P$, $k = 1, 2, \ldots$ a pro každé dělení $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$ množiny R, pro které $x_k = {}_{\alpha_k} t^{u^k}_{\alpha_{k-1}} x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, existuje alespoň jeden prvek $u \in U$ takový, že ${}_\vartheta t^u_{\alpha_{k-1}} x_{k-1}$ je definováno na $\langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle \cap R$ rovností ${}_\vartheta t^u_{\alpha_{k-1}} x_{k-1} = {}_\vartheta t^{u^k}_{\alpha_{k-1}} x_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je *lokální*, případně *globální*, právě když množina R nemá maximum, případně je shora neomezená. Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je *stacionární*, právě když pro každé $(x, u) \in P \times U$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\alpha \leqq \beta$ a pro všechna $\vartheta \in R$ je ${}_{\beta-\vartheta} t^u_{\alpha-\vartheta} x = {}_\beta t^u_\alpha x = {}_{\beta+\vartheta} t^u_{\alpha+\vartheta} x$. Je-li dáno $\sigma \in R \cup \{-\infty\}$ takové, že $\langle \sigma, +\infty) \cap$ $\cap (R - \{\sigma\})$ je neprázdná množina, pak označíme $\mathscr{R} = \langle \sigma, +\infty) \cap R$ a $E = (P -$ $- \{o\}) \times \mathscr{R}$.

2. Definice. Říkáme, že parciální zobrazení $V : P \times R \to R^+$ je *ljapunovskou funkcí* lineárního regulovaného toku $\{t^u : u \in U\}$, právě když platí

$$y = {}_\beta t^u_\alpha x\,, \quad u \in U\,, \quad (x, \alpha) \in \text{domain}\, V, \quad (y, \beta) \in \text{domain}\, V \Rightarrow V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

3. Definice. Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *omezený* vzhledem k množině m, právě když existuje zobrazení $\varphi : E \to R^+$ takové, že platí

$$(1) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad (x, \alpha) \in E\,, \quad u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varphi(x, \alpha)\,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *stejně omezený* vzhledem k množině m, právě když existuje zobrazení $\zeta : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(2) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad (x, \alpha) \in E\,, \quad \|x\| \leqq \omega\,, \quad u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \zeta(\alpha, \omega)\,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *stejnoměrně omezený* vzhledem k množině m, právě když existuje zobrazení $\zeta : R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(3) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad (x, \alpha) \in E\,, \quad \|x\| \leqq \omega\,, \quad u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \zeta(\omega)\,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ *je na E stejně asymptoticky omezený* vzhledem k množině m, právě když je na E stejně omezený k m a existují konstanta $\varkappa \in R^+$, zobrazení $\tau : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(4) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad (x, \alpha) \in E\,, \quad \|x\| \leqq \omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + \tau(\alpha, \omega)\,,$$
$$u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varkappa\,.$$

Říkáme, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E *stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k množině m, právě když je na E stejnoměrně omezený k m a existují konstanta $\varkappa \in R^+$, zobrazení $\tau : R^+ \to R^+$ takové, že platí

$$(5) \qquad (\vartheta, x, \alpha) \in D\,, \quad (x, \alpha) \in E\,, \quad \|x\| \leqq \omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + \tau(\omega)\,,$$
$$u \in U \Rightarrow \|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varkappa\,.$$

Poznámka k definici 3. *Existuje-li konstanta $\varkappa$ a zobrazení τ tak, že platí* (4), *pak ke každému $\varkappa \in R^+$ existuje τ závislé na $\varkappa$ takové, že je splněno* (4).

Samozřejmě platí táž poznámka o konstantě $\varkappa$ a zobrazení τ ve vztahu (5).

4. Věta. *Lineární regulovaný tok $\{t^u : u \in U\}$ je na E omezený vzhledem k množině m, právě když existují*

(6) *konstanta $\delta \in R^+$, parciální zobrazení $V : E \to R^+$, parciální zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí, $a(v) \to +\infty$ pro $v \to +\infty$*

a mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce s* domain $V = \{(x, \alpha) \in E : \|x\| \geqq \delta\}$,

(ii) $(x, \alpha) \in \text{domain}\, V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha)$.

Důkaz. Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je na E omezený vzhledem k m. Zvolme $\delta \in R^+$ a definujme parciální zobrazení

$$(7)\quad V : E \to R^+ : V(x, \alpha) = \sup\{\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| : u \in U\,,\quad \alpha \leqq \vartheta \in R\} \quad \text{pro} \quad \|x\| \geqq \delta\,,$$

$$(8)\qquad a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$$

a ukažme, že mají vlastnosti (i), (ii).

Ad (i): Nechť je dáno $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V$. Pak podle (1) ze vztahů $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $u \in U$ plyne $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varphi(x, \alpha)$, takže je V předpisem (7) skutečně definováno. Dále pro $y = {}_\beta t^u_\alpha x$ a každé $z = {}_\vartheta t^v_\beta y$ existuje $w \in U$ takové, že platí $z = {}_\vartheta t^w_\alpha x$. Odtud plyne

$$V(y, \beta) = \sup\{\|{}_\vartheta t^u_\beta y\| : u \in U,\ \beta \leqq \vartheta \in R\} \leqq$$
$$\leqq \sup\{\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| : u \in U,\ \alpha \leqq \vartheta \in R\} = V(x, \alpha)\,,$$

takže V je ljapunovskou funkcí.

Ad(ii): Zřejmě platí

$$\|x\| \in \{\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| : u \in U,\ \alpha \leqq \vartheta \in R\}\,,$$

takže $\|x\| \leqq V(x, \alpha)$.

Nechť existují parciální zobrazení (6) s vlastnostmi (i) a (ii). Definujme zobrazení $\varphi : E \to R^+$ tak, aby byl splněn vztah

$$a\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,\varphi(x, \alpha)\right) \geqq V\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,x, \alpha\right)$$

a ukažme, že φ splňuje (1). Nechť jsou dány $(\vartheta. x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $u \in U$. Pak pro

$$\left({}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x, \vartheta\right) \in \operatorname{domain} V$$

platí

$$a\left(\left\|{}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x\right\|\right) \leqq V\left({}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x, \vartheta\right) \leqq V\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,x, \alpha\right) \leqq a\left(\frac{\delta}{\|x\|}\,\varphi(x, \alpha)\right),$$

takže $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je-li

$$\left\|{}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\,x\right\| < \delta\,,$$

pak $\|{}_\vartheta t^u_\alpha x\| < \|x\| \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy $\{t^u : u \in U\}$ na E omezený vzhledem k m.

5. Důsledek. *Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je stacionární lineární regulovaný tok na P nad $R \times U$. Nechť pro každou trojici $u \in U$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\alpha \leqq \beta$ a libovolnou lineární invariantní množinu $A \subset P$ platí ${}_\beta t^u_\alpha A = A$. Nechť pro každé $u \in U$ je tok t^u na*

$(P - \{o\}) \times R$ *omezený vzhledem k množině m. Potom existují zobrazení* $V: :(P - \{o\}) \times R \to R^+$, *zobrazení* $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí*, $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to \to +\infty$, *s následujícími vlastnostmi:*

(i) *V je ljapunovská funkce,*

(ii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha)$.

Důkaz vyplývá z první části důkazu předcházející věty a z důkazu věty 2.2 práce [1].

6. Věta. *Lineární regulovaný tok* $\{t^u : u \in U\}$ *je na E stejně omezený vzhledem k množině m, právě když existují*

(9) *konstanta* $\delta \in R^+$, *parciální zobrazení* $V: E \to R^+$, *parciální zobrazení* $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí*, $a(\omega) \to +\infty$ *pro* $\omega \to +\infty$ *a parciální zobrazení* $\zeta_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce s* $\operatorname{domain} V = \{(x, \alpha) \in E : \|x\| \geqq \delta\}$,

(ii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha)$,

(iii) $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V,\ \|x\| \leqq \omega \Rightarrow V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$.

Důkaz. Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně omezený vzhledem k m. Zvolme $\delta \in R^+$ a definujme parciální zobrazení $V: E \to R^+$ vztahem (7), parciální zobrazení $a : R^+ \to \to R^+$ předpisem (8) a

$$\zeta_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,. \tag{10}$$

Nyní dokážeme, že V, a a (10) mají vlastnosti (i), (ii), (iii). Parciální zobrazení V a a mají zřejmě podle 4. Ad (i), 4. Ad (ii) vlastnosti (i) a (ii). Z (2) pak plyne, že V je předpisem (7) skutečně definováno a má vlastnost (iii).

Nechť existují parciální zobrazení (9) s vlastnostmi (i), (ii) a (iii). Definujme zobrazení $\zeta : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ tak, aby byl splněn vztah

$$a\left(\frac{\delta}{\omega}\,\zeta(\alpha, \omega)\right) \geqq \zeta_0(\alpha, \delta)$$

a ukažme, že ζ splňuje (2). Nechť jsou dány $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $u \in U$. Pak pro

$$\left({}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\omega}\, x, \vartheta\right) \in \operatorname{domain} V$$

platí

$$a\left(\left\|{}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\omega}\, x\right\|\right) \leqq a\left(\left\|{}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\, x\right\|\right) \leqq V\left({}_\vartheta t^u_\alpha \frac{\delta}{\|x\|}\, x, \vartheta\right) \leqq$$

$$\leqq V\left(\frac{\delta}{\|x\|}\, x, \alpha\right) \leqq \zeta_0(\alpha, \delta) \leqq a\left(\frac{\delta}{\omega}\,\zeta(\alpha, \omega)\right),$$

takže $\|{}_{\vartheta}t^{u}_{\alpha}x\| \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je-li

$$\left\|{}_{\vartheta}t^{u}_{\alpha} \frac{\delta}{\omega} x\right\| < \delta ,$$

pak $\|{}_{\vartheta}t^{u}_{\alpha}x\| < \omega \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy $\{t^u : u \in U\}$ na E stejně omezený vzhledem k m.

7. Důsledek. *Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je lokální lineární regulovaný tok na P^n nad $R \times U$, kde P^n je n-rozměrný lineární normovaný prostor. Nechť pro každé $u \in U$ je tok t^u na $(P^n - \{o\}) \times R$ omezený vzhledem k množině m. Potom existují konstanta $\sigma \in R$, ljapunovská funkce $V : (P^n - \{o\}) \times (\langle\sigma, +\infty) \cap R) \to R^+$ a zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí, $a(\omega) \to +\infty$ pro $\omega \to +\infty$, $\zeta_0 : (\langle\sigma, +\infty) \cap R) \times R^+ \to \to R^+$ takové, že platí* 6(ii), 6(iii).

Důkaz vyplývá z věty 2.7 práce [1] a z první části důkazu předcházející věty.

8. Věta. *Lineární regulovaný tok $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejnoměrně omezený vzhledem k množině m, právě když existují*

(11) *konstanta $\delta \in R^+$, parciální zobrazení $V : E \to R^+$, parciální zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí, $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to +\infty$ a parciální zobrazení $\zeta_0 : R^+ \to R^+$*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce s* domain $V = \{(x, \alpha) \in E : \|x\| \geqq \delta\}$,

(ii) $(x, \alpha) \in$ domain $V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\|x\|)$.

Věta vyplývá z důkazu věty 6 a z toho, že zobrazení ζ v (3) a parciální zobrazení ζ_0 v (11) nezávisí na α.

9. Důsledek. *Nechť jsou splněny předpoklady důsledku 7 a nechť $\{t^u : u \in U\}$ je stacionární. Potom existují*

(12) *zobrazení $V : (P^n - \{o\}) \times R \to R^+$, zobrazení $a : R^+ \to R^+$, a rostoucí $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to +\infty$ a zobrazení $\zeta_0 : R^+ \to R^+$*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce,*

(ii) $(x, \alpha) \in$ domain $V \Rightarrow a(\|x\|) \leqq V(x, \alpha) \leqq \zeta_0(\|x\|)$.

Důkaz vyplývá z důsledku 2.8 práce [1], z první části důkazu věty 6 a z toho, že $\{t^u : u \in U\}$ je stacionární.

10. Věta. *Lineární regulovaný tok $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně asymptoticky omezený vzhledem k množině m, právě když existují parciální zobrazení* (9) *s vlastnostmi*

6(i), 6(ii), 6(iii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*

(iv) $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\alpha, \omega)$, $u \in U$,
$({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \in \text{domain } V \Rightarrow V({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně asymptoticky omezený vzhledem k m. Pak z věty 6 plyne, že existují parciální zobrazení (9) s vlastnostmi 6(i), 6(ii), 6(iii). Položme $\varkappa_0 = \varkappa$ a zobrazení $\tau_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ definujme předpisem $\tau_0(\alpha, \omega) = \tau(\alpha, \omega)$, kde $\varkappa$ a τ jsou z (4). Pak pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $u \in U$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\alpha, \omega)$ je $\|{}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x\| \leqq \varkappa_0$ a vzhledem k (7) také $V({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že parciální zobrazení V má vlastnost (iv).

Nechť existují parciální zobrazení (9) s vlastnostmi 6(i), 6(ii), 6(iii), konstanta $\varkappa_0 \in R^+$ a zobrazení $\tau_0 : \mathscr{R} \times R^+ \to R^+$ mající vlastnost (iv). Z vlastností 6(i), 6(ii), 6(iii) vyplývá podle věty 6, že $\{t^u : u \in U\}$ je na E stejně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa \geqq \delta$ tak, aby byl splněn vztah $a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$ a za zobrazení τ zvolme τ_0. Ukažme nyní, že $\varkappa$ a τ splňují (4). Nechť jsou dány $(\vartheta, x, \alpha) \in D$, $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau(\alpha, \omega)$, $u \in U$. Pak pro $({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \in \text{domain } V$ platí

$$a(\|{}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x\|) \leqq V({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa),$$

takže $\|{}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x\| \leqq \varkappa$. Je tedy $\{t^u : u \in U\}$ na E stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

11. Důsledek. *Nechť* $\{t^u : u \in U\}$ *je globální lineární regulovaný tok na* P^n *nad* $R \times U$, *kde* P^n *je n-rozměrný lineární normovaný prostor. Nechť* $\{t^u : u \in U\}$ *je na* $E = (P^n - \{o\}) \times R$ *stejnoměrně omezený vzhledem k m a nechť pro každou trojici* $u \in U$, $\alpha \in R$, $x \in P^n$ *je* $\lim_{\vartheta \to +\infty} \|{}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x\| = 0$. *Potom existují ljapunovská funkce* $V : (P^n - \{o\}) \times R \to R^+$, *zobrazení* $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí,* $a(\psi) \to +\infty$ *pro* $\psi \to +\infty$ *a* $\zeta_0 : R^+ \to R^+$ *s vlastností* 8(ii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : R \times R^+ \to R^+$ *mající vlastnost:*

$$(x, \alpha) \in \text{domain } V, \quad \|x\| \leqq \omega, \quad \vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\alpha, \omega), \ \vartheta \in R,$$
$$u \in U \Rightarrow V({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \varkappa_0 .$$

Důkaz vyplývá z věty 2.14 práce [1] a z prvních částí důkazů vět 8 a 10.

12. Věta. *Lineární regulovaný tok* $\{t^u : u \in U\}$ *je na E stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k množině m, právě když existují parciální zobrazení* (11) *s vlastnostmi* 8(i), 8(ii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*

(iii) $(x, \alpha) \in E$, $\|x\| \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\psi)$, $u \in U$,
$({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \in \text{domain } V \Rightarrow V({}_{\vartheta}t^u_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz vyplývá z věty 8, důkazu věty 10 a z toho, že zobrazení τ a τ_0 nezávisí na α.

13. Důsledek. *Nechť jsou splněny předpoklady důsledku* 11 *a nechť* $\{t^u : u \in U\}$ *je stacionární. Potom existují zobrazení* (12) *s vlastnostmi* 9(i), 9(ii), *konstanta* $\varkappa_0 \in R^+$ *a zobrazení* $\tau_0 : R^+ \to R^+$ *mající vlastnost*

(iii) $(x, \alpha) \in \text{domain } V,\ \|x\| \leqq \psi,\ \vartheta \geqq \alpha + \tau_0(\psi),\ \vartheta \in R,\ u \in U \Rightarrow V({}_\vartheta t^u_\alpha x, \vartheta) \leqq \varkappa_0.$

Důkaz vyplývá z důsledku 2.15 práce [1], z předcházející věty a z důsledku 9.

Literatura

[1] *F. Tumajer:* Vlastnosti stability a omezenosti lineárního regulovaného toku, Sborník VŠST v Liberci, 1972.

[2] *J. Kučera, I. Vrkoč:* Note on stability of a linear homogeneous control system, Čas. pro pěst. mat. *95*, 1970, 56—61

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

LIAPUNOV'S METHOD IN THE THEORY OF THE BOUNDEDNESS OF LINEAR CONTROL FLOWS

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The properties of the boundedness of the linear control flow which is an immediate generalization of the notion of the linear control system of differential equations which is studied in the paper by J. Kučera, I. Vrkoč: *Note on stability of a linear homogeneous control system* are studied. Various types of boundedness are characterized by means of Liapunov's functions. Furthermore, some sufficient conditions for certain types of the boundedness of the linear control flow with respect to a given set are given.