Časopis pro pěstování matematiky

Ivan Havel; Petr Liebl

O vnoření dichotomického stromu do krychle

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 2, 201--205

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117765`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

O VNOŘENÍ DICHOTOMICKÉHO STROMU DO KRYCHLE

IVAN HAVEL, PETR LIEBL, Praha

(Došlo dne 2. listopadu 1970)

Triviální nutnou podmínkou pro vnořitelnost konečného grafu $\mathscr{G} = \langle V, E\rangle$ do n-rozměrné krychle je, aby $|V| \leqq 2^n$. V případě, že $\mathscr{G}$ je had (viz [1]), je tato podmínka rovněž postačující (viz [2]). Na druhé straně nemůže být n menší než maximální stupeň uzlu v $\mathscr{G}$. Vzniká zajímavá otázka: jak souvisí minimální dimense n se strukturálními vlastnostmi grafu, např. se stupni jeho uzlů. V článku je tento problém řešen pro třídu tzv. úplných dichotomických stromů $\mathscr{D}_n$. Ukáže se, že zde je minimální dimense příslušné krychle přesně o jedničku větší, než vyžaduje odhad podle počtu uzlů.

V dalším bude N označovat množinu všech přirozených čísel.

Definice 1. *Buď $\mathscr{G} = \langle V, E\rangle$ graf, konečný nebo nekonečný. Zobrazení $\psi : E \to N$ nazveme $\bar{C}$-ohodnocením grafu $\mathscr{G}$, jestliže platí*

a) *Je-li $(e_1, \ldots, e_r)$ posloupnost hran prosté konečné otevřené cesty v $\mathscr{G}$, pak existuje $i \in N$ takové, že se v posloupnosti čísel $(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_r))$ vyskytuje i lichý počet krát.*

b) *Je-li $(f_1, \ldots, f_s)$ posloupnost hran prosté uzavřené cesty v $\mathscr{G}$, pak se každé číslo z posloupnosti $(\psi(f_1), \ldots, \psi(f_s))$ vyskytuje v této posloupnosti sudý počet krát.*

$\bar{C}$-ohodnocení grafu $\mathscr{G}$ nazveme jeho C_n-ohodnocením, jestliže E zobrazuje do množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definice 2. *Říkáme, že graf $\mathscr{G} = \langle V, E\rangle$ je částečným podgrafem grafu $\mathscr{G}' = \langle V', E'\rangle$ jestliže $V \subseteq V'$, $E \subseteq E' \cap (V \times V)$.*

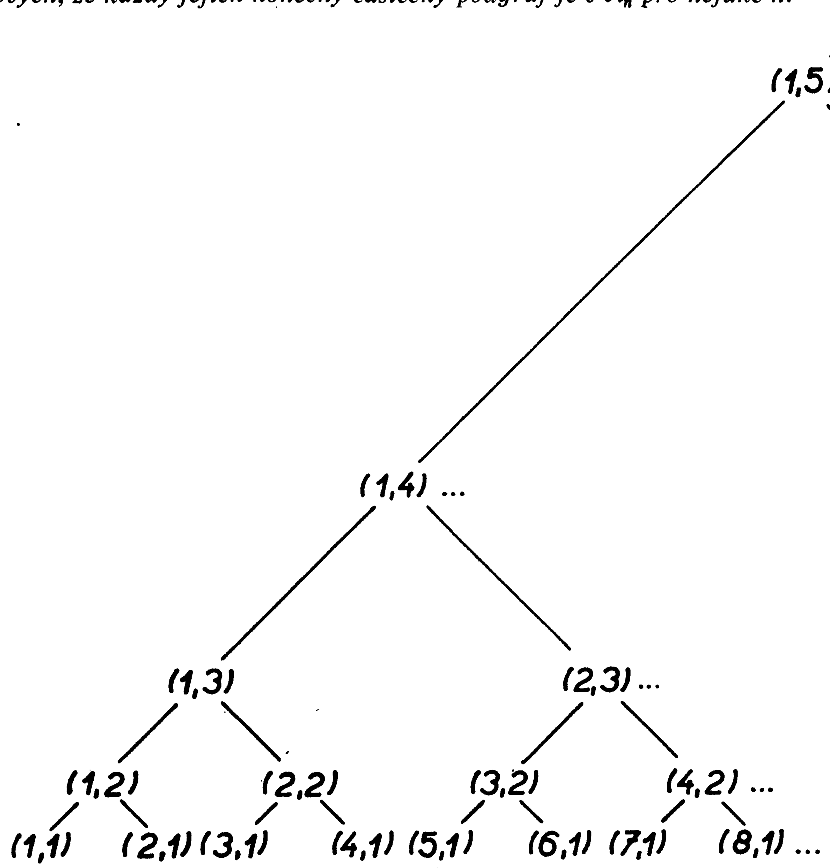
Definice 3. *Označme $\bar{\mathfrak{C}}$ množinu grafů, pro něž existuje $\bar{C}$-ohodnocení, $\mathfrak{C}_n$ množinu grafů pro něž existuje C_n-ohodnocení, $\mathfrak{C}$ množinu grafů takových, že každý jejich konečný částečný podgraf je v $\bar{\mathfrak{C}}$.*

Poznámka. Je-li $\mathscr{G}$ konečný, pak z $\mathscr{G} \in \bar{\mathfrak{C}}$ vyplývá $\mathscr{G} \in \mathfrak{C}_n$ pro jisté n. Dále je zřejmě $\bigcup_n \mathfrak{C}_n \subseteq \bar{\mathfrak{C}} \subseteq \mathfrak{C}$.

Definice 4. *Krychlí dimense n rozumíme graf* $\mathcal{K}_n = \langle V, E \rangle$, *kde* $V = \{1, 2, 3, \dots$ $\dots, 2^n\}$ *a* $(a, b) \in E$ *právě když existuje právě jedno* $p \in \{1, \dots, n\}$ *tak, že* $a = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i 2^{i-1}$, $b = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'_i 2^{i-1}$, $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ *pro* $i \neq p$, $\varepsilon_p \neq \varepsilon'_p$, *kde* $\varepsilon_i, \varepsilon'_i$ *nabývají hodnot* 0,1.

$\mathcal{K}_n$ má, jak známo, $n \, . \, 2^{n-1}$ hran a každý uzel je stupně n.

Definice 5. *Označme* $\mathfrak{K}_n$ *množinu částečných podgrafů* $\mathcal{K}_n$ *a* $\mathfrak{K}$ *množinu grafů takových, že každý jejich konečný částečný podgraf je v* $\mathfrak{K}_n$ *pro nějaké n.*



Obr. 1

Věta 1 práce [2] říká v našem označení, že

(1) $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{C}_n$,

(2) $\mathcal{G}$ souvislý a $\mathcal{G} \in \mathfrak{C}_n \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathfrak{K}_n$,

(3) $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}$.

Z této věty ihned vyplývá, že libovolný strom je v $\mathfrak{K}$.

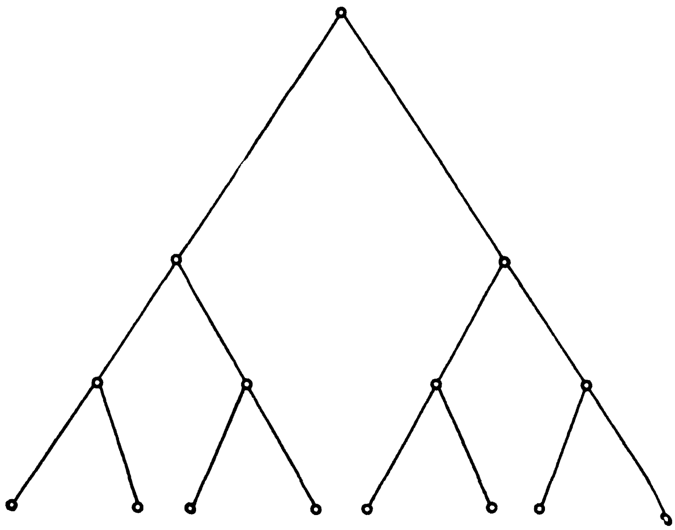
V [2] je dále formulován následující problém: k danému konečnému stromu $\mathscr{T}$ nalézt minimální n takové, aby bylo $\mathscr{T} \in \mathfrak{K}_n$. (Je-li $\mathscr{T}$ nekonečný strom, pak takové n ovšem neexistuje). Níže je tento problém řešen pro úplné dichotomické stromy (pro nejjednodušší stromy – hady – byl již řešen v [2]).

Definice 6. *Směrem nahoru nekonečný úplný dichotomický strom je graf* $\mathscr{D} = \langle V, E \rangle$, *kde* $V = \{(i, k) \mid i \in N,\ k \in N\}$, $E = \{((2r - 1, s), (r, s + 1)) \mid r \in N, s \in N\} \cup \{((2r, s), (r, s + 1)) \mid r \in N,\ s \in N\}$ (viz obr. 1).

Hrany $((\alpha, s), (\beta, s + 1))$ *budeme nazývat hranami s-té úrovně.*

Definice 7. *Úplný dichotomický strom o n úrovních je graf* $\mathscr{D}_n$ *indukovaný grafem* $\mathscr{D}$ *na podmnožině jeho uzlů* $\{(i, k) \mid k \leqq n + 1,\ i \leqq 2^{n+1-k}\}$.

Poznámka. $\mathscr{D}_n$ má zřejmě $2^{n+1} - 1$ uzlů, z toho 2^n uzlů stupně 1, a $2^{n+1} - 2$ hran. Obr. 2 ukazuje $\mathscr{D}_3$.



Obr. 2

Věta. $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{K}_2$. $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{K}_{n+2}$ a $\mathscr{D}_n \notin \mathfrak{K}_{n+1}$ pro $n > 1$.

Důkaz. Definujme ohodnocení ψ grafu $\mathscr{D}$ takto:

$$\left.\begin{aligned} \psi((2r - 1, 2m - 1), (r, 2m)) &= 1 \\ \psi((2r, 2m - 1), (r, 2m)) &= 2m + 1 \end{aligned}\right\} \quad m \geqq 1$$

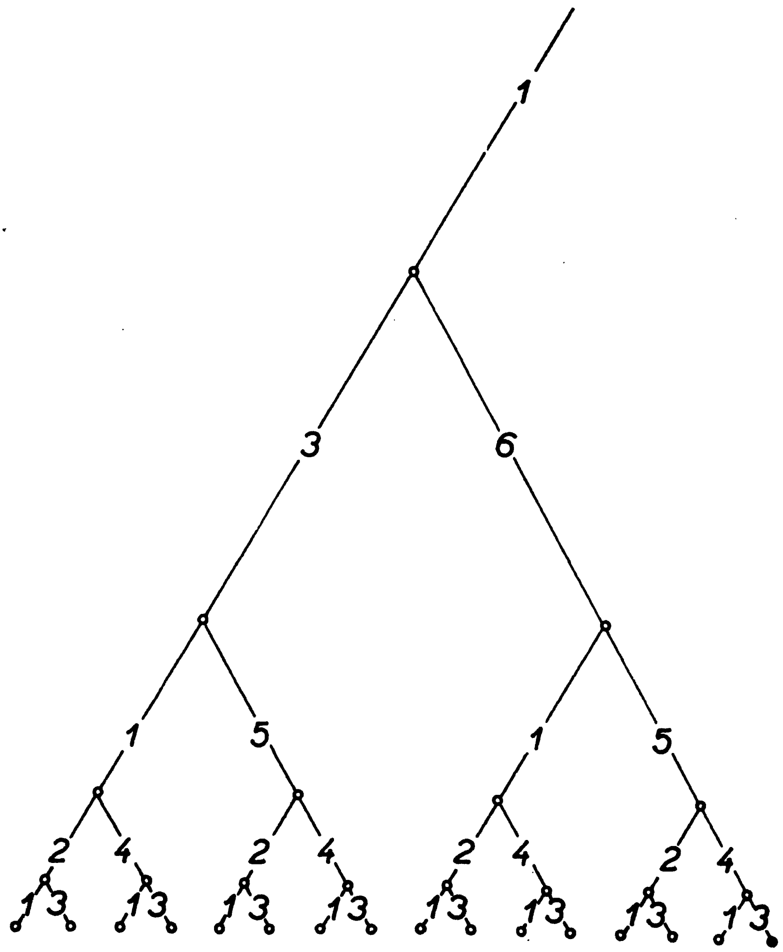
$$\psi((2r - 1, 2m), (r, 2m + 1)) = 2m - 1 \quad m > 1$$

$$\psi((2r, 2m), (r, 2m + 1)) = 2m + 2 \qquad m \geqq 1$$

$$\psi((2r - 1, 2), (r, 3)) = 2$$

pro všechna $r \in N$ (viz obr. 3).

Dokážeme nejprve, že ψ je $\bar{C}$-ohodnocením $\mathscr{D}$.



Obr. 3

Buď $p = (e_1, \ldots, e_r)$ posloupnost hran nějaké konečné cesty v $\mathscr{D}$ takové, že v posloupnosti $y = (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_r))$ se každé číslo vyskytuje sudý počet krát. Je zřejmé, že p neobsahuje dvě hrany téže úrovně. V opačném případě totiž budiž s nejvyšší úroveň taková, že p obsahuje aspoň 2 hrany úrovně s. Pak jsou tyto hrany nutně právě 2 a jsou sousední. p navíc neobsahuje hrany úrovně vyšší než s. Právě jedné ze dvou sousedních hran úrovně s přiřazuje ψ číslo $s + 2$, které se nevyskytuje na hranách nižších úrovní — spor.

Z definice ψ je vidět, že každé sudé číslo se vyskytuje jen na hranách jediné úrovně, a proto nemůže být obsaženo v y. Kromě toho nemůže p obsahovat žádnou hranu úrovně 2. Buď $2n + 1$ nejmenší liché číslo z y, které je větší než 1. To se vyskytuje na hranách úrovně $2n - 1$ a $2n + 2$. p tudíž obsahuje po jedné hraně těchto úrovní. Obsahuje tedy i hranu úrovně $2n$ (plyne ze souvislosti cesty).

Avšak v p nejsou hrany úrovně 2, je tedy $n > 1$; ψ přiřazuje hraně úrovně $2n$ $(n > 1)$ liché číslo $2n - 1$ – spor.

Dále zobrazuje ψ zřejmě množinu hran grafu $\mathscr{D}_n$ do množiny $\{1, \ldots, n + 2\}$ a je tedy $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{C}_{n+2}$. Podle výše citované věty 1 z [2] je konečně $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{K}_{n+2}$.

Kromě triviálního $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{K}_2$ je třeba ještě dokázat, že $\mathscr{D}_n \notin \mathfrak{K}_{n+1}$. Provedeme to sporem. Nechť tedy $n > 1$ a $\mathscr{D}_n$ je částečným podgrafem $\mathscr{K}_{n+1}$. Nazveme hrany $\mathscr{K}_{n+1}$, které nejsou hranami $\mathscr{D}_n$, „novými". Nových hran je $(n + 1) 2^n - (2^{n+1} - 2) = (n - 1) 2^n + 2$. Žádná nová hrana nespojuje dva uzly stupně 1 grafu $\mathscr{D}_n$, neboť by vznikla kružnice liché délky, která, jak známo, se v $\mathscr{K}_{n+1}$ nevyskytuje. Jsou tedy nové hrany, incidující s navzájem různými uzly stupně 1 grafu $\mathscr{D}_n$, navzájem různé a jejich počet je $n \,.\, 2^n$. Musí tudíž platit $n \,.\, 2^n \leqq (n - 1) 2^n + 2$, to však je spor s předpokladem $n > 1$. Q.E.D.

Literatura

[1] *Sedláček, J.*: Kombinatorika v teorii a praxi. NČSAV, Praha, 1964.
[2] *Havel, I., Morávek, J.*: *B*-valuations of graphs. Vyjde v Czech. Math. Journ. *22* (1972).

Adresa autorů: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Summary

EMBEDDING THE DICHOTOMIC TREE INTO THE n-CUBE

Ivan Havel, Petr Liebl, Praha

The following theorem is proved: The complete dichotomic tree $\mathscr{D}_n$ $(n > 1)$ can be embedded into the graph of the $n + 2$-dimensional cube but not into that of the $n + 1$-dimensional one.

Here $\mathscr{D}_n = \langle V, E \rangle$, where $V = \{1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$, $E = \{(p, q);\ 1 \leqq p \leqq 2^n - 1,\ b = 2p \text{ or } q = 2p + 1\}$.