Jaromír Suchomel

Über die Zerlegungen von linearen homogenen Differentialoperatoren in Operatoren erster Ordnung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 2, 198--200

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117764`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ÜBER DIE ZERLEGUNG VON LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALOPERATOREN IN OPERATOREN ERSTER ORDNUNG

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno

(Eingegangen am 26. October 1970)

Mit $C_n(I)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Funktionen $y(x)$, die im Intervall I stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich besitzen. Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in C_0(I) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Jeder Funktion $y \in C_n(I)$ ordnen wir die Funktion $z = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}$ zu. Diese Zurodnung ist ein Differentialoperator n-ter Ordnung mit dem Definitionsbereich $C_n(I)$. Wir bezeichnen ihn mit $A = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}$ und nennen ihn den durch die Gleichung (1) erzeugten Operator. In der oben eingeführten Schreibweise gilt also $z = Ay$. Ist $a_0 \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist A ein regulärer Operator.

Es seien zwei Differentialoperatoren B, C gegeben, für die $Ay = B(Cy)$ für alle $y \in C_n(I)$ gilt. Das symbolische Produkt BC nennt man die Zerlegung von A. Mit den Zerlegungen von regulären Operatoren von der Form $A = \prod_{i=n}^{1} A_i$, wo A_i reguläre Operatoren erster Ordnung sind, befaßten sich z. B. Mammana in [1] und Ascoli in [2]. In der Arbeit [3] wurden die Zerlegungen von der Form

$$u^{2n} Y_n = [u^2 D + a_1 u^2 - (n-1)\, uu']^n \tag{2}$$

studiert, wo Y_n der reguläre, durch die iterierte Differentialgleichung

$$I_n(y; a_1, a_2) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in C_{n-i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2\,, \quad \text{siehe [3; S. 49]}\,, \tag{3}$$

erzeugte Operator ist. Die Funktion u ist ein Integral der Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n+1}(a_2 - a_1' - a_1^2)\, y = 0 \tag{4}$$

und kann also isolierte Nullstellen haben. Die Aufgabe dieser Arbeit ist zu jedem regulären Operator A n-ter Ordnung eine Funktion $f \in C_0(I)$ zu suchen, sodaß $fA = \prod_{i=n}^{1} A_i$ gilt. Vgl. [4].

Das Symbol $W(y_1, y_2, \ldots, y_s) = v_s$ bedeutet die Wronskische Determinante von $y_1, y_2, \ldots, y_s \in C_s(I)$ und $W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D)$ ist der durch die Differentialgleichung $W(y_1, y_2, \ldots, y_s, y) = 0$ erzeugte Operator.

1. Lemma. *Es seien Funktionen* $y_i \in C_s(I)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, s$, $2 \leqq s$, *gegeben. Dann gilt*

$$v_{s-1} W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D) = (v_s D - v_s') W(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, D) . \tag{5}$$

Beweis. Die Formel (5) wird in der Form

$$\begin{aligned} &W(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}) W(y_1, y_2, \ldots, y_s, y) = \\ &= W[W(y_1, y_2, \ldots, y_s), W(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, y)] \end{aligned}$$

in [5; S. 403] bewiesen.

2. Lemma. *Es seien Funktionen* $y_i \in C_{n-1}(I)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *gegeben, für die* $v_n \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *in Kraft ist. Dann können die Funktionen* v_s *für* $s = 1, 2, \ldots, n$ *nur isolierte Nullstellen haben.*

Beweis folgt aus dem Satz 1 der Arbeit [6].

3. Lemma. *Es seien Funktionen* $y_i \in C_s(I)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, s$ *gegeben. Dann gilt*

$$u_s W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D) = \prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i') \tag{6}$$

mit

$$\begin{aligned} b_i &= v_i u_{i-1} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, s , \quad u_1 = u_0 = 1 \\ u_i &= \prod_{k=1}^{i-1} v_k^{2^{i-k-1}} \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \ldots, s . \end{aligned} \tag{7}$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf s vermöge (5) und $u_s = u_{s-1}^2 v_{s-1}$ durchgeführt.

4. Satz. *Es seien die Gleichung* (1) *mit* $a_0 \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *und ihr beliebiges Hauptsystem* $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C_n(I)$ *gegeben. Dann existieren Funktionen* $b_i \in C_{n+1-i}(I)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *und eine Funktion* $f \in C_0(I)$, *die nur isolierte Nullstellen haben kann, sodaß folgendes gilt*

$$f \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} = \prod_{i=n}^{1} (b_i D - b_i')$$

$$\{ \prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i') \} y_k = 0 \quad \text{für} \quad s = 1, 2, \ldots, n , \quad k = 1, 2, \ldots, s .$$

Beweis. Der Satz folgt aus Lemma 2 und Lemma 3, wo $f = a_0^{-1} v_n u_n$ und (7) zu nehmen ist.

5. Folgerung. Zu jeder regulären Gleichung (1) existiert eine mit ihr quasiidentische Gleichung, sodaß der durch sie erzeugte Operator in der Form eines symbolischen Produkts von Operatoren erster Ordnung geschrieben werden kann. Vgl. [3; Def. 6,3].

6. Satz. *Es sei das Hauptsystem* $y_i = ((i-1)!)^{-1} \alpha u^{n-i} v^{i-1}$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *der Gleichung* (3) *gegeben, wo* u, v *Lösungen von* (4) *mit* $W(u, v) = 1$ *für alle* $x \in I$ *sind und* $\alpha = \exp\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\}$, $x_0 \in I$. *Bezeichnen wir* $v_n^{-1} W(y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n, D) = Y_n$. *Dann ist die Zerlegung* (2) *richtig.*

Beweis. Nach [7; (3,2)] ist $v_i = \alpha^i u^{i(n-i)}$ und nach (7) gilt $u_i = u^2(\alpha u^{n-3})^{2^i} \cdot (\alpha u^{n-i-1})^{-i-1}$ und $b_i = u^2(\alpha u^{n-3})^{2^{i-1}}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Die Formel

$$\prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i') = (\alpha u^{n-3})^{2^s - 1} \left[u^2 D + a_1 u^2 - (n-1)\, uu'\right]^s \tag{8}$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$ kann mittels Induktion in bezug auf s bewiesen werden. Nach (6), (8) gilt für $s = n$

$$u^2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{n+1} (\alpha u^{n-3})^{2^n} W(y_1, y_2, \ldots, y_n, D) =$$
$$= (\alpha u^{n-3})^{2^n - 1} \left[u^2 D + a_1 u^2 - (n-1)\, uu'\right]^n ,$$

woraus die Formel (2) folgt. Vgl. [3; Satz 8,1].

Literatur

[1] *G. Mammana:* Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Z. *33* (1931), 186–231.

[2] *G. Ascoli:* Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si riconnettono. Revista Matem. y Fisica teorica, Serie A (1940), 189–215.

[3] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No 449 (1964), 23–56.

[4] *J. Suchomel:* Über gewisse Zerlegungen der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung. Wissenschaftliche Zeitschrift der Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt, Jahrgang *XI* (1969) Heft 3, 381–382.

[5] *E. Barvínek:* Über zwei Eigenschaften der Wronskischen Determinanten. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No 456 (1964), 401–407.

[6] *V. Jarník:* Lineární závislost funkcí jedné reálné proměnné. Časop. pěstov. mat. *80* (1955), 32–43.

[7] *J. Suchomel:* Wronskische Determinanten von Lösungen iterierter Gleichungen. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*) (1969), 711–715.

Anschrift des Verfassers: Brno, Nám. 28. října 26.