Svatoslav Staněk

O jistém zobecnění Picard-Lindelöfovy metody postupných aproximací řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 1, 1--14

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 94 * PRAHA 19. 2. 1969 * ČÍSLO 1

O JISTÉM ZOBECNĚNÍ PICARD-LINDELÖFOVY METODY POSTUPNÝCH APROXIMACÍ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y' = f(x, y)$

SVATOSLAV STANĚK, Olomouc

(Došlo dne 5. června 1967)

Buď dána Cauchyova úloha

$$y' = f(x, y) \tag{1'}$$

$$y(x_0) = y_0 \,. \tag{1''}$$

O funkci $f(x, y)$ předpokládáme, že je spojitá na množině $M = \langle x_0, x_0 + a\rangle \times \times (-\infty, \infty)$ $(a > 0)$ a splňuje zde nerovnost

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq L(x)\,|y_1 - y_2| \tag{2}$$

kde $L(x) \geqq 0$ na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ (další omezení funkce $L(x)$ budou provedena v dalším textu).

Písmenem $\mathscr{R}$ označíme prostor všech funkcí $y = y(x)$, které mají spojitou první derivaci na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ a $y(x_0) = y_0$. Jestliže $y, z \in \mathscr{R}$ a pro $x \in \langle x_0, x_0 + + a\rangle$ platí nerovnost $y(x) \leqq z(x)$, budeme psát $y \leqq z$ (tím je na $\mathscr{R}$ definováno částečné uspořádání). V prostoru $\mathscr{R}$ definujeme operátor J

$$J(y) = y'(x) - f(x, y)$$

zobrazující $\mathscr{R}$ do prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$. Každý prvek y, $y \in \mathscr{R}$ vyhovující rovnici $J(y) = 0$ je řešením (1) a naopak každé řešení $y = y(x)$ úlohy (1) vyhovuje rovnici $J(y) = 0$ a $y \in \mathscr{R}$. Buď dále $K(x, t) > 0$ funkce spojitá na kartézském čtverci N, $N = \langle x_0, x_0 + a\rangle \times \langle x_0, x_0 + a\rangle$ společně s parciální derivací $\partial K(x, t)/\partial x$; $K(x, x) \equiv 1$. Funkci $K(x, t)$ nazveme jádrem operátoru U

$$U(y) = y(x) - \int_{x_0}^{x} K(x, t)\, J(y(t))\, \mathrm{d}t$$

definovaném na prostoru $\mathscr{R}$. Operátor U zobrazuje $\mathscr{R}$ do sebe. V dalším budeme mlčky předpokládat splnění všech výše uvedených předpokladů o funkcích $f(x, y)$, $L(x)$ a $K(x, t)$.

Lemma 1. *Nechť existuje konstanta S, že pro $t, x \in \langle x_0, x_0 + a \rangle$, $t \leqq x$ platí*

$$\sup \left\{ L(x)\, K(x, t) + \left| \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \right| \right\} \leqq S\,. \tag{3}$$

Pak posloupnost funkcí $\{y_n(x)\}$ ($y_n \in \mathscr{R}$) definovaná algoritmem: $y_0 \in \mathscr{R}$ libovolný

$$y_{n+1} = U(y_n) \tag{4}$$

konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle x_0, x_0 + a \rangle$ k jedinému řešení $y(x)$ ($y \in \mathscr{R}$) úlohy (I).

Důkaz. Derivací rovnice (4) dostaneme

$$y'_{n+1}(x) = y'_n(x) - K(x, x)\, J(y_n) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\, J(y_n(t))\, dt =$$
$$= f(x, y_n) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\, J(y_n(t))\, dt$$

odtud

$$J(y_{n+1}) = y'_{n+1}(x) - f(x, y_{n+1}) = f(x, y_n) - f(x, y_{n+1}) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\, J(y_n(t))\, dt\,.$$

Užitím nerovností (2) a (3)

$$|J(y_{n+1})| \leqq L(x)\, |y_{n+1}(x) - y_n(x)| + \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \right| . \, |J(y_n(t))|\, dt \leqq \tag{5}$$
$$\leqq \int_{x_0}^{x} \left\{ L(x)\, K(x, t) + \left| \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \right| \right\} |J(y_n(t))|\, dt \leqq S \int_{x_0}^{x} |J(y_n(t))|\, dt\,.$$

Označme nyní $R = \max\limits_{x_0 \leqq x \leqq x_0 + a} |J(y_0(x))|$. Pak $|J(y_1)| \leqq RS(x - x_0)$, $|J(y_2)| \leqq$ $\leqq RS^2(x - x_0)^2/2!$, obecně

$$|J(y_n)| \leqq RS^n \frac{(x - x_0)^n}{n!}\,.$$

Proto řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} J(y_k)$ konverguje na intervalu $\langle x_0, x_0 + a \rangle$ stejnoměrně. Dále platí

$$y_n(x) = y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) =$$
$$= y_0(x) - \int_{x_0}^{x} K(x, t)\, \{J(y_0(t)) + J(y_1(t)) + \ldots + J(y_{n-1}(t))\}\, dt\,.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{y_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ k funkci $y(x)$

$$(6) \quad y(x) = y_0(x) - \int_{x_0}^{x} K(x, t) \{J(y_0(t)) + J(y_1(t)) + \ldots + J(y_n(t)) + \ldots\} \, dt$$

o které dokážeme, že je řešením úlohy (1). Za tím účelem definujeme $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$z_n(x) = y(x) - y_n(x) + \int_{x_0}^{x} [f(t, y_n) - f(t, y)] \, dt + \int_{x_0}^{x} J(y_n(t)) \, dt$$

kde za $y(x)$ dosadíme pravou stranu rovnosti (6). Posloupnost funkcí $\{z_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ k nule. $z_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ můžeme rovněž vyjádřit ve tvaru $z_n(x) = y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y) \, dt$ a limitním přechodem dostaneme $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y) \, dt$. Zbývající část tvrzení lemmatu (jednoznačnost řešení úlohy (1)) plyne z předpokladu (3), který zaručuje ohraničenost funkce $L(x)$ na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ ($K(x, x) \equiv 1$ a $|\partial K(x, t)/\partial x|$ je na N ohraničená).

Poznámka 1: Klademe-li $K(x, t) \equiv 1$, je algoritmus (4) tvaru: $y_0 \in \mathscr{R}$ libovolný, $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n) \, dt$, což je algoritmus Picard-Lindelöf.

Algoritmus (4) zobecníme nyní takto. V algoritmu (4) operátor U je stejný pro výpočet všech funkcí $y_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nyní posloupnost funkcí $\{y_n(x)\}$ definujeme algoritmem

$$(7) \qquad y_0 \in \mathscr{R} \text{ libovolný}, \quad y_{n+1} = U_n(y_n) ;$$

přitom operátor U_n je na $\mathscr{R}$ definován takto

$$U_n(y) = y(x) - \int_{x_0}^{x} K_n(x, t) \, J(y(t)) \, dt$$

(operátory U a U_n se liší pouze výběrem jader $K(x, t)$ a $K_n(x, t)$). Pokud $K_n(x, t) \equiv$ $\equiv K(x, t)$ na N při libovolném n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, je $U_n(y) = U(y)$ a algoritmus (4) splývá s algoritmem (7).

Buď $\mathscr{L} \subset \mathscr{R}$ a označme písmenem $\mathscr{S}$ množinu všech funkcí $y = y(x, t)$ definovaných na kartézském čtverci N $(N = \langle x_0, x_0 + a\rangle \times \langle x_0, x_0 + a\rangle)$, které mají tyto vlastnosti:

a) nabývají pouze kladných hodnot,

b) jsou spojité společně s první parciální derivací dle x,

c) $y(x, x) \equiv 1$ $(x \in \langle x_0, x_0 + a\rangle)$.

Budeme dále označovat $F(\alpha, \beta; x, t)$ každý operátor definovaný na $\mathscr{H} = \mathscr{L} \times \mathscr{L}$ a zobrazující $\mathscr{H}$ do množiny $\mathscr{S}$. Tak např. má-li funkce $f(x, y)$ ($f(x, y)$ – pravá strana rovnice (1')) spojitou parciální derivaci dle y na množině M a $\mathscr{L} = \{y \in$

$\in \mathscr{R} \mid y \leqq \gamma \leqq z;\ y, z \in \mathscr{R}\}$, jsou výše uvedené podmínky splněny pro operátor

$$F(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x \frac{f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))}{\alpha(s) - \beta(s)} \, ds .$$

Má tedy smysl uvažovat např. $(\partial F/\partial x)(\alpha, \beta; x, t)$ apod. Tak pro výše uvedený příklad je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, \beta; x, t) = \frac{f(x, \alpha) - f(x, \beta)}{\alpha(x) - \beta(x)} \exp \int_t^x \frac{f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))}{\alpha(s) - \beta(s)} \, ds .$$

O jádrech $K_n(x, t)$ operátorů U_n v dalším předpokládáme, že se dají vyjádřit ve tvaru $K_n(x, t) = F(\alpha, \beta; x, t)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, kde funkce $\alpha, \beta (\alpha, \beta \in \mathscr{L})$ závisí na indexu n. Tuto závislost vyjádříme zápisem α_n, β_n a předchozí rovnost zapíšeme $K_n(x, t) = F(\alpha_n, \beta_n; x, t)$.

Účelem tohoto zobecnění je snaha využít na daném n-tém kroku $(n \geqq 1)$ algoritmu (7) v jádru $K_n(x, t) = F(\alpha_n, \beta_n; x, t)$ operátoru U_n funkcí $y_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$, které jsme algoritmem (7) vypočítali v předchozích krocích (v našich úvahách prakticky využijeme pouze funkce vypočtené v předchozím $(n - 1)$-tém kroku).

Následující lemma udává postačující podmínky pro operátor $F(\alpha, \beta; x, t)$, aby posloupnost $\{y_n(x)\}$ definovaná algoritmem (7) konvergovala stejnoměrně na $\langle x_0, x_0 + a \rangle$ k řešení (jedinému) úlohy (1).

Lemma 2. *Nechť existují konstanty C a S takové, že $F(\alpha, \beta; x, t) \leqq C$,*

$$\sup_{t \leqq x} \left\{ L(x)\, F(\alpha, \beta; x, t) + \left| \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, \beta; x, t) \right| \right\} \leqq S \tag{8}$$

pro $(t, x) \in N$, $\alpha, \beta \in \mathscr{L} \subset \mathscr{R}$. Pak posloupnost $\{y_n(x)\}$ definovaná algoritmem (7) konverguje stejnoměrně k jedinému řešení úlohy (1) na $\langle x_0, x_0 + a \rangle$ pro každé $\alpha_n, \beta_n \in \mathscr{L}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

D ů k a z. Podobně jako v důkazu lemmatu 1 se lehce odvodí $(R = \max_{x_0 \leqq x \leqq x_0 + a} |J(y_0)|)$

$$|J(y_n)| \leqq RS^n \frac{(x - x_0)^n}{n!} .$$

Proto řada $\sum_{k=0}^{\infty} J(y_k)$ konverguje na $\langle x_0, x_0 + a \rangle$ stejnoměrně. Dále platí

$$y_n(x) = y_0(x) - \int_{x_0}^x F(\alpha_0, \beta_0; x, t)\, J(y_0(t))\, dt - \ldots -$$

$$- \int_{x_0}^x F(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; x, t)\, J(y_{n-1}(t))\, dt .$$

Položme

$$y(x) = y_0(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} F(\alpha_k, \beta_k; x, t)\, J(y_k(t))\, \mathrm{d}t$$

(řada $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} F(\alpha_k, \beta_k; x, t)\, J(y_k(t))\, \mathrm{d}t$ konverguje na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ stejnoměrně, což plyne z nerovnosti $\sum_{k=0}^{\infty} |F(\alpha_k, \beta_k; x, t)\, J(y_k(t))\, \mathrm{d}t| \leqq C \sum_{k=0}^{\infty} |J(y_k)|$). Pak $\{y_n(x)\}$ konverguje na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ stejnoměrně k funkci $y(x)$. Skutečně

$$|y(x) - y_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \int_{x_0}^{x} F(\alpha_k, \beta_k; x, t)\, J(y_k(t))\, \mathrm{d}t \right| \leqq CR \sum_{k=n}^{\infty} S^k \frac{(x - x_0)^k}{k!}\,.$$

Zbývající část tvrzení se dokáže stejně, jako v důkazu lemmatu 1.

Definice. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{y_n(x)\}$, $y_n \in \mathscr{R}$ je *Čaplyginova typu* na intervalu $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ pro úlohu (1) s definičním oborem M [1]) která má na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ jediné řešení, když jsou splněny následující dvě podmínky:

1. $\{y_n(x)\}$ konverguje na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ stejnoměrně k řešení úlohy (1).
2. $y_{n+1} \geqq y_n (y_{n+1} \leqq y_n)$; $J(y_n) \leqq 0 (J(y_n) \geqq 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Řekneme pak také, že $\{y_n(x)\}$ aproximuje zdola (shora) řešení úlohy (1).

V důkazu věty 1 užijeme Čaplyginovy věty o diferenciálních nerovnostech pro diferenciální rovnice 1. řádu kterou, pro lepší porozumění důkazu věty 1, uvedeme jako lemma 3 v následujícím znění (srovnej např. [3] a [6]).

Lemma 3. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 1, $y_0 \in \mathscr{R}$ *a* $J(y_0) \leqq 0$ $(J(y_0) \geqq 0)$. *Pak platí nerovnost*

$$y \geqq y_0 \quad (y \leqq y_0)$$

kde $y \doteq y(x)$ *je řešení úlohy* (1).

Věta 1. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 2 *pro operátory* $F_i(\alpha, \beta; x, t)$ $(i = 1, 2)$; $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$. *Množina* $\mathscr{L} \subset \mathscr{R}$ *nechť má tu vlastnost, že s libovolnými dvěma prvky* y, $z \in \mathscr{L}$, $y \leqq z$ *obsahuje i každý prvek* $\alpha \in \mathscr{R}$ *pro který* $y \leqq \alpha \leqq z$. $P_i(\alpha, \beta; x)$ [2]) $(i = 1, 2)$ *buďte takové operátory, které splňují nerovnosti* $(x \in \langle x_0, x_0 + a\rangle)$

1. *pro libovolné* $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathscr{L}$; $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \beta$

$$(9') \qquad f(x, \alpha_1) - f(x, \alpha_2) - P_1(\alpha_1, \beta; x)\,(\alpha_1(x) - \alpha_2(x)) \leqq 0$$

---

[1]) Definičním oborem úlohy (1) nazýváme definiční obor funkce $f(x, y)$.

[2]) $P_i(\alpha, \beta; x)$ je operátor zobrazující $\mathscr{H} = \mathscr{L} \times \mathscr{L}$ do prostoru spojitých funkcí proměnné x $(x \in \langle x_0, x_0 + a\rangle)$.

2. *pro libovolné* $\alpha, \beta_2, \beta_1 \in \mathscr{L}$; $\alpha \leqq \beta_2 \leqq \beta_1$

$$f(x, \beta_1) - f(x, \beta_2) - P_2(\alpha, \beta_1; x)(\beta_1(x) - \beta_2(x)) \geqq 0 \tag{9''}$$

a rovnice

$$\frac{\partial F_i}{\partial x}(\alpha, \beta; x, t) = P_i(\alpha, \beta; x) F_i(\alpha, \beta; x, t) \quad (i = 1, 2). \tag{10}$$

Konečně nechť v $\mathscr{L}$ *existují prvky* y_0, z_0 *takové, že* $J(y_0) \leqq 0 \leqq J(z_0)$. *Pak posloupnosti funkcí* $\{y_n(x)\}$ *a* $\{z_n(x)\}$ *definované algoritmy*

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} F_1(y_n, z_n; x, t)\, J(y_n(t))\, dt \tag{11'}$$

$$z_{n+1}(x) = z_n(x) - \int_{x_0}^{x} F_2(y_n, z_n; x, t)\, J(z_n(t))\, dt \tag{11''}$$

jsou Čaplyginova typu. Přitom $\{y_n(x)\}$ *je posloupnost dolních a* $\{z_n(x)\}$ *posloupnost horních aproximací řešení* (1).

Důkaz. Nejprve poznamenejme, že z předpokladu (10) a podmínky $F_i(\alpha, \beta; x, x) \equiv \equiv 1$ plyne

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(\alpha, \beta; x, t) = -P_i(\alpha, \beta; t) F_i(\alpha, \beta; x, t)$$

a z lemmatu 3 $y_0 \leqq z_0$. Užitím předpokladu $J(z_0) \geqq 0$ dostaneme nerovnost ($F_1(y_0, z_0; x, t) > 0$)

$$y_0(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} F_1(y_0, z_0; x, t)\, J(y_0(t))\, dt \geqq$$

$$\geqq \int_{x_0}^{x} F_1(y_0, z_0; x, t)\, [J(y_0(t)) - J(z_0(t))]\, dt.$$

Integrací per partes ($y_0(x_0) = z_0(x_0)$)

$$y_0(x) - y_1(x) \geqq \int_{x_0}^{x} F_1(y_0, z_0; x, t)\, [J(y_0(t) - J(z_0(t))]\, dt =$$

$$= F_1(y_0, z_0; x, t)(y_0(t) - z_0(t))\Big|_{t=x_0}^{t=x} -$$

$$- \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_1}{\partial t}(y_0, z_0; x, t)(y_0(t) - z_0(t))\, dt +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} F_1(y_0, z_0; x, t)(f(t, z_0) - f(t, y_0))\, dt =$$

$$= y_0(x) - z_0(x) + \int_{x_0}^{x} F_1(y_0, z_0; x, t)\{f(t, z_0) - f(t, y_0) +$$

$$+ P_1(y_0, z_0; t)(y_0(t) - z_0(t))\}\, dt \geqq y_0(x) - z_0(x).$$

Poslední nerovnost plyne z nerovnosti (9'), kde $\alpha_1 = y_0$, $\alpha_2 = \beta = z_0$. Odtud $y_0 \leqq y_1 \leqq z_0$ a $y_1 \in \mathscr{L}$. Dále vypočteme $J(y_1)$ užitím předpokladu (10)

$$J(y_1) = y_1'(x) - f(x, y_1) = y_0'(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_1}{\partial x}(y_0, z_0; x, t)\, J(y_0(t))\, \mathrm{d}t -$$

$$- J(y_0)\, F_1(y_0, z_0; x, x) - f(x, y_1) = f(x, y_0) - f(x, y_1) -$$

$$- P_1(y_0, z_0; x) \int_{x_0}^{x} F_1(y_0, z_0; x, t)\, J(y_0(t))\, \mathrm{d}t = f(x, y_0) - f(x, y_1) -$$

$$- P_1(y_0, z_0; x)\,(y_0(x) - y_1(x)) \leqq 0\,.$$

Poslední nerovnost plyne z (9') kde $\alpha_1 = y_0$, $\alpha_2 = y_1$, $\beta = z_0$. Zcela analogicky jako v případě prvku y_1 se dokáže o z_1, $y_0 \leqq z_1 \leqq z_0$, $J(z_1) \geqq 0$. Nerovnost $y_1 \leqq z_1$ plyne z lemmatu 3. Úplnou indukcí se lehce dokáže splnění podmínky 2 v definici posloupnosti Čaplyginova typu pro úlohu (1). Protože splnění předpokladů lemmatu 2 zajišťuje splnění podmínky 1 v definici posloupnosti Čaplyginova typu, je tvrzení věty dokázáno zcela.

Poznámka 2. Jestliže prvky y_0, z_0 prostoru $\mathscr{R}$ vyhovují nerovnostem $J(y_0) \leqq 0$, $J(z_0) \geqq 0$, $y_0 \leqq z_0$, pak podmnožinu $\mathscr{L}$ prostoru $\mathscr{R}$ definujeme $\mathscr{L} = \{\gamma \in \mathscr{R} \mid y_0 \leqq \leqq \gamma \leqq z_0\}$; místo množiny M $(M = \langle x_0, x_0 + a\rangle \times (-\infty, \infty))$ lze uvažovat množinu M', $M' = \langle x_0, x_0 + a\rangle \times \langle A, B\rangle$ $(A = \min\limits_{x_0 \leqq x \leqq x_0 + a} y_0(x)$, $B = \max\limits_{x_0 \leqq x \leqq x_0 + a} z_0(x))$.

Poznámka 3. V případě, že $F_1(\alpha, \beta; x, t) \equiv F_2(\alpha, \beta; x, t)$ $(\alpha, \beta \in \mathscr{L})$ značíme dále jejich společnou hodnotu $F(\alpha, \beta; x, t)$.

Použití věty 1 ukážeme na následujících příkladech. V příkladě 1, 2, 3, 6 pro zjevnou viditelnost nerozepisujeme zvlášť algoritmy horních a dolních aproximací. Splnění předpokladů věty 1 ukážeme např. pro první část příkladu 5 (podobně se ověření předpokladů věty 1 vede také v ostatních příkladech), který mezi uvedenými je nejkomplikovanější. Ve všech příkladech mlčky předpokládáme existenci všech parciálních derivací, které v nich vystupují.

Příklad 1. Nechť $f(x, y_1) \leqq f(x, y_2)$ pro libovolné $y_1, y_2, y_1 \leqq y_2$. Klademe $F(\alpha, \beta; x, t) \equiv 1$. Algoritmus (11) je tvaru (viz [1], [4])

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\, \mathrm{d}t\,.$$

Příklad 2. Nechť $L(x)$ je spojitá funkce, která splňuje nerovnost (2). Klademe $F(\alpha, \beta; x, t) = \exp\left(-\int_t^x L(s)\, \mathrm{d}s\right)$. Pak $P(\alpha, \beta; x) = -L(x)$ a algoritmus (11) je tvaru (viz [8])

$$y_{n+1}(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} L(s)\, \mathrm{d}s\right) + \int_{x_0}^{x} [L(t)\, y_n(t) + f(t, y_n)] \exp\left(-\int_{t}^{x} L(s)\, \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t\,.$$

Příklad 3. Nechť existují konstanty m a K takové, že v M' platí nerovnosti $m \leqq \partial f(x, y)/\partial y \leqq K$.

Klademe-li:

a) $F(\alpha, \beta; x, t) = e^{m(x-t)}$, pak $P(\alpha, \beta; x) = m$ a algoritmus (11) je tvaru (viz [2])

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} e^{m(x-t)} J(y_n(t)) \, dt$$

b) $F(\alpha, \beta; x, t) = e^{-L(x-t)}$, pak $P(\alpha, \beta; x, t) = -L$ kde $L = \max \{|K|, |m|\}$. Algoritmus (11) je tvaru (viz [3], [7])

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} e^{-L(x-t)} J(y_n(t)) \, dt$$

c) $F(\alpha, \beta; x, t) \equiv 1$ jestliže $m \geqq 0$, dostaneme algoritmus příkladu 1.

Příklad 4. Nechť v M' existuje spojitá parciální derivace $\partial f(x, y)/\partial y$; $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 \geqq 0$. Klademe-li $F(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x (\partial f(s, \alpha(s))/\partial y) \, ds$, pak $P(\alpha, \beta; x) = \partial f(x, \alpha)/\partial y$ a algoritmus (11) je tvaru

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{\partial f(s, y_n)}{\partial y} \, ds\right) J(y_n(t)) \, dt ,$$

$$z_{n+1}(x) = z_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{\partial f(s, y_n)}{\partial y} \, ds\right) J(z_n(t)) \, dt .$$

V případě, že v M' je $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 \leqq 0$, klademe $F(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x \partial f(s, \beta(s))/\partial y) \, ds$. Pak

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{\partial f(s, z_n)}{\partial y} \, ds\right) J(y_n(t)) \, dt ,$$

$$z_{n+1}(x) = z_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{\partial f(s, z_n)}{\partial y} \, ds\right) J(z_n(t)) \, dt .$$

Příklad 5. Jestliže v M' $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 \geqq 0$ a $\partial f(x, y)/\partial y$ je spojitá funkce, klademe

$$F_1(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x \frac{\partial f(s, \alpha(s))}{\partial y} \, ds \qquad \text{pak } P_1(\alpha, \beta; x) = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial y}$$

$$F_2(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x \frac{f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))}{\alpha(s) - \beta(s)} \, ds \text{ pak } P_2(\alpha, \beta; x) = \frac{f(x, \alpha) - f(x, \beta)}{\alpha(x) - \beta(x)} .$$

Algoritmus (11) je tvaru (viz [6])

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{\partial f(s, y_n)}{\partial y} \, ds\right) J(y_n(t)) \, dt ,$$

$$z_{n+1}(x) = z_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{f(s, y_n) - f(s, z_n)}{y_n(s) - z_n(s)} \, ds\right) J(z_n(t)) \, dt .$$

Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 1. V M' je $\partial f(x, y)/\partial y$ spojitá (tedy v absolutní hodnotě ohraničená konstantou T) a proto $F_i(\alpha, \beta; x, t)$ zobrazuje $\mathscr{H}$ do $\mathscr{S}$ a $P_i(\alpha, \beta; x)$ je pro pevné $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$ spojitá funkce na $\langle x_0, x_0 + a\rangle$. Dále na $\mathscr{H}$ platí nerovnosti $|F_i(\alpha, \beta; x, t)| \leqq e^{aT}$, $|\partial F_i/\partial x\,(\alpha, \beta; x, t)| \leqq T \,.\, e^{aT}$. $F_i(\alpha, \beta; x, t)$ splňuje předpoklady lemmatu 2 když $C = e^{aT}$, $S = 2T \,.\, e^{aT}$. Užitím podmínky $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 \geqq 0$ dokážeme závěrem nerovnosti:

a) když $y_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \beta \leqq z_0$ pak

$$f(x, \alpha_1) - f(x, \alpha_2) - P_1(\alpha_1, \beta; x)\,(\alpha_1(x) - \alpha_2(x)) = f(x, \alpha_1) - f(x, \alpha_2) -$$
$$- \frac{\partial f(x, \alpha_1)}{\partial y}(\alpha_1(x) - \alpha_2(x)) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, \Theta)}{\partial y^2}(\alpha_2(x) - \alpha_1(x))^2 \leqq 0\,,$$
$$(\alpha_1(x) \leqq \Theta(x) \leqq \alpha_2(x))\,.$$

b) když $y_0 \leqq \alpha \leqq \beta_2 \leqq \beta_1 \leqq z_0$ pak

$$f(x, \beta_1) - f(x, \beta_2) - P_2(\alpha, \beta_1; x)\,(\beta_1(x) - \beta_2(x)) =$$
$$= f(x, \beta_1) - f(x, \beta_2) - \frac{f(x, \alpha) - f(x, \beta_1)}{\alpha(x) - \beta_1(x)}(\beta_1(x) - \beta_2(x)) =$$
$$= \frac{\partial f(x, \Theta_1)}{\partial y}(\beta_1(x) - \beta_2(x)) - \frac{\partial f(x, \Theta_2)}{\partial y}(\beta_1(x) - \beta_2(x)) =$$
$$= \frac{\partial^2 f(x, \Theta_3)}{\partial y^2}(\beta_1(x) - \beta_2(x))\,(\Theta_1(x) - \Theta_2(x)) \geqq 0\,,$$
$$(\alpha(x) \leqq \Theta_2(x) \leqq \Theta_3(x) \leqq \Theta_1(x) \leqq \beta_1(x)\,^{3)})\,.$$

Jestliže je v M' $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 \leqq 0$, pak podobně jako v příkladě 4

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{f(s, y_n) - f(s, z_n)}{y_n(s) - z_n(s)}\,\mathrm{d}s\right) J(y_n(t))\,\mathrm{d}t\,,$$
$$z_{n+1}(x) = z_n(x) - \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x \frac{\partial f(s, z_n)}{\partial y}\,\mathrm{d}s\right) J(z_n(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad 6. Jestliže v M' jsou $\partial f(x, y)/\partial y$, $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2$ spojité funkce; $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 \leqq 0$, $\partial^3 f(x, y)/\partial y^3 \geqq 0$ klademe

$$F_1(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x \left\{\frac{\partial f(s, \alpha(s))}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(s, \alpha(s))}{\partial y^2}(\beta(s) - \alpha(s))\right\} \mathrm{d}s$$

$$\text{pak} \quad P_1(\alpha, \beta; x) = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial y^2}(\beta(x) - \alpha(x))\,,$$

---

[3]) Nerovnost $\Theta_2(x) \leqq \Theta_1(x)$ neplyne bezprostředně z Taylorova vzorce. Důkaz nerovnosti neuvádíme.

$$F_2(\alpha, \beta; x, t) = \exp \int_t^x \left\{ \frac{\partial f(s, \beta(s))}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s, \beta(s))}{\partial y^2} (\beta(s) - \alpha(s)) \right\} \mathrm{d}s$$

$$\text{pak} \quad P_2(\alpha, \beta; x) = \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, \beta)}{\partial y^2} (\beta(x) - \alpha(x))$$

a algoritmus (11) je tvaru

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_{x_0}^x \exp\left(\int_t^x \left\{ \frac{\partial f(s, y_n)}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s, y_n)}{\partial y^2} (z_n(s) - y_n(s)) \right\} \mathrm{d}s \right) J(y_n(t)) \, \mathrm{d}t \,,$$

$$z_{n+1}(x) = z_n(x) - \int_{x_0}^x \exp\left(\int_t^x \left\{ \frac{\partial f(s, z_n)}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s, z_n)}{\partial y^2} (z_n(s) - y_n(s)) \right\} \mathrm{d}s \right) J(z_n(t)) \, \mathrm{d}t \,.$$

Aproximací Čaplyginova typu lze užít jako analytické metody přibližného řešení úlohy (1) (viz [3], [5]). V následujících dvou větách bude proveden odhad chyby této metody.

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a pro* $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$, $x \in \langle x_0, x_0 + a \rangle$ *platí nerovnosti:*

1. $|P_i(\alpha, \beta; x)| \leqq T_i$, $(i = 1, 2)$,
2. $|f(x, y_n + {}^1\varrho_n) - f(x, y_n) - P_1(y_n, y; x) \,.\, {}^1\varrho_n(x)| \leqq K_1 |{}^1\varrho_n(x)|^k$,
   $|f(x, z_n + {}^2\varrho_n) - f(x, z_n) - P_2(y, z_n; x) \,.\, {}^2\varrho_n(x)| \leqq K_2 |{}^2\varrho_n(x)|^k$,
3. $|{}^i\varrho_0(x)| \leqq A_i$, $(i = 1, 2)$

kde T_i, K_i, A_i, $k > 1$ *jsou vhodné konstanty a* ${}^1\varrho_n(x) = y(x) - y_n(x)$, ${}^2\varrho_n(x) = y(x) - z_n(x)$ $(y = y(x)$ *— řešení úlohy* (1)). *Pak pro všechna n splňující nerovnost* $k^{n-3} + \sum_{j=1}^{n-3} k^j \geqq n - 2$ *platí odhad*

$$|{}^i\varrho_{n+1}(x)| < A_i^{k^{n+1}} \,.\, L_i^{(k^{n+1}-1)/(k-1)} \,.\, \frac{1}{k^{k^{n-1}+k^{n-3}} \,.\, s_2^{(k^{n-1}-1)/(k-1)}} \,, \tag{12}$$

kde $s_2 = k^2 + k + 1$, $L_i = a \,.\, K_i \,.\, e^{aT_i}$.

D ů k a z. Důkaz provedeme pro případ $i = 1$. Nalezneme funkci $\sigma_n(x)$, aby platila rovnice

$$y(x) = y_n(x) + \sigma_n(x) + {}^1\varrho_{n+1}(x) \,.$$

Derivací poslední rovnice dostaneme $(y' = f(x, y_n + {}^1\varrho_n))$

$$y'(x) = y_n'(x) + \sigma_n'(x) + {}^1\varrho_{n+1}'(x) = f(x, y_n + {}^1\varrho_n)$$

a odtud pouze vhodným rozepsáním členů $({}^1\varrho_{n+1}(x) = {}^1\varrho_n(x) - \sigma_n(x))$

$$\begin{aligned} {}^1\varrho_{n+1}'(x) &= f(x, y_n + {}^1\varrho_n) - y_n'(x) - \sigma_n'(x) = \\ &= \{-J(y_n) + P_1(y_n, y; x)\,\sigma_n(x) - \sigma_n'(x)\} + P_1(y_n, y; x)\,{}^1\varrho_{n+1}(x) + \\ &+ \{-f(x, y_n) - P_1(y_n, y; x)\,{}^1\varrho_n(x) + f(x, y_n + {}^1\varrho_n)\}\,. \end{aligned}$$

Nyní $\sigma_n(x)$ zvolíme tak, aby byla řešením diferenciální rovnice

$$\sigma_n'(x) = P_1(y_n, y; x)\,\sigma_n(x) - J(y_n)$$

s počáteční podmínkou $\sigma_n(x_0) = 0$. Potom ${}^1\varrho_{n+1}(x)$ je řešením diferenciální rovnice

$${}^1\varrho_{n+1}'(x) = P_1(y_n, y; x)\,{}^1\varrho_{n+1}(x) + f(x, y_n + {}^1\varrho_n) - f(x, y_n) - P_1(y_n, y; x)\,{}^1\varrho_n(x)$$

s počáteční podmínkou ${}^1\varrho_{n+1}(x_0) = 0$, tedy

$$\begin{aligned} {}^1\varrho_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_t^x P_1(y_n, y; s)\,\mathrm{d}s\right). \\ .\{f(t, y_n + {}^1\varrho_n) - f(t, y_n) - P_1(y_n, y; t)\,{}^1\varrho_n(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Užitím předpokladů věty

$$|{}^1\varrho_{n+1}(x)| \leqq K_1\,.\,e^{aT_1}\int_{x_0}^{x} |{}^1\varrho_n(t)|^k\,\mathrm{d}t\,.$$

Odtud

$$\begin{aligned} |{}^1\varrho_1(x)| &\leqq A_1^k\,.\,K_1\,.\,e^{aT_1}(x - x_0)\,, \\ |{}^1\varrho_2(x)| &\leqq A_1^{k^2}(K_1\,.\,e^{aT_1}(x - x_0))^{k+1}\,.\,\frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

obecně

$$|{}^1\varrho_{n+1}(x)| \leqq A_1^{k^{n+1}}\,.\,L_1^{(k^{n+1}-1)/(k-1)}\,.\,\frac{1}{(k+1)^{k^{n-1}}\,.\prod_{j=2}^{n} s_j^{k^{n-j}}} \tag{13}$$

kde $s_j = k^j + k^{j-1} + \ldots + k + 1$.

V nerovnosti (13) ještě zdola odhadneme výraz $(k + 1)^{k^{n-1}} \prod_{j=2}^{n} s_j^{k^{n-j}}$. Platí $(k + 1)^{k^{n-1}} > k^{k^{n-1}}$, $s_j = k^j + k^{j-1} + \ldots + k + 1 > ks_{j-1}$ $(j \geqq 1)$ a tedy $s_j \geqq$

$$\geqq k^{j-2} s_2, \; (j \geqq 2)$$

$$\prod_{j=2}^{n} s_j^{k^{n-j}} \geqq \prod_{j=2}^{n} (k^{j-2})^{k^{n-j}} \,.\, s_2^{k^{n-j}} = k^{((k^{n-1}-k)/(k-1)^2)-(n-2)/(k-1))} \,.\, s_2^{(k^{n-1}-1)/(k-1)} =$$

$$= k^{(k^{n-3}+(k^{n-3}+\sum_{j=1}^{n-3} k^j - n + 2)/(k-1))} \,.\, s_2^{(k^{n-1}-1)/(k-1)} \,.$$

Odtud $(k^{n-3} + \sum_{j=1}^{n-3} k^j - n + 2 \geqq 0)\,(k+1)^{k^{n-1}} \prod_{j=2}^{n} s_j^{k^{n-j}} > k^{k^{n-1}+k^{n-3}} \,.\, s_2^{(k^{n-1}-1)/(k-1)}$ což bylo dokázat. Při praktickém výpočtu chyby je někdy vhodnější použít výsledek následující.

Věta 3. *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 1. *Označme* $\{y_n(x)\}$ $(\{z_n(x)\})$ *posloupnost dolních (horních) aproximací řešení úlohy* (1) *definovanou algoritmem* (11′) ((11″)). *Nechť pro* $(t, x) \in N$ *a* $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$ *platí*:

1. $F_1(\alpha, \beta; x, t) \equiv F_2(\alpha, \beta; x, t) \equiv F(\alpha, \beta; x, t)$,
2. $|f(x, z_n) - f(x, y_n) - P(y_n, z_n; x)\,(z_n(x) - y_n(x))| \leqq K(z_n(x) - y_n(x))^k$,
3. $|P(\alpha, \beta; x)| \leqq T$,
4. $z_0(x) - y_0(x) \leqq A$

kde T, K, A, $k > 1$ *jsou vhodné konstanty. Označíme-li* $L = a \,.\, K \,.\, e^{aT}$, *platí pro všechna* n *vyhovující nerovnosti* $k^{n-3} + \sum_{j=1}^{n-3} k^j \geqq n - 2$ *odhad*

$$z_{n+1}(x) - y(x) < A^{k^{n+1}} \,.\, L^{(k^{n+1}-1)/(k-1)} \,.\, \frac{1}{k^{k^{n-1}+k^{n-3}} \,.\, s_2^{(k^{n-1}-1)/(k-1)}},$$

$$y(x) - y_{n+1}(x) < A^{k^{n+1}} \,.\, L^{(k^{n+1}-1)/(k-1)} \,.\, \frac{1}{k^{k^{n-1}+k^{n-3}} \,.\, s_2^{(k^{n-1}-1)/(k-1)}},$$

kde $y = y(x)$ *je řešení úlohy* (1) *a* $s_2 = k^2 + k + 1$.

Důkaz. Pro každé n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ platí podle věty 1 nerovnosti $y_n \leqq y \leqq z_n$. Integrací per partes, užitím předpokladů 1-4 a přihlédnutím k úvodní části důkazu věty 1, dostaneme

$$z_{n+1}(x) - y_{n+1}(x) = z_n(x) - y_n(x) - \int_{x_0}^{x} F(y_n, z_n; x, t)\,(J(z_n(t)) - J(y_n(t)))\,dt =$$

$$= z_n(x) - y_n(x) - (F(y_n, z_n; x, t)\,(z_n(t) - y_n(t))|_{t=x_0}^{t=x}) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial t}(y_n, z_n; x, t)\,(z_n(t) - y_n(t))\,dt -$$

$$-\int_{x_0}^{x} F(y_n, z_n; x, t)\,(f(t, y_n) - f(t, z_n))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{x_0}^{x} F(y_n, z_n; x, t)\,\{f(t, z_n) - f(t, y_n) -$$

$$- P(y_n, z_n; t)\,(z_n(t) - y_n(t))\}\,\mathrm{d}t \leqq K \,.\, e^{aT} \,.\, \int_{x_0}^{x} (z_n(t) - y_n(t))^k\,\mathrm{d}t\,.$$

Zbytek důkazu je již zcela analogický odpovídající části důkazu věty 2.

Poznámka 4. Nechť jsou splněny předpoklady věty 3 a $k = 1$. Pak platí odhady

$$z_n(x) - y_n(x) \leqq A\left(\frac{K}{T}\right)^n (e^{aT} - 1)^n\,,$$

$$z_n(x) - y_n(x) \leqq A(a \,.\, K \,.\, e^{aT})^n \,.\, \frac{1}{n!}\,.$$

Poznámka 5. Jestliže pro úlohu (1) a operátor $F_i(\alpha, \beta; x, t)$ jsou splněny předpoklady věty 2 (věty 3 když $F_1(\alpha, \beta; x, t) \equiv F_2(\alpha, \beta; x, t)$), řekneme, že algoritmem (11) definovaná posloupnost aproximací je charakteru k (kde k vystupuje v podmínce 2). Po této definici jsou posloupnosti aproximací ve dříve uvedených příkladech 2, 3, 4, 5, 6 následujícího charakteru 1, 1, 2, 2, 3 (pokud je $\partial^k f(x, y)/\partial y^k$ v M' ohraničená).

Literatura

[1] *Бабкин, Б. Н.:* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка методом последовательных приближений на основе теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. ДАН СССР, *59* (1948), № 3, 419—422.

[2] *Бабкин, Б. Н.:* Об одной модификации метода С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования. ДАН СССР, *67* (1949), № 3, 213—216.

[3] *Березин, И. С. и Жидков, Н. П.:* Методы вычислений. Физматгиз, 1959, том 2, 260—277.

[4] *Borůvka O.:* Diferenciálne rovnice (vysokoškolské učebné texty), SPN Bratislava 1961.

[5] *Демидович, Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э.:* Численные методы анализа. Физматгиз, 1962, 209—221.

[6] *Лузин, Н. Н.:* Собрание сочинений. Физматгиз, 1959, том 3, 143—208.

[7] *Quade W.:* Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$. Math. Zeitsch., *48*, 1942—1943, 314—368.

[8] *Voráček J.:* Poznámka o postupných aproximacích řešení obyčejné diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$. Acta UP Olomucensis FRN, 12.

Adresa autora: Olomouc, Gottwaldova 15, (Přírodovědecká fakulta UP).

Zusammenfassung

EINE VERALLGEMEINERUNG DER METHODE PICARD-LINDELÖF DER SCHRITTWEISEN ANNÄHERUNG DER LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y' = f(x, y)$

SVATOSLAV STANĚK, Olomouc

Die schrittweisen Annäherungen der Lösungen der Aufgabe (1) werden durch den Algorithmus (7) definiert – der Algorithmus hängt von der Wahl des Kernes $K_n(x, y)$ ab. Im Satz 1 sind genügende Bedingungen angeführt, unter welchen diese Annäherungen von Tschaplyginschem Typ sind. Durch spezielle Wahl des Kernes werden einige spezielle Algorithmen hergeleitet. Die Annäherungen des Tschaplyginschen Typs können als analytische Methode der angehnäherten Lösung von Differentialgleichungen benützt werden. Zum Schluss ist eine Abschätzung des Fehlers der Methode angegeben (Sätze 2,3).