František Tumajer

Ljapunovské funkce v teorii omezenosti abstraktních restringovaných procesů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 2, 163--182

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117761`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

LJAPUNOVSKÉ FUNKCE V TEORII OMEZENOSTI ABSTRAKTNÍCH RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Došlo dne 21. srpna 1970)

ÚVOD

V práci [1] zavádí J. NAGY pojem abstraktního regulovaného procesu, který je bezprostředně spjat s pojmem abstraktního procesu uvedeného O. HÁJKEM na symposiu EQUADIFF II. Abstraktní regulovaný proces není sice abstraktním procesem, ale ukazuje se, že má s ním mnoho společných vlastností. V práci [2] jsou studovány pomocí ljapunovských funkcí vlastnosti omezenosti abstraktních procesů. V předložené práci užíváme podobných metod ke studiu silné a slabé omezenosti tzv. abstraktních restringovaných procesů; jejichž speciálním případem jsou regulované procesy z práce [1]. Připomeneme si proto nejprve základní definice a označení z prací [1] a [2].

Symboly R^1, R^0, R^+ budou značit po řadě následující množiny: $(-\infty, +\infty)$, $\langle 0, +\infty)$, $(0, +\infty)$. R značí danou neprázdnou podmnožinu množiny R^1, P a W dané abstraktní množiny. V textu budeme používat zobrazení projekce, které definujeme následujícím způsobem. Nechť je dán systém množin X_j pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Pro každou kombinaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ přirozených čísel takových, že $1 \leqq i_s < i_{s+1} \leqq n$ pro $1 \leqq s \leqq k - 1$, definujeme

$$\mathrm{proj}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k}$$

předpisem

$$\mathrm{proj}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) .$$

Dále se budeme zabývat jistou relací t na množině $P \times W \times R$. Předpokládáme, že relace t má vždycky následující vlastnost:

(1) je-li $(y, w_1, \beta), (x, w, \alpha) \in P \times W \times R$, $(y, w_1, \beta)\, t(x, w, \alpha)$, pak $\beta \geqq \alpha$.

Každá taková relace určuje systém relací

(2) $$\{_\beta t_\alpha : \beta \geqq \alpha \text{ v } R\} \quad \text{na} \quad P \times W$$

definovaných vztahem

(3) $$(y, w_1)\, _\beta t_\alpha(x, w) \Leftrightarrow (y, w_1, \beta)\, t(x, w, \alpha)$$

a také obráceně každý systém relací (2) definuje pomocí vztahu (3) relaci t na $P \times \times W \times R$. Je-li t relace na množině $P \times W \times R$, pak označíme

$$E = \text{domain}\, t\,,$$

$$D = \{(\vartheta, x, w, \alpha) \in R \times P \times W \times R : (y, w_1, \vartheta)\, t(x, w, \alpha) \text{ pro nějaké } (y, w_1) \in P \times W\}\,,$$

$$_\vartheta t_\alpha(x, w) = \{(y, w_1) \in P \times W : (y, w_1, \vartheta)\, t(x, w, \alpha)\}$$

a zobrazení

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, w, \alpha) = \sup\{\beta \in R : (\beta, x, w, \alpha) \in D\}\,.$$

1. DEFINICE ABSTRAKTNÍHO RESTRINGOVANÉHO PROCESU

1.1. V této části připomeneme nejdříve definici abstraktního procesu z práce [2] a zavedeme pojem abstraktního restringovaného procesu. Budeme přitom bez dalších poznámek používat označení a konvencí zavedených v úvodní části. Identickou relaci na $P \times W$ označíme $1_{P \times W}$.

1.2. Definice. Říkáme, že t je *proces* na $P \times W$ nad R, právě když P, W jsou množiny, $R \subset R^1$, t je relace na $P \times W \times R$ vyhovující podmínce

(1) $$_\beta t_\alpha \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{pro všechna} \quad \alpha, \beta \in R$$

a mající následující dvě vlastnosti:

(i) $_\alpha t_\alpha \subset 1_{P \times W}$ pro všechna $\alpha \in R$,
(ii) $_\gamma t_\beta \circ {}_\beta t_\alpha = {}_\gamma t_\alpha$ pro všechna $\beta \in \langle \alpha, \gamma \rangle$ v R.

Říkáme, že proces t je *lokální*, resp. *globální*, právě když pro každé $(x, w, \alpha) \in E$ platí $\varepsilon(x, w, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, w, \alpha) = +\infty$.

1.3. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. Říkáme, že t *připouští periodu* $\tau \in R^1$, právě když pro všechna $\beta \geqq \alpha$ v R platí

$$_{\beta-\tau} t_{\alpha-\tau} = {}_\beta t_\alpha = {}_{\beta+\tau} t_{\alpha+\tau}\,.$$

1.4. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. Říkáme, že σ je *řešením* procesu t, právě když

(i) σ je parciální zobrazení $R \to P \times W$,
(ii) domain σ je interval v R,
(iii) $(\sigma(\vartheta), \vartheta)\ t(\sigma(\alpha), \alpha)$ platí pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$ v domain σ.

Říkáme, že t je *úplný vzhledem k řešením*, právě když ke každé dvojici (x, w, α), $(y, w_1, \beta) \in E$, $(y, w_1, \beta)\ t(x, w, \alpha)$ existuje řešení σ takové, že $\sigma(\alpha) = (x, w)$, $\sigma(\beta) = = (y, w_1)$.

1.5. Poznámka. Je-li σ řešením procesu t, $\alpha \in$ domain σ, pak říkáme, že σ prochází bodem (x, w, α), právě když $\sigma(\alpha) = (x, w)$.

1.6. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. *Restringovaným procesem* p na P nad R nazýváme relaci p mezi $P \times W \times R$ a $P \times R$ definovanou takto:

$(z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)$, právě když existuje $w_1 \in W$ takové, že platí $(z, w_1, \vartheta)\ t(x, w, \alpha)$.

Říkáme, že restringovaný proces p je *lokální* (*globální*), resp. *připouští periodu* $\tau \in R^1$, právě když t je lokální (globální), resp. připouští periodu τ.

1.7. Lemma. *Nechť p je restringovaný proces procesu t. Pak platí*

$$(z, \vartheta)\ p(x_1, w_1, \alpha_1),\ (x_1, w_1, \alpha_1)\ t(x, w, \alpha) \Rightarrow (z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)\,.$$

Důkaz plyne přímo z definice 1.6.

1.8. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Zobrazení $V : E \to R^0$ nazýváme *ljapunovskou funkcí* restringovaného procesu p, právě když je V nerostoucí podél p, tj. právě když ze vztahů

$$(x_j, w_j, \alpha_j) \in E\,, \quad j = 1, 2\,, \quad (x_2, w_2, \alpha_2)\ t(x_1, w_1, \alpha_1) \quad \text{plyne}$$
$$V(x_2, w_2, \alpha_2) \leqq V(x_1, w_1, \alpha_1)\,.$$

1.9. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Říkáme, že parciální zobrazení $s : R \to P$ je *řešením* restringovaného procesu p, právě když existuje řešení σ procesu t takové, že $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$.

Říkáme, že p je *úplný vzhledem k řešením*, právě když t je úplný vzhledem k řešením.

1.10. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Říkáme, že zobrazení $V: E \to R^0$ je *slabě ljapunovskou funkcí* restringovaného procesu p, právě když ke každému $(x, w, \alpha) \in E$ existuje řešení σ procesu t takové, že domain $\sigma \supset \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ a V je nerostoucí podél σ, tj.

$$V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(\sigma(\beta), \beta) \text{ pro všechna } \quad \alpha \leqq \beta \leqq \vartheta < \varepsilon(x, w, \alpha) \quad \text{v} \quad R\,.$$

2. SILNÁ OMEZENOST RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

2.1. Označení. V této části předpokládáme, že jsou dány restringovaný proces p procesu t, neprázdná množina

(1) $$m \subset P \times R$$

a zobrazení

(2) $$g : P \times R \to R^0$$

tak, že platí

(3) $$g(x, \alpha) = 0 \Leftrightarrow (x, \alpha) \in m .$$

2.2. Definice. Říkáme, že p je *silně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad (z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)\,.$$

2.3. Věta. *p je silně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a je rostoucí,* $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$,

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je silně omezený. Definujme zobrazení

(2) $V : E \to R^0 : V(x, w, \alpha) = \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha)\}$,

(3) $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : \varphi_0(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha)$,

(4) $a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$.

Nyní dokážeme, že zobrazení (2), (3) a (4) mají vlastnosti (i) až (iii).

Ad (i): Nechť $(x, w, \alpha) \in E$ a nechť $(x_1, w_1, \alpha_1)\, t\, (x, w, \alpha)$. Pak pro každé $(z, \vartheta)\, p\, (x_1, w_1, \alpha_1)$ platí podle 1.7 také $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$, a tedy

$$V(x_1, w_1, \alpha_1) = \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x_1, w_1, \alpha_1)\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)\} = V(x, w, \alpha)\,,$$

takže V je ljapunovskou funkcí.

Ad (ii): Nechť $(x, w, \alpha) \in E$. Pak pro každé $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ platí podle 2.2 (2) vztah $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Ad (iii): Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)\},$$

a tedy

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha).$$

Nechť existují zobrazení (1) mající vlastnosti (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 2.2(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq \varphi_0(x, \alpha).$$

Nyní se snadno ukáže, že pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha)),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p silně omezený vzhledem k m.

2.4. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.3 lze zaměnit podmínkou:

(iii)' *existuje zobrazení* $\zeta_1 : R^+ \to R^+$ *takové, že platí*

$$V(x, w, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(x, \alpha) \leqq \zeta_1(\omega).$$

2.5. Definice. Říkáme, že p je *silně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha), \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa.$$

2.6. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.3 (1) *s vlastnostmi* 2.3 (i) *až* 2.3 (iii) *a zobrazení* $T_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $\varkappa_0 \in R^+$ *takové, že platí*

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha) \Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je silně asymptoticky omezený. Pak podle první části důkazu věty 2.3 existují zobrazení 2.3 (1) s vlastnostmi 2.3 (i) až 2.3 (iii). Zvolme v (iv) za $\varkappa_0 \in R^+$ konstantu $\varkappa$ z 2.5 a definujme zobrazení $T_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : T_0(x, \alpha) = T(x, \alpha)$, kde

T je zobrazení z 2.5. Pak podle 2.5 (3) pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha)$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, a tedy vzhledem k 2.3 (2) je také $V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Nechť existují zobrazení 2.3 (1) s vlastnostmi 2.3 (i) až 2.3 (iii), $\varkappa_0 \in R^+$ a zobrazení T_0 mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.3 (i) až 2.3 (iii) vyplývá podle věty 2.3, že p je silně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.5 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.5 (2) zvolme zobrazení T_0 z (iv). Pak pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa)\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.7. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.3 (1) *s vlastnostmi* 2.3 (i) *až* 2.3 (iii), *konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnosti:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení σ procesu t a všechna $\alpha, \vartheta \in \operatorname{domain} \sigma$, $\alpha \leqq \vartheta$ platí $V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\,\mathrm{d}v$, kdykoliv je $c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \circ\, \sigma(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.*

Potom je p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.3 (i) až 2.3 (iii) zobrazení 2.3 (1) vyplývá podle věty 2.3, že p je silně omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 2.5 (1) tak, aby platil vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0\,.$$

Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1$ a předpokládejme, že existují $(\beta, x, w, \alpha) \in D$, $(y, w_1, \beta)\, t\,(x, w, \alpha)$ takové, že $g(y, \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(y, \beta)) \leqq V(y, w_1, \beta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0\,,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Platí tedy

$$(1) \qquad (\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) < \varkappa_1\,, \quad (z, \vartheta)\, p\,(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

Nechť je nyní $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \geqq \varkappa_1$. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf\{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\}\,,$$

kde φ je zobrazení z definice 2.2.

Definujme zobrazení T z 2.5 (2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{\varphi_0(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)}$$

a ukažme, že $\varkappa$ a T vyhovují definici 2.5. Předpokládejme, že pro nějaké $(y, w_1, \beta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $\beta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ platí vztah $g(y, \beta) > \varkappa$. Nechť σ je řešení procesu t procházející body (x, w, α) a (y, w_1, β). Je-li $\varkappa_1 \leqq g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\vartheta), \vartheta)$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $\vartheta \in R$, pak pomocí 2.3 (ii) a 2.7 (v) dostáváme vztah $V(\sigma(\beta), \beta) \leqq$ $\leqq V(\sigma(\alpha), \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v)\, \mathrm{d}v \leqq \varphi_0(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha)\, T(x, \alpha) < 0$, což je ve sporu s definicí zobrazení V. Existuje-li $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\gamma), \gamma) < \varkappa_1$, plyne z $(y, \beta)\, p\, (\sigma(\gamma), \gamma)$ a ze vztahu (1) nerovnost $g(y, \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.8. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.3 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

2.9. Definice. Říkáme, že p je *silně stejně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)\,.$$

2.10. Věta. *p je silně stejně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $$V : E \to R^0\,, \quad \zeta_0 : R \times R^+ \to R^+\,, \quad a : R^+ \to R^+\,, \quad a \text{ rostoucí}\,,$$
$$a(\omega) \to +\infty \quad \text{pro} \quad \omega \to +\infty\,,$$

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je silně stejně omezený. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ vztahem 2.3 (2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,,$$

(3) $$a : R^+ \to R^+ : a(\omega) = \omega\,.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Zobrazení V a (3) mají zřejmě podle 2.3 ad (i) a 2.3 ad (iii) vlastnosti (i) a (iii). Podle 2.9 (2) ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, \vartheta)\, p\,(x, w, \alpha)$, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem 2.3 (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ζ z 2.9 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega)\,.$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p silně stejně omezený vzhledem k m.

2.11. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.10 lze zaměnit podmínkou 2.4 (iii)′.

2.12. Definice. Říkáme, že p je *silně stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně stejně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)\,,$$
$$(z, \vartheta)\, p\,(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.13. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.10 (1) *s vlastnostmi* 2.10 (i) *až* 2.10 (iii) *a zobrazení*

(1) $$T_0 : R \times R^+ \to R^+\,, \quad \varkappa_0 \in R^+$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je silně stejně asymptoticky omezený. Pak podle první části důkazu věty 2.10 existují zobrazení 2.10 (1) s vlastnostmi 2.10 (i) až 2.10 (iii). Zvolme v (1) za $\varkappa_0 \in R^+$ konstantu $\varkappa$ z definice 2.12 a zobrazení $T_0 : R \times R^+ \to R^+$ definujme předpisem

$$T_0(\alpha, \omega) = T(\alpha, \omega)\,,$$

kde T je zobrazení z 2.12. Pak podle 2.12 (3) pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$ a $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, a tedy vzhledem k 2.3 (2) je $V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že zobrazení V má také vlastnost (iv).

Nechť existují zobrazení 2.10 (1) s vlastnostmi 2.10 (i) až 2.10 (iii) a (1) mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.10 (i) až 2.10 (iii) vyplývá podle věty 2.10, že p je silně stejně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.12 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.12 (2) zvolme zobrazení T_0 z (1). Pak pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa)\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.14. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.10 (1) *s vlastnostmi* 2.10 (i) *až* 2.10 (iii), *konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnosti:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení σ procesu t a všechna $\alpha, \vartheta \in \operatorname{domain} \sigma$, $\alpha \leqq \vartheta$ platí*

$$V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, \mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.10 (i) až 2.10 (iii) zobrazení 2.10 (1) vyplývá podle věty 2.10, že p je silně stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 2.9. Položme $\lambda(\alpha, \omega) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\}$. Definujeme-li zobrazení T z 2.12 (2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)}\,,$$

konstantu $\varkappa \in R^+$ tak, aby platilo $a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$, ukážeme podobně jako v důkazu věty 2.7, že pro $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ je $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.15. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.10 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

2.16. Definice. Říkáme, že p je *silně stejnoměrně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\xi : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)\,.$$

2.17. Věta. *p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) *$V : E \to R^0$, rostoucí $a : R^+ \to R^+$, $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to \infty$, neklesající $b : R^0 \to R^+$,*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.

Důkaz. Nechť p je silně stejnoměrně omezený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 2.16 je rostoucí. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem 2.3 (2). Odtud a z 2.16 (2) plyne, že zobrazení V je tímto předpisem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,; \quad b(\psi) = \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \psi \geqq 1\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \in R^+$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, w, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, a tedy zobrazení (1) mají vlastnosti (ii) a (iii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ξ z 12 (1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi)\,.$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p silně stejnoměrně omezený vzhledem k m.

2.18. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.17 můžeme zaměnit následující podmínkou:

(iii)′ *existuje zobrazení $\xi_0 : R^+ \to R^+$ takové, že platí $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow$ $\Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \xi_0(\psi)$.*

2.19. Poznámka. Podmínku (ii), resp. (iii), ve větě 2.17 můžeme zřejmě zaměnit podmínkou 2.4 (iii)′, resp. 2.18 (iii)′.

2.20. Poznámka. *Nechť restringovaný proces p připouští periodu* $\tau > 0$ *a nechť zobrazení g z* 2.1 (2) *je periodické v druhé proměnné s periodou* τ. *Je-li p silně stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení* $\mu : R^+ \to R^+$ *takové, že* $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ *pro všechna* $\alpha \in \langle 0, \tau \rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in R^+$ *a nějaké* ζ *vyhovující definici* 2.9, *pak platí:*

(i) *p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m,*
(ii) *existuje ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou* τ *a mající vlastnosti* 2.17 (ii), 2.17 (iii), 2.4 (iii)′ *a* 2.18 (iii)′.

Důkaz je zřejmý.

2.21. Definice. Říkáme, že p je *silně stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují konstanta

$$\varkappa \in R^+ \tag{1}$$

a zobrazení

$$T : R^+ \to R^+ \tag{2}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\psi)\,, \tag{3}$$
$$(z, \vartheta)\, p\,(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.22. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.17 (1) *s vlastnostmi* 2.17 (i) *až* 2.17 (iii) *a zobrazení*

$$T_0 : R^+ \to R^+\,, \quad \varkappa_0 \in R^+ \tag{1}$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D,\ g(x, \alpha) \leqq \psi,\ \vartheta \geqq \alpha + T_0(\psi),\ (z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz je zřejmý, neboť věta 2.22 je stejnoměrnou modifikací věty 2.13.

2.23. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.17 (1) *s vlastnostmi* 2.17 (i) *až* 2.17 (iii), *konstanta* $\varkappa_1 \in R^+$ *a zobrazení* $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ *zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu* $\langle \varkappa_1, +\infty)$ *kladným číslem a mající následující vlastnost:*

(iv) *pro každé řešení σ procesu t a všechna* $\alpha, \vartheta \in \operatorname{domain} \sigma, \alpha \leqq \vartheta$ *platí* $V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha)) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$, *kdykoliv je* $c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ *definováno pro všechna* $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.17 (i) až 2.17 (iii) zobrazení 2.17 (1) vyplývá podle věty 2.17, že p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 2.16. Položme $\lambda(\psi) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \xi(\psi)\}$. Definujeme-li konstantu $\varkappa$ z 2.16 (1) předpisem

$$\varkappa = \xi(\varkappa_1)$$

a zobrazení T z 2.16 (2) předpisem

$$T(\psi) = 1 + \frac{b(\psi)}{\lambda(\psi)},$$

ukážeme podobně jako v důkazu věty 2.7, že pro $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$, $(z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha)$ je $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.24. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.17 (ii), resp. 2.17 (iii), nahradit podmínkou 2.4 (iii)′, resp. 2.18 (iii)′.

3. SLABÁ OMEZENOST RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

3.1. Označení. V celé této části používáme i nadále označení zavedených v předcházejícím textu. Speciálně bude t značit lokální proces na $P \times W$ nad R, p jemu odpovídající lokální restringovaný proces. Podobně jako v předchozí části je dána množina $m \subset P \times R$ a zobrazení 2.1 (2) vyhovující vztahu 2.1 (3). Kromě toho pro dané $(x, w, \alpha) \in E$ označíme symbolem $\Sigma(x, w, \alpha)$ množinu všech řešení σ procesu t takových, že $\sigma(\alpha) = (x, w)$ a domain $\sigma \supset \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$; symbolem $S(x, w, \alpha)$ pak množinu všech řešení s restringovaného procesu p takových, že existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$, pro které $s = \operatorname{proj}_1 \circ \sigma$.

3.2. Definice. Říkáme, že p je *slabě omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : \operatorname{proj}_{1,3} E \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.3. Věta. *p je slabě omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V: E \to R^0$, $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a je rostoucí*, $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$,

mající následující vlastnosti:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je slabě omezený. Podle definice 3.2 k danému $(x, w, \alpha) \in E$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.2 (2). Definujme zobrazení

(2) $$V : E \to R^0 : V(x, w, \alpha) = \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\},$$

(3) $$\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : \varphi_0(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha),$$

(4) $$a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$$

a ukažme, že (2), (3), (4) mají vlastnosti (i), (ii) a (iii). Podle 3.2 (2) je vidět, že $V(x, w, \alpha)$ je předpisem (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii). Zřejmě pro každé $(x, w, \alpha) \in E$ platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\},$$

takže podle (2) je také $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, což je vlastnost (iii). Zbývá ještě dokázat, že V je slabě ljapunovskou funkcí restringovaného procesu p. Jsou-li $\beta, \gamma \in R$ taková, že $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \varepsilon(x, w, \alpha)$, pak je

$$\{(\sigma(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \gamma, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} \subset \{(\sigma(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\}.$$

Odtud snadno plyne

$$V(\sigma(\gamma), \gamma) = \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \gamma, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} = V(\sigma(\beta), \beta),$$

takže zobrazení V z (2) je slabě ljapunovskou funkcí.

Nechť nyní existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 3.2 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq \varphi_0(x, \alpha).$$

Podle (i) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Nyní se snadno ukáže, že řešení $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ vyhovuje definici 3.2 (2). Platí totiž pro každé $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$, ϑ v R, $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$, $a(g(s(\vartheta), \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha))$, odkud vzhledem k tomu, že a je rostoucí, plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p slabě omezený vzhledem k m.

3.4. Definice. Říkáme, že p je *slabě asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě omezený vzhledem k m a existují konstanta

$$\varkappa \in R^+ \tag{1}$$

a zobrazení

$$T : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ \tag{2}$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.2 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ v domain s.

3.5. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení 3.3 (1) s vlastnostmi 3.3 (ii) a 3.3 (iii), zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ s následujícími vlastnostmi:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$ *pro nějaké $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ a každé $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.*

Potom je p slabě asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Podle vlastnosti (v) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z věty 3.3 vyplývá, že p je slabě omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 3.4 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0 \,.$$

Nechť $g(x, \alpha) < \varkappa_1$ a předpokládejme, že existuje $\beta \geqq \alpha$ takové, že platí $g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\beta), \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\beta), \beta)) \leqq V(\sigma(\beta), \beta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0 \,,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Platí tedy

(1) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro všechna $\alpha \leqq \vartheta \in$ domain σ.

Nechť je nyní $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \geqq \varkappa_1$. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\} \,,$$

kde φ je zobrazení z definice 3.2. Definujme zobrazení T z 3.4 (2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{\varphi_0(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)} \,,$$

řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \text{proj}_1 \circ \sigma$$

a ukažme, že $\varkappa$, T a s vyhovují definici 3.4. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ platí vztah $g(s(\beta), \beta) > \varkappa$. Je-li $\varkappa_1 \leqq g(s(\vartheta), \vartheta)$ pro všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \beta\rangle$ v R, pak pomocí 3.3 (ii) a (v) dostáváme vztah

$$V(\sigma(\beta), \beta) \leqq V(x, w, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(s(v), v))\,\mathrm{d}v \leqq \varphi_0(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha)\,T(x, \alpha) < 0\,,$$

což je ve sporu s definicí zobrazení V.

Existuje-li $\gamma \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $g(s(\gamma), \gamma) < \varkappa_1$, plyne z $(s(\beta), \beta)\ p\ (\sigma(\gamma), \gamma)$ a vztahu (1) nerovnost $g(s(\beta), \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že platí $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ v R. Je tedy p slabě asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.6. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 3.3 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

3.7. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.8. Věta. *p je slabě stejně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí*, $a(\omega) \to +\infty$ *pro* $\omega \to +\infty$, *s následujícími vlastnostmi*:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je slabě stejně omezený. Podle definice 3.7 k danému $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \text{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.7 (2). Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ vztahem 3.3 (2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,,$$

(3) $$a : R^+ \to R^+ : a(\omega) = \omega\,.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Stejným způsobem jako v důkazu věty 3.3 se ukáže, že zobrazení V a (3) mají vlastnosti (i) a (iii). Podle 3.7 (2) ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem 3.3 (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Definujme zobrazení z 3.7 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega) .$$

Podle vlastnosti (i) existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že zobrazení V je nerostoucí podél σ. Nyní se snadno ukáže, že řešení $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ a zobrazení ζ vyhovují definici 3.7. Platí totiž pro $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$, $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R vztah

$$a(g(s(\vartheta), \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega)) ,$$

odkud plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p slabě stejně omezený vzhledem k m.

3.9. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě stejně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.7 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ v domain s.

3.10. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení* 3.8 (1) *s vlastnostmi* 3.8 (ii) *a* 3.8 (iii), *zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ s následujícími vlastnostmi:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$ *pro nějaké $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ a každé $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.*

Potom je p slabě stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Podle vlastnosti (v) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z vlastností 3.8 (ii), 3.8 (iii) dostáváme podle věty 3.8, že p je slabě stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 3.7. Položme

$$\lambda(\alpha, \omega) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\} .$$

Definujeme-li zobrazení T z 3.9 (2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)},$$

řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$$

a konstantu $\varkappa$ z 3.9 (1) tak, aby platilo

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0,$$

ukážeme podobně jako u důkazu věty 3.5, že pro $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$ a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ v domain s platí $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p slabě stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.11. Poznámka. V obou předcházejících větách lze podmínku 3.8 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

3.12. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejnoměrně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\xi : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.13. Věta. *p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, *rostoucí* $a : R^+ \to R^+$, $a(\psi) \to +\infty$ *pro* $\psi \to +\infty$, *neklesající* $b : R^0 \to R^+$,

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.

Důkaz. Nechť p je slabě stejnoměrně omezený. Podle definice 3.12 k danému $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.12 (2). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 3.12 je rostoucí. Definujme zobrazení $V: E \to R^0$ předpisem 3.3 (2). Odtud a z 3.12 (2) plyne, že zobrazení V je tímto vztahem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,; \quad b(\psi) = \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \psi \geqq 1\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, w, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, a tedy zobrazení (1) mají vlastnosti (ii) a (iii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$. Definujme zobrazení ξ z 3.12 (1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi)\,.$$

Podle vlastnosti (i) existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že zobrazení V je nerostoucí podél σ. Označme $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$. Pak ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(s(\vartheta, \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi))\,,$$

odkud plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m.

3.14. Poznámka. Podmínku (ii), resp. (iii), ve větě 3.13 můžeme zřejmě zaměnit podmínkou 2.4 (iii)', resp. 2.18 (iii)'.

3.15. Poznámka. *Nechť restringovaný proces p připouští periodu $\tau > 0$ a nechť zobrazení g z* 2.1 (2) *je periodické v druhé proměnné s periodou τ. Je-li p slabě stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení $\mu : R^+ \to R^+$ takové, že $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, \tau \rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in R^+$ a nějaké ζ vyhovující definici* 3.7, *pak platí:*

(i) *p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m,*
(ii) *existuje slabě ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou τ a mající vlastnosti* 3.13 (ii), 3.13 (iii), 2.4 (iii)' a 2.18 (iii)'.

Důkaz je zřejmý.

3.16. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.12 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$ v domain s.

3.17. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení* 3.13 (1) *s vlastnostmi* 3.13 (ii) *a* 3.13 (iii), *zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a mající následující vlastnost:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, \mathrm{d}v$ *pro nějaké* $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ *a každé* $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in \mathrm{domain}\ \sigma$.

Potom je p slabě stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Podle vlastnosti (iv) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z vlastností 3.13 (ii) a 3.13 (iii) dostáváme podle věty 3.13, že p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 3.12. Položme $\lambda(\psi) = \inf\{c(v) : 1 \leqq v \leqq \xi(\psi)\}$. Definujeme-li konstantu $\varkappa$ z 3.16 (1) předpisem

$$\varkappa = \xi(1)\,,$$

zobrazení T z 3.16 (2) předpisem

$$T(\psi) = 1 + \frac{b(\psi)}{\lambda(\psi)}$$

a řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma\,,$$

ukážeme podobně jako v důkazu věty 3.5, že pro $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$ a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$ v domain s platí $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p slabě stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.18. Poznámka. Zřejmě v předcházející větě lze podmínku 3.13 (ii), resp. 3.13 (iii), nahradit podmínkou 2.4 (iii)′, resp. 2.18 (iii)′.

Literatura

[1] *Nagy, J.:* Ljapunov's direct method in abstract control processes, Čas. pro pěst. mat. *93*, 1968, 299—325.

[2] *Tumajer, F.:* Omezenost abstraktních procesů, Čas. pro pěst. mat. *95*, 1970, 196—211.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

LIAPUNOV'S FUNCTIONS IN THE THEORY OF BOUNDEDNESS OF ABSTRACT RESTRICTED PROCESSES

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The notions of strong boundedness, strong asymptotical boundedness, strong equiboundedness, strong asymptotical equiboundedness and their uniform and weak modifications for abstract restricted processes are introduced. By means of Liapunov's functions theorems are proved which give sufficient and in most cases also necessary conditions for the above-mentioned types of boundedness.