František Tumajer

Stejnoměrná stabilita a stejnoměrná asymptotická stabilita množin vzhledem k spojitému toku

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 86--93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117741`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

STEJNOMĚRNÁ STABILITA A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ STABILITA MNOŽIN VZHLEDEM K SPOJITÉMU TOKU

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Received August 19, 1970)

1. DEFINICE ABSTRAKTNÍHO SPOJITÉHO TOKU

1.1. Označení. V práci se studují některé vlastnosti parciálního zobrazení $t : R^1 \times \times P \times R^1 \to P$, kde P je metrický prostor s metrikou ϱ a R^1 množina všech reálných čísel s eukleidovskou metrikou. O parciálním zobrazení t předpokládáme, že splňuje následující podmínku

(1) $$(\beta, x, \alpha) \in \text{domain } t \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{v} \quad R^1 .$$

Symbolem ${}_\beta t_\alpha$ označíme parciální zobrazení z P do P definované předpisem

$$ {}_\beta t_\alpha x = t(\beta, x, \alpha) .$$

Symbolem E budeme rozumět $\{(x, \alpha) \in P \times R^1 : (\alpha, x, \alpha) \in \text{domain } t\}$. Pomocí právě zavedených pojmů a označení vyslovíme následující definici.

1.2. Definice. Říkáme, že t je *tok* na P nad R^1, právě když t je parciální zobrazení $R^1 \times P \times R^1 \to P$ s podmínkou (1) a mající následující vlastnosti:

(i) $(x, \alpha) \in E \Rightarrow {}_\alpha t_\alpha x = x$,

(ii) ${}_\gamma t_\beta \circ {}_\beta t_\alpha x = {}_\gamma t_\alpha x$ pro všechna $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$, kdykoliv je jedna z obou stran této rovnosti definována.

1.3. Poznámka. Je-li dán tok t a $(x, \alpha) \in E$, je přirozené ptát se po vlastnosti množiny $\{\vartheta \in R^1 : (\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\}$. Je zřejmé přímo z definice toku, že tato množina tvoří interval v R^1 mající α jako počáteční bod. Označme

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, \alpha) = \sup \{\vartheta \in R^1 : (\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\} .$$

1.4. Definice. Říkáme, že tok t na P nad R^1 je *lokální*, resp. *globání*, právě když platí $\varepsilon(x, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, \alpha) = +\infty$ pro všechna $(x, \alpha) \in E$.

1.5. Definice. Nechť t je tok na P nad R^1. Říkáme, že s je *řešením* toku t, právě když

(i) s je parciální zobrazení z R^1 do P,

(ii) domain s je interval v R^1,

(iii) $s(\beta) = {}_\beta t_\alpha\, s(\alpha)$ platí pro všechna $\alpha \leqq \beta$ v domain s.

1.6. Definice. Říkáme, že lokální tok t na P nad R^1 je *spojitý*, právě když jsou všechna jeho řešení spojitá zobrazení.

Jako základní interpretaci definice 1.6 uvedeme příklad.

1.7. Příklad. Nechť je dána diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\vartheta} = f(x, \vartheta) \tag{2}$$

v n-rozměrném eukleidovském prostoru R^n, kde $f : E \to R^n$ je spojité zobrazení otevřené podmnožiny E prostoru R^{n+1} splňující Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné x. Řešení rovnice (2) jsou parciální zobrazení $s : R^1 \to R^n$ taková, že domain s je interval v R^1 takový, že platí

$$\frac{\mathrm{d}s(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = f(s(\vartheta), \vartheta) \quad \text{pro všechna} \quad \vartheta \in \text{domain } s\,.$$

K diferenciální rovnici (2) můžeme přiřadit spojitý tok t na R^n nad R^1 tímto způsobem:

$$\text{definujme} \quad y = t(\beta, x, \alpha) \quad \text{právě když} \quad x, y \in R^n\,, \quad \alpha \leqq \beta \text{ v } R^1$$

a existuje řešení rovnice (2) nabývající hodnotu x v bodě α a y v β.

1.8. Poznámka. Zřejmě každý tok t na P nad R^1 definuje na odpovídajícím E částečné uspořádání předpisem

$$(y, \beta) \succ (x, \alpha) \Leftrightarrow y = t(\beta, x, \alpha)\,.$$

Je tedy přirozené vyslovit následující definici.

1.9. Definice. Nechť t je tok na P nad R^1. Parciální zobrazení

$$V : E \to R^1$$

nazýváme *ljapunovskou funkcí* toku t, právě když je V nezáporné a nerostoucí podél t, tj. právě když ze vztahů

$$(y, \beta) \in \text{domain } V,\ (x, \alpha) \in \text{domain } V, \quad y = t(\beta, x, \alpha) \Rightarrow 0 \leqq V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

2. STEJNOMĚRNÁ STABILITA A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ STABILITA

2.1. Označení. Kromě symboliky zavedené v předcházející části budeme v následujícím textu používat tato další označení. R^0, R^+, I znamenají po řadě množiny $\langle 0, +\infty), (0, +\infty), (0, 1\rangle$. Dále předpokládáme, že je dána neprázdná uzavřená množina

$$m \subset P \times R^1 \tag{1}$$

taková, že zobrazení

$$g : P \times R^1 \to R^0 \tag{2}$$

definované předpisem

$$g(x, \alpha) = \inf \{\varrho(x, y) : (y, \alpha) \in m\}$$

je spojité.

2.2. Poznámka. Z definice zobrazení g je zřejmé, že platí

$$(x, \alpha) \in m \Leftrightarrow g(x, \alpha) = 0 \,. \tag{3}$$

2.3. Definice. Říkáme, že m je *invariantní* vzhledem k toku t, právě když platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t \,, \quad (x, \alpha) \in m \Rightarrow ({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \in m \,.$$

2.4. Poznámka. Ze vztahu (3) plyne, že m je invariantní vzhledem k t, právě když platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t \,, \quad g(x, \alpha) = 0 \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta,) = 0 \,.$$

2.5. Definice. Říkáme, že m je *stejnoměrně stabilní* vzhledem k toku t, právě když existuje zobrazení

$$\psi : I \to I \tag{4}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t \,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi(\xi) \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi \,. \tag{5}$$

2.6. Věta. *Nechť m je stejnoměrně stabilní vzhledem k toku t. Potom je m invariantní vzhledem k t.*

Důkaz. Nechť existuje $(\beta, x, \alpha) \in \text{domain } t$ takové, že $g(x, \alpha) = 0$, $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) = k > 0$. Zřejmě pro každou volbu zobrazení ψ v (4) a pro každé $k_1 \in (0, k) \cap I$ platí $g(x, \alpha) \leqq \psi(k_1)$ a $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) > k_1$, což je spor s (5).

2.7. Věta. *m je stejnoměrně stabilní vzhledem k spojitému toku t, právě když existuje ljapunovská funkce V s následujícími vlastnostmi:*

(i) *existuje* $\delta \in I$ *takové, že* $\operatorname{domain} V = \{(x, \alpha) \in E : g(x, \alpha) \leqq \delta\}$,

(ii) *existují rostoucí spojitá zobrazení* $a : (0, \delta\rangle \to R^+$, $b : (0, \delta\rangle \to R^+$, $b(\xi) \to 0$ *pro* $\xi \to 0_+$ *taková, že platí*

$$(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V,\ 0 < g(x, \alpha) \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha)).$$

Důkaz. Nechť m je stejnoměrně stabilní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ψ z definice 2.5 je rostoucí a spojité s $\lim_{\xi \to 0_+} \psi(\xi) = 0$. Zvolme $\sigma > 1$, položme $\delta = \psi(1)$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem

$$V(x, \alpha) = \sup \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta)\, \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\} \tag{6}$$

pro $(x, \alpha) \in E$ s $g(x, \alpha) \leqq \delta$. (Činitel $(1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma)/(1 + \vartheta - \alpha)$ je zde uveden jen pro aplikaci v důkazu následující věty). Z (5) vyplývá, že zobrazení V je pro uvedená (x, α) předpisem (6) skutečně definováno. Má tedy V vlastnost (i). Nechť jsou dány $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V$, $(y, \beta) \in \operatorname{domain} V$, $y = {}_{\beta}t_{\alpha}x$. Pak pro každé $z = {}_{\vartheta}t_{\beta}y$ platí také

$$z = {}_{\vartheta}t_{\alpha}x \quad \text{a} \quad \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \geqq \frac{1 + (\vartheta - \beta)\,\sigma}{1 + \vartheta - \beta},$$

takže

$$V(y, \beta) = \sup \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\beta}y, \vartheta)\, \frac{1 + (\vartheta - \beta)\,\sigma}{1 + \vartheta - \beta} : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(y, \beta)) \right\} \leqq$$

$$\leqq \sup \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta)\, \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\} = V(x, \alpha)\,.$$

Odtud plyne, že zobrazení V je ljapunovskou funkcí. Je-li nyní $(x, \alpha) \in \operatorname{domain} V$, $g(x, \alpha) > 0$, existuje $\xi \in I$ tak, že $g(x, \alpha) = \psi(\xi)$, odkud dostáváme pomocí (5)

$$g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \xi = \psi^{-1}(g(x, \alpha))$$

pro každé $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha))$. Jelikož je $(1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma)/(1 + \vartheta - \alpha) < \sigma$, plyne odtud vztah

$$V(x, \alpha) \leqq \sigma \psi^{-1}(g(x, \alpha))\,. \tag{7}$$

Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta)\, \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\},$$

takže

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha)\,. \tag{8}$$

Definujeme-li nyní zobrazení a, b z (ii) předpisem

$$a(\xi) = \xi\,, \quad b(\xi) = \sigma\,\psi^{-1}(\xi) \quad \text{pro} \quad \xi \in (0, \delta\rangle\,,$$

vyplývá z (7) a (8), že V má také vlastnost (ii).

Nechť nyní existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi (i) a (ii). Zvolme $0 < \delta_0 < \delta$ a definujme zobrazení ψ z (4) tak, aby platil vztah

$$0 < b(\psi(\xi)) \leqq a(\xi) \quad \text{pro} \quad 0 < \xi \leqq \delta_0 \quad \text{a} \quad \psi(\xi) = \psi(\delta_0) \quad \text{pro} \quad \delta_0 < \xi \leqq 1$$

a ukažme, že platí (5).

Nechť je dáno $0 < \xi \leqq \delta_0$ a předpokládejme, že existuje $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi(\xi)$ tak, že pro nějaké $\gamma \in \langle\alpha, \varepsilon(x, \alpha))$ platí $\xi < g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma)$. Označme $\beta_0 = \inf\{\beta \in R^1 : : g({}_\beta t_\alpha x, \beta) = \xi\}$. Protože t a g jsou spojité, můžeme o $\gamma > \beta_0$ předpokládat, že je $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \delta$ pro všechna $\vartheta \in \langle\beta_0, \gamma\rangle$. Pak je $a(g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma)) \leqq V({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V(x, \alpha) \leqq \leqq b(g(x, \alpha)) \leqq b(\psi(\xi)) \leqq a(\xi)$, odkud plyne $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \xi$, což je spor s naším předpokladem.

2.8. Definice. Říkáme, že m je *stejnoměrně asymptoticky stabilní* vzhledem k toku t, právě když m je stejnoměrně stabilní vzhledem k t a existují konstanta

$$\Omega \in I \tag{9}$$

a zobrazení

$$T : I \to R^+ \tag{10}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \Omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\xi) \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi\,.$$

2.9. Věta. *m je stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem ke spojitému globálnímu toku t, právě když existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi* 2.7(i), 2.7(ii) *a*

(iii) *existuje rostoucí spojité zobrazení $c : (0, \delta\rangle \to R^+$ s $\lim_{\xi \to 0+} c(\xi) = 0$ takové, že platí*

$$(x, \alpha) \in \text{domain } V \Rightarrow V({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) - V(x, \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g({}_v t_\alpha x, v))\,\mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g({}_v t_\alpha x, v))$ *definováno pro všechna* $v \in \langle\alpha, \vartheta\rangle$.

Důkaz. Nechť m je stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem k t. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení T z definice 2.8 je klesající a spojité s $\lim_{\xi \to 0+} T(\xi) = +\infty$. Položme $\delta = \min\{\Omega, \psi(1)\}$, zvolme $\sigma > 1$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem (6). Odtud a z důkazu věty 2.7 plyne, že V je ljapunovskou funkcí s vlastnostmi 2.7(i) a 2.7(ii). Nechť je dáno $(x, \alpha) \in \text{domain } V$, $g(x, \alpha) >$

> 0. Pak z definice 2.8 pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T[g(x, \alpha)/\sigma^2]$ plyne $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \leqq g(x, \alpha)/\sigma^2$, odkud dostáváme

$$g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \leqq \frac{g(x, \alpha)}{\sigma^2} \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} < \frac{g(x, \alpha)}{\sigma} < g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha),$$

takže

$$\sup \left\{ g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \geqq \alpha + T\left(\frac{g(x, \alpha)}{\sigma^2}\right) \right\} < g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha).$$

Nyní ze spojitosti t a g vyplývá existence $\vartheta_0 \in \langle \alpha, \alpha + T[g(x, \alpha)/\sigma^2] \rangle$ takového, že platí

$$V(x, \alpha) = g({}_{\vartheta_0} t_\alpha x, \vartheta_0) \frac{1 + (\vartheta_0 - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta_0 - \alpha}.$$

Označíme-li $y = {}_\beta t_\alpha x$ a $z = {}_\vartheta t_\beta y$, pak zřejmě pro $(y, \beta) \in \text{domain } V$, $(z, \vartheta) \in \text{domain } V$ platí

$$V(z, \vartheta) = g({}_{\gamma_0} t_\vartheta z, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} = g({}_{\gamma_0} t_\vartheta \circ {}_\vartheta t_\beta y, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} =$$

$$= g({}_{\gamma_0} t_\beta y, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma}{1 + \gamma_0 - \beta} \left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma]} \right] \leqq$$

$$\leqq V(y, \beta) \left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma]} \right],$$

takže

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1) \frac{V(y, \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma]}.$$

Odtud a ze vztahů

$$0 \leqq \gamma_0 - \vartheta \leqq T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right), \quad 0 < \gamma_0 - \beta \leqq T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \vartheta - \beta$$

dostáváme nerovnost

(11)

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1) \frac{V(y, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \sigma(\vartheta - \beta)\right]} \leqq$$

$$\leqq -(\sigma - 1) \frac{g(y, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \sigma(\vartheta - \beta)\right]}.$$

Jelikož je $\lim_{\vartheta \to \beta+} g(z, \vartheta) = \lim_{\vartheta \to \beta+} g({}_\vartheta t_\beta y, \vartheta) = g(y, \beta)$ a funkce T je podle předpokladu spojitá, vyplývá z (11), že platí

$$\limsup_{\vartheta \to \beta+} \frac{V({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) - V({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq$$

$$\leqq \frac{-(\sigma - 1)\, g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\left[1 + T\left(\dfrac{g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\dfrac{g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\sigma^2}\right)\right]}.$$

Definujeme-li zobrazení c z (iii) předpisem

$$c(\xi) = (\sigma - 1) \frac{\xi}{\left[1 + T\left(\dfrac{\xi}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\dfrac{\xi}{\sigma^2}\right)\right]}$$

a uvědomíme-li si, že zobrazení T je spojité a klesající, vidíme, že ljapunovská funkce V má také vlastnost (iii).

Nechť nyní existuje ljapunovská funkce V mající vlastnosti 2.7(i), 2.7(ii) a (iii). Z vlastností 2.7(i) a 2.7(ii) vyplývá podle věty 2.7, že m je stejnoměrně stabilní. Zvolme $0 < \delta_0 < \delta$ a položme $\Omega = b^{-1}(a(\delta_0))$. Předpokládejme, že existují $(x, \alpha) \in \in \operatorname{domain} V$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, $\gamma \geqq \alpha$ takové, že platí

$$g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) > \delta_0 .$$

Podobně jako v důkazu věty 2.7 se snadno ukáže, že lze předpokládat $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \delta$. Pak je

$$a(g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha)) \leqq b(\Omega) = a(\delta_0),$$

odkud plyne $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \delta_0$, což je spor s naším předpokladem. Je-li tedy $(x, \alpha) \in \in \operatorname{domain} V$ a $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, potom je také $({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \in \operatorname{domain} V$ pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$. Definujme zobrazení T z 2.8(10) předpisem

$$T(\xi) = \frac{b(\Omega)}{c(\psi(\xi))},$$

kde ψ je zobrazení z definice 2.5 a ukažme, že Ω a T vyhovují definici 2.8. Nechť jsou dány $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$ a $\xi \in I$. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(\xi)$ platí vztah $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) > \xi$. Je-li $\psi(\xi) < g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \delta$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak z (iii) plyne nerovnost

$$V({}_\beta t_\alpha x, \beta) \leqq V(x, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta))\, d\vartheta < b(\Omega) - c(\psi(\xi))\, T(\xi) = 0,$$

což je spor s definicí ljapunovské funkce. Existuje-li $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $g({}_{\gamma}t_{\alpha}x, \gamma) \leqq \leqq \psi(\xi)$, plyne ze vztahu ${}_{\beta}t_{\alpha}x = {}_{\beta}t_{\gamma} \circ {}_{\gamma}t_{\alpha}x$ nerovnost $g({}_{\beta}t_{\alpha}x, \beta) \leqq \xi$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\xi)$ platí $g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \xi$. Je tedy m stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem k t.

Literatura

[1] *Nagy, J.:* Lyapunov's direct method in abstract local semi-flows, CMUC *8*, 2 (1967).

[2] *Tumajer, F.:* Ljapunovova metoda v teorii abstraktních procesů, kandidátská disertační práce, MÚ ČSAV v Praze.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

UNIFORM STABILITY AND UNIFORM ASYMPTOTIC STABILITY OF SETS WITH RESPECT TO A CONTINUOUS FLOW

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The notion of the continuous flow in a metric space is introduced and both uniform and uniform asymptotic stability of sets with respect to the flow are studied. In terms of Liapunov's functions theorems giving necessary and sufficient conditions for either type of stability are stated.