Miloš Novotný

Dvě věty o Laplaceově transformaci reálných periodických funkcí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 284--298

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117625`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

DVĚ VĚTY O LAPLACEOVĚ TRANSFORMACI REÁLNÝCH PERIODICKÝCH FUNKCÍ

MILOŠ NOVOTNÝ, Praha

(Došlo dne 10. dubna 1967)

Pokud nebude řečeno jinak, budeme pod měrou resp. integrálem rozumět Lebesgueovu míru resp. Lebesgueův integrál v E_1. Tzv. zobecněné nevlastní nebo neabsolutně konvergentní integrály nebudeme nikde potřebovat. Komplexní funkci f nazvem lokálně integrabilní, jestliže $\int_a^b |f(t)|\, dt < +\infty$ pro všechna a, b taková, že $-\infty < a < b < +\infty$.

Jestliže $q \in (0, +\infty)$, označíme $L^q(0, 2\pi)$ množinu všech měřitelných komplexních funkcí v $\langle 0, 2\pi \rangle$ takových, že $\int_0^{2\pi} |f(t)|^q\, dt < +\infty$. Místo $L^1(0, 2\pi)$ budeme psát stručněji $L(0, 2\pi)$.

Pro všechna konečná komplexní p, pro něž existuje integrál $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ z reálné nebo komplexní funkce f, nazveme tento integrál Laplaceovým integrálem nebo Laplaceovou transformací funkce f.

Z teorie Fourierových řad je všeobecně známa věta, že Fourierův rozvoj periodické reálné lokálně integrabilní funkce $f(t) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ lze bez ohledu na jeho konvergenci integrovat člen po členu od nuly do libovolného $x \in \in (-\infty, +\infty)$. Dokážeme, že tento Fourierův rozvoj lze dokonce podrobit Laplaceově transformaci člen po členu. Z toho odvodíme nutnou a postačující podmínku pro to, aby funkce $F(p)$ byla pro $\operatorname{Re} p \in (0, +\infty)$ Laplaceovým integrálem reálné funkce třídy $L(0, 2\pi)$ s periodou 2π, a dále vzorec pro rozklad analytického pokračování tohoto Laplaceova integrálu na částečné zlomky s reálnými koeficienty.

Nejdříve uvedeme dvě pomocné věty.

1. Lemma. *Předpokládejme*:

1) *Platí*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt \quad \textit{pro každé } b \in \langle a, +\infty),$$

kde všechny integrály konvergují.

2) *Konverguje integrál* $\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt$ *a řada* $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(t)\, dt$.

3) $\lim_{b \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_b^{+\infty} f_k(t)\, dt = 0$.

Potom

$$\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(t)\, dt\,. \tag{1}$$

Důkaz. Z předpokladů 1) až 3) plyne, že

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \int_a^{b} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt + \int_b^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt &&(2)\\ &\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{b} f_k(t)\, dt + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_b^{+\infty} f_k(t)\, dt &&(3)\end{aligned}\right\} \text{pro} \quad b \in \langle a, +\infty),$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_b^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = 0\,. \tag{4}$$

Podle 1) a 2) můžeme odečíst (3) od (2). Podle 1) vyjde

$$\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(t)\, dt = \int_b^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_b^{+\infty} f_k(t)\, dt$$

pro $b \in \langle a, +\infty)$. Protože levá strana nezávisí na b a pravá strana podle (4) a (3) konverguje k nule pro $b \to +\infty$, musí platit (1).

2. Lemma. *Předpokládejme*:

1) $-\infty < a \leqq b < +\infty$.

2) *Reálná lokálně integrabilní funkce* f *má periodu* 2π *a Fourierův rozvoj*

$$f(t) \approx a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,.$$

3) *Reálná funkce* φ *má konečnou variaci v* $\langle a, b\rangle$. *Potom*

$$\int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, dt = a_0 \int_a^b \varphi(t)\, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \int_a^b \varphi(t) \cos kt\, dt + b_k \int_a^b \varphi(t) \sin kt\, dt \right],$$

kde všechny integrály konvergují.

Důkaz viz [1], str. 220–221.

3. Odvodíme ještě několik dalších pomocných výsledků. Všude v tomto odstavci bude znamenat k celé a p konečné komplexní číslo.

Jestliže $R \in \langle 0, +\infty)$ a jestliže k_0 je nejmenší celé číslo větší než R, snadno zjistíme, že

$$\left|\frac{1}{k^2 + p^2}\right| \leqq \frac{k_0^2}{k_0^2 - R^2}\frac{1}{k^2}, \quad \left|\frac{k^2}{k^2 + p^2}\right| \leqq \frac{k_0^2}{k_0^2 - R^2} \quad \text{pro} \quad k > R \quad \text{a} \quad |p| \leqq R. \tag{5}$$

Jestliže $R \in \langle 0, +\infty)$ a $|a_k| \leqq A < +\infty$ pro $k = 1, 2, \ldots$, plyne z první nerovnosti podle majorantního kriteria, že řada $\sum_{k>R} (pa_k/k^2 + p^2)$ konverguje absolutně a stejnoměrně pro všechna $|p| \leqq R$. Jestliže $|a_k| \leqq A < +\infty$ pro $k = 1, 2, \ldots$, konverguje tedy řada $\sum_{k=1}^{+\infty} (pa_k/k^2 + p^2)$ absolutně pro každé $p \neq \pm i, \pm 2i, \ldots$.

Z druhé nerovnosti (5) dále plyne, že ke každému $p \neq \pm i, \pm 2i, \ldots$ existuje $B \in (0, +\infty)$ takové, že $|k^2/(k^2 + p^2)| \leqq B$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$.

4. Věta. *Předpokládejme:*

1) *f je reálná lokálně integrabilní funkce s periodou 2π.*

2) $f(t) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$.

Potom pro Re $p \in (0, +\infty)$ *lze Fourierovu řadu pro f podrobit Laplaceově transformaci člen po členu, tj.*

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = a_0 \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos kt\, dt + \right.$$
$$\left. + b_k \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin kt\, dt \right) = \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2} \quad \textit{pro} \quad \text{Re}\, p \in (0, +\infty), \tag{6}$$

kde všechny Laplaceovy integrály konvergují.

Důkaz. Pro každé $T \in \langle 0, +\infty)$ a každé $p = x + iy$, kde $x, y \in (-\infty, +\infty)$, mají funkce $\varphi_1(t) = \text{Re}\, e^{-pt} = e^{-xt} \cos yt$ a $\varphi_2(t) = \text{Im}\, e^{-pt} = -e^{-xt} \sin yt$ konečnou variaci v $\langle 0, T\rangle$, takže podle 1), 2) a 2. lze Fourierovu řadu ze 2) vynásobit funkcí φ_1 nebo funkcí φ_2 a integrovat člen po členu od nuly do T; všechny integrály přitom konvergují. Z obou takto získaných výsledků plyne ihned, že

$$\int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt = a_0 \int_0^T e^{-pt}\, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_0^T e^{-pt} \cos kt\, dt + b_k \int_0^T e^{-pt} \sin kt\, dt \right) \quad \text{pro} \quad T \in \langle 0, +\infty) \quad \text{a} \quad p \neq \infty, \tag{7}$$

kde všechny integrály konvergují.

Zvolme nyní až do konce důkazu pevně libovolné $p = x + iy$ takové, že $\operatorname{Re} p = x \in (0, +\infty)$ a $y \in (-\infty, +\infty)$. Funkce e^{-pt} je pak omezená v $\langle 0, +\infty)$. Podle 1) má $|f|$ periodu 2π a podle 2) $|f| \in L(0, 2\pi)$, takže $|f|$ je měřitelná v $\langle 0, 2\pi \rangle$. Existuje tedy integrál $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-xt}\, dt$. Podle 1)

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-xt}\, dt = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \int_{2\pi\alpha}^{2\pi(\alpha+1)} |f(t)|\, e^{-xt}\, dt =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |f(u + 2\pi\alpha)|\, e^{-x(u+2\pi\alpha)}\, du = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} (e^{-2\pi x})^\alpha \int_0^{2\pi} |f(u)|\, e^{-xu}\, du =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \int_0^{2\pi} |f(u)|\, e^{-xu}\, du \leqq \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \int_0^{2\pi} |f(u)|\, du < +\infty\,,$$

takže integrál vlevo dokonce konverguje. Tedy také

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{konverguje pro} \quad \operatorname{Re} p \in (0, +\infty)\,. \tag{8}$$

Protože funkce $e^{-pt} \cos kt$ a $e^{-pt} \sin kt$ $(k = 0, 1, \ldots)$ mají v $\langle 0, +\infty)$ integrabilní majorantu e^{-xt}, rovněž všechny integrály na pravé straně (6) pro $\operatorname{Re} p \in (0, +\infty)$ konvergují.

Z 1) a 2) plyne podle Riemann-Lebesgueovy věty, že koeficienty a_k a b_k pro $k \to +\infty$ konvergují k nule. Existuje tedy $A \in \langle 0, +\infty)$ takové, že

$$|a_k| \leqq A\,, \quad |b_k| \leqq A \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{9}$$

Podle věty o integraci Fourierovy řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k} \quad \text{konverguje}\,. \tag{10}$$

Z $\operatorname{Re} p \in (0, +\infty)$ a z (9) plyne podle 3., že řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p a_k}{k^2 + p^2}\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p b_k}{k^2 + p^2} \quad \text{konvergují absolutně} \tag{11}$$

a že k danému p lze nalézt $B \in (0, +\infty)$, splňující nerovnosti

$$\left| \frac{k^2}{k^2 + p^2} \right| \leqq B \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{12}$$

Označme $\psi_1(u) = \operatorname{Re} u^2/(u^2 + p^2)$, $\psi_2(u) = \operatorname{Im} u^2/(u^2 + p^2)$ pro $u \in \langle 1, +\infty)$. Funkce ψ_1 a ψ_2 i jejich derivace ψ_1' a ψ_2' jsou tedy racionální v $\langle 1, +\infty)$, takže derivace ψ_1' a ψ_2' zachovávají pro velká $u \in \langle 1, +\infty)$ svá znamení. Existuje tedy přirozené číslo k_1 takové, že posloupnosti

$$(13) \qquad \left\{\operatorname{Re}\frac{k^2}{k^2+p^2}\right\}_{k=k_1}^{+\infty}, \quad \left\{\operatorname{Im}\frac{k^2}{k^2+p^2}\right\}_{k=k_1}^{+\infty} \quad \text{jsou monotonní.}$$

Z (10), (12) a (13) vychází podle Abelova kriteria, že řada

$$(14) \quad \sum_{k=k_1}^{+\infty}\frac{kb_k}{k^2+p^2} = \sum_{k=k_1}^{+\infty}\frac{b_k}{k}\operatorname{Re}\frac{k^2}{k^2+p^2} + i\sum_{k=k_1}^{+\infty}\frac{b_k}{k}\operatorname{Im}\frac{k^2}{k^2+p^2} \quad \text{konverguje.}$$

Tedy podle (11) a (14) také řada

$$(15) \qquad \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{pa_k+kb_k}{k^2+p^2} =$$

$$= a_0\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos kt\,\mathrm{d}t + b_k\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin kt\,\mathrm{d}t\right)$$

konverguje pro $\operatorname{Re} p \in (0, +\infty)$.

Z $\operatorname{Re} p \in (0, +\infty)$ a (11) dostáváme, že

$$(16) \qquad \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{pa_k}{k^2+p^2}\cos kT\right| \leqq \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{pa_k}{k^2+p^2}\right| < +\infty\,,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{pb_k}{k^2+p^2}\sin kT\right| \leqq \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{pb_k}{k^2+p^2}\right| < +\infty \quad \text{pro} \quad T\in(-\infty, +\infty)\,.$$

Z 1), 2) a věty o integraci Fourierovy řady plyne, že řada

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-b_k\cos kT + a_k\sin kT}{k} \quad \text{konverguje stejnoměrně pro} \quad T\in(-\infty, +\infty)\,.$$

Z (12), (13) a (17) plyne podle Abelova kriteria, že také řada

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-b_k\cos kT + a_k\sin kT}{k}\,\frac{k^2}{k^2+p^2}$$

konverguje stejnoměrně pro $T\in(-\infty, +\infty)$,

takže její součet je spojitá komplexní funkce proměnné T s periodou 2π v $(-\infty, +\infty)$. Existuje tedy $C \in (0, +\infty)$ takové, že

$$(18) \quad \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-b_k\cos kT + a_k\sin kT}{k}\,\frac{k^2}{k^2+p^2}\right| \leqq C \quad \text{pro} \quad T\in(-\infty, +\infty)\,.$$

Ale podle (16) a (18) existuje $D \in (0, +\infty)$ takové, že

$$\left| a_0 \int_T^{+\infty} e^{-pt} \, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_T^{+\infty} e^{-pt} \cos kt \, dt + b_k \int_T^{+\infty} e^{-pt} \sin kt \, dt \right) \right| =$$

$$= \left| a_0 \frac{e^{-pT}}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \frac{e^{-pT}}{k^2 + p^2} (p \cos kT - k \sin kT) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \, b_k \frac{e^{-pT}}{k^2 + p^2} (k \cos kT + p \sin kT) \right] \right| =$$

$$= e^{-T \operatorname{Re} p} \left| \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p a_k}{k^2 + p^2} \cos kT + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p b_k}{k^2 + p^2} \sin kT - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-b_k \cos kT + a_k \sin kT}{k} \frac{k^2}{k^2 + p^2} \right| \leqq D e^{-T \operatorname{Re} p} \quad \text{pro} \quad T \in (-\infty, +\infty),$$

takže

$$(19) \qquad \lim_{T \to +\infty} \left[a_0 \int_T^{+\infty} e^{-pt} \, dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_T^{+\infty} e^{-pt} \cos kt \, dt + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \, b_k \int_T^{+\infty} e^{-pt} \sin kt \, dt \right) \right] = 0 \quad \text{pro} \quad \operatorname{Re} p \in (0, +\infty).$$

Ale z (7), (8), (15) a (19) plyne podle 1. ihned vzorec (6). Tím je věta dokázána.

5. Křivku, rovnici křivky, bod křivky a jednoduše uzavřenou křivku v komplexní rovině a stejně tak rovnost křivek, rovnost křivek až na znaménko („až na orientaci“), součet křivek a integrál z komplexní funkce po křivce v komplexní rovině definujem obvyklým způsobem ([3], str. 38–40. a 91.). V dalším textu bude ze souvislosti vždy zřejmé, kdy jde o Lebesgueův integrál v E_1 a kdy o integrál z komplexní funkce po křivce v komplexní rovině.

Dále budeme předpokládat znalost Jordanovy věty, podle níž jednoduše uzavřená křivka v otevřené komplexní rovině dělí uzavřenou komplexní rovinu na dvě oblasti, z nichž jedna je omezená, druhá neomezená a jejichž společnou hranicí je množina všech bodů dané křivky; omezenou oblast z předešlých dvou nazvem vnitřkem dané křivky.

6. K dalším důkazům budeme potřebovat tuto modifikaci Cauchyho věty o rozkladu meromorfní funkce na částečné zlomky:

Věta. *Předpokládejme:*

1) *Funkce ψ je holomorfní v celé otevřené komplexní rovině až na body $z_1, z_2, \ldots \neq 0, \infty$, v nichž má póly.*

2) $C_1, C_2, \ldots$ *jsou jednoduše uzavřené křivky v otevřené komplexní rovině, splňující tyto podmínky*:

a) *Žádná z křivek* $C_1, C_2, \ldots$ *neobsahuje body* $z_1, z_2, \ldots$.

b) *Všechny body křivky* C_k *leží ve vnitřku křivky* C_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots)$.

c) *Ke každému* $z \neq \infty$ *existuje* k *takové, že bod* z *leží ve vnitřku křivky* C_k.

3) I_n *je množina všech přirozených čísel* k *takových, že bod* z_k *leží ve vnitřku křivky* C_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

4) *Existuje nezáporné celé číslo* m *takové, že*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{C_k} \frac{z^m \psi(\zeta)}{\zeta^m(\zeta - z)} \, d\zeta = 0 \quad \textit{pro každé} \quad z \neq \infty .$$

5) $H_k^\psi(1/(z - z_k))$ *je hlavní část Laurentova rozvoje funkce* ψ *v okolí bodu* $z = z_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

6) $P_k^\psi(z)$ *je součet prvních* m *členů rozvoje funkce* $H_k^\psi(1/(z - z_k))$ *v potenční řadu v okolí bodu* $z = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Potom

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} z^k + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k \in I_n} \left[H_k^\psi\left(\frac{1}{z - z_k}\right) - P_k^\psi(z) \right]$$

$$\textit{pro} \quad z \neq z_1, z_2, \ldots, \infty .$$

Důkaz je zcela obdobný jako u věty (4.7) v [3], str. 296.

7. **Věta.** *Funkce* F *vyhovuje vzorci*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \, e^{-pt} \, dt \quad \textit{pro} \quad \operatorname{Re} p \in (0, +\infty) , \tag{20}$$

kde f *je reálná lokálně integrabilní funkce s periodou* 2π, *tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto podmínky*:

1) $F(p) = \dfrac{C(p)}{1 - e^{-2\pi p}}$ *pro* $\operatorname{Re} p \in (0, +\infty)$.

2) $C(p)$ *je celá transcendenta.*

3) $C(p)$ *je reálné pro* $p \in (-\infty, +\infty)$.

4) $\lim\limits_{p \to +\infty} C(p) = 0$.

5) *Existuje* $M \in \langle 0, +\infty)$ *takové, že*

a) $|C(p)| \leqq M e^{-2\pi \operatorname{Re} p}$ *pro* $\operatorname{Re} p \in (-\infty, 0\rangle$,

b) $|C(p)| \leqq M$ *pro* $\operatorname{Re} p \in \langle 0, +\infty)$.

6) *Čísla*

$$(21) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} C(0), \quad a_k = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} C(ki), \quad b_k = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} C(ki) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

jsou Fourierovy koeficienty reálné lokálně integrabilní funkce f *s periodou* 2π, *takže* $f(t) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$.

V tom případě lze rozložit analytické pokračování Laplaceova integrálu (20) *na částečné ziomky s reálnými koeficienty podle vzorce*

$$(22) \qquad \frac{C(p)}{1 - e^{-2\pi p}} = \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p a_k + k b_k}{k^2 + p^2} \quad \textit{pro} \quad p \neq 0, \pm i, \pm 2i, \ldots, \infty .$$

Důkaz. I. Nechť platí vzorec (20), kde f je reálná lokálně integrabilní funkce s periodou 2π. Potom

$$F(p) = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \int_{2\pi\alpha}^{2\pi(\alpha+1)} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(u + 2\pi\alpha)\, e^{-p(u+2\pi\alpha)}\, du =$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{+\infty} (e^{-2\pi p})^\alpha \int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-pu}\, du = \frac{C(p)}{1 - e^{-\pi p}} \quad \text{pro} \quad \operatorname{Re} p \in (0, +\infty),$$

kde

$$(23) \qquad C(p) = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-pt}\, dt ,$$

takže je splněna podmínka 1).

Z (23) plyne ihned 3) a podle známých vět o Laplaceových integrálech ([2], str. 145. a 162.) rovněž 2) a 4). Protože $f \in L(0, 2\pi)$, konverguje integrál $M = \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt$; z toho a z (23) plynou ihned odhady v 5). Z (23) plyne rovněž ihned 6).

II. Nechť jsou splněny podmínky 1) až 6). Zaveďme označení (21). Potom podle 6) a 4.

$$(24) \qquad \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p a_k + k b_k}{k^2 + p^2} \quad \text{pro} \quad \operatorname{Re} p \in (0, +\infty).$$

Funkce

$$(25) \qquad \Phi(p) = \frac{C(p)}{1 - e^{-2\pi p}}$$

je podle 1) a 2) holomorfní v celé otevřené komplexní rovině s vyjímkou bodů $p = ki$ pro k celé, v nichž má odstranitelné singularity nebo póly. Snadno zjistíme, že $\operatorname*{res}_{p=ki} \Phi(p) = C(ki)/2\pi$ pro k celé, takže podle 3) a (21) $\operatorname*{res}_{p=0} \Phi(p) = a_0$, $\operatorname*{res}_{p=ki} \Phi(p) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ a $\operatorname*{res}_{p=-ki} \Phi(p) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Laurentovy rozvoje funkce Φ v okolí bodů $p = ki$ pro k celé mají tedy hlavní části

$$H_0^\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a_0}{p}, \tag{26}$$

$$H_k^\Phi\left(\frac{1}{p - ki}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_k - ib_k}{p - ki}, \quad H_{-k}^\Phi\left(\frac{1}{p + ki}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_k + ib_k}{p + ki} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Zabývejme se nyní funkcí

$$\psi(p) = \Phi(p) - \frac{a_0}{p} = \frac{C(p)}{1 - e^{-2\pi p}} - \frac{a_0}{p}. \tag{27}$$

Podle předchozího je funkce ψ holomorfní v celé otevřené komplexní rovině s výjímkou bodu $p = 0$, v němž má odstranitelnou singularitu a tedy konečnou limitu, a bodů $p = ki$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, v nichž má odstranitelné singularity nebo póly. Definujeme-li tedy $\psi(0) = \lim_{p \to 0} \psi(p)$, bude funkce ψ holomorfní i v bodě $p = 0$, a protože funkce a_0/p je holomorfní v bodech $p = ki$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, jsou podle (26) a (27) hlavní části Laurentových rozvojů funkce ψ v okolí bodů $p = ki$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$H_k^\psi\left(\frac{1}{p - ki}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_k - ib_k}{p - ki}, \quad H_{-k}^\psi\left(\frac{1}{p + ki}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_k + ib_k}{p + ki} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Rozvoje těchto hlavních částí v potenční řadu v okolí bodu $p = 0$ mají tedy první členy

$$P_k^\psi = \frac{a_k - ib_k}{2k}\, i, \quad P_{-k}^\psi = -\frac{a_k + ib_k}{2k}\, i \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

takže

$$\left[H_k^\psi\left(\frac{1}{p - ki}\right) - P_k^\psi\right] + \left[H_{-k}^\psi\left(\frac{1}{p + ki}\right) - P_{-k}^\psi\right] = \tag{28}$$
$$= \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2} - \frac{b_k}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Zvolme nyní pevně libovolné $x \in (0, +\infty)$ a označme

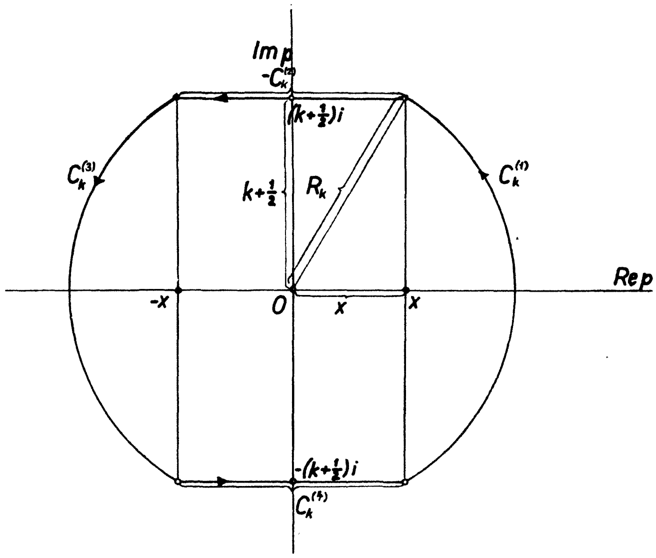
$$R_k = \sqrt{(x^2 + (k + \tfrac{1}{2})^2)}, \quad \varphi_k = \arccos \frac{x}{R_k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Nechť křivky $C_k^{(1)}$ až $C_k^{(4)}$ mají v tomto pořadí rovnice

$$(30) \qquad \begin{aligned} p &= R_k e^{i\varphi} && \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\varphi_k, \varphi_k \rangle\,, \\ p &= \xi + \left(k + \tfrac{1}{2}\right) i && \text{pro} \quad \xi \in \langle -x, x \rangle\,, \\ p &= R_k e^{i\varphi} && \text{pro} \quad \varphi \in \langle \pi - \varphi_k, \pi + \varphi_k \rangle\,, \\ p &= \xi - \left(k + \tfrac{1}{2}\right) i && \text{pro} \quad \xi \in \langle -x, x \rangle \end{aligned}$$

(viz obr. 1.!) a křivky C_k splňují podmínku

$$(31) \qquad C_k = C_k^{(1)} - C_k^{(2)} + C_k^{(3)} + C_k^{(4)} \quad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$



Obr. 1.

Křivky C_k jsou zřejmě jednoduše uzavřené a žádná z nich neprochází body $p = 0, \pm i, \pm 2i, \ldots$. Dále všechny body křivky C_k leží ve vnitřku křivky C_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots)$ a ke každému $p \neq \infty$ existuje k takové, že bod p leží ve vnitřku křivky C_k.

Jestliže $\operatorname{Re} \zeta \in \langle x, +\infty)$, platí $|1 - e^{-2\pi\zeta}| \geqq 1 - e^{-2\pi \operatorname{Re} \zeta} \geqq 1 - e^{-2\pi x}$ a podle 5) je $|C(\zeta)| \leqq M$, takže podle (25) $|\Phi(\zeta)| \leqq M/(1 - e^{-2\pi x})$. Jestliže $\operatorname{Re} \zeta \in (-\infty, x\rangle$, platí $|1 - e^{-2\pi\zeta}| \geqq e^{-2\pi \operatorname{Re} \zeta} - 1$ a podle 5) je $|C(\xi)| \leqq M e^{-2\pi \operatorname{Re} \zeta}$, takže podle (25) opět

$$|\Phi(\zeta)| \leqq \frac{M e^{-2\pi \operatorname{Re} \zeta}}{e^{-2\pi \operatorname{Re} \zeta} - 1} = \frac{M}{1 - e^{2\pi \operatorname{Re} \zeta}} \leqq \frac{M}{1 - e^{-2\pi x}}\,.$$

Speciálně platí tento odhad pro každý bod ζ křivek $C_k^{(1)}$ a $C_k^{(3)}$. Takové ζ splňuje dále podle (29) nerovnost $|\zeta - p| \geqq R_k - |p| = \sqrt{(x^2 + (k + \frac{1}{2})^2)} - |p|$ pro velká k, takže podle Cauchyho nerovnosti

$$(32) \qquad \int_{C_k^{(\alpha)}} \frac{p\,\Phi(\zeta)}{\zeta(\zeta - p)}\,d\zeta = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{pro každé} \quad p \neq \infty \quad (\alpha = 1, 3)\,.$$

Je-li ζ bodem křivky $C_k^{(2)}$ nebo $C_k^{(4)}$, pak podle (30) $e^{-2\pi\zeta} = -e^{-2\pi\xi}$ pro některé $\xi \in \langle -x, x\rangle$, takže $|1 - e^{-2\pi\zeta}| \geqq 1 + e^{-2\pi x}$. Dále podle 5) $|C(\zeta)| \leqq Me^{2\pi x}$, takže podle (25) platí $|\Phi(\zeta)| \leqq Me^{2\pi x}/(1 - e^{-2\pi x})$. Konečně podle (29) a (30) $|\zeta| \geqq k + \frac{1}{2}$ a $|\zeta - p| \geqq k + \frac{1}{2} - |p|$ pro velká k, takže podle Cauchyho nerovnosti

$$(33) \qquad \int_{C_k^{(\alpha)}} \frac{p\,\Phi(\zeta)}{\zeta(\zeta - p)}\,d\zeta = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{pro každé} \quad p \neq \infty \quad (\alpha = 2, 4)\,.$$

Z (31) až (33) dostáváme odhad

$$(34) \qquad \int_{C_k} \frac{p\,\Phi(\zeta)}{\zeta(\zeta - p)}\,d\zeta = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{pro každé} \quad p \neq \infty\,.$$

Podle (29) a (30) platí pro každý bod ζ křivky C_k nerovnost $|\zeta| \geqq k + \frac{1}{2}$. Protože délka křivky C_k je podle (29) a (30) menší než $2\pi\sqrt{(x^2 + (k + \frac{1}{2})^2)} + 4x$, dává Cauchyho nerovnost další odhad

$$(35) \qquad \int_{C_k} \frac{p\,\dfrac{a_0}{\zeta}}{\zeta(\zeta - p)}\,d\zeta = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{pro každé} \quad p \neq \infty\,.$$

Z (27), (34) a (35) plyne konečně vzorec

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{C_k} \frac{p\,\psi(\zeta)}{\zeta(\zeta - p)}\,d\zeta = 0 \quad \text{pro každé} \quad p \neq \infty\,.$$

Tím jsme ověřili předpoklady věty z 6. pro $m = 1$, takže podle (27) a (28)

$$\frac{C(p)}{1 - e^{-2\pi p}} - \frac{a_0}{p} = \psi(p) =$$

$$= \psi(0) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{\left[H_k^{\psi}\left(\frac{1}{p - ki}\right) - P_k^{\psi}\right] - \left[H_{-k}^{\psi}\left(\frac{1}{p + ki}\right) - P_{-k}^{\psi}\right]\right\} =$$

$$= \psi(0) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2} - \frac{b_k}{k}\right) \quad \text{pro} \quad p \neq 0, \pm i, \pm 2i, \ldots, \infty\,.$$

Uvážíme-li ještě, že z 6) plyne podle věty o integraci Fourierovy řady konvergence řady $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k/k$, dostáváme tak vzorec

$$(36) \qquad \frac{C(p)}{1 - e^{-2\pi p}} = \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2} + \psi(0) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}$$

$$\text{pro} \quad p \neq 0, \pm i, \pm 2i, \ldots, \infty\,.$$

Z toho plyne dále dosazením podle 1) a (24), že

$$(37)\qquad F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt + \psi(0) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k} \quad \text{pro} \quad \operatorname{Re} p \in (0, +\infty)\,.$$

Ale podle 1) a 4) $F(p)$ pro $p \to +\infty$ konverguje k nule. Dále podle známé věty ([2], str. 162.) rovněž integrál $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ pro $p \to +\infty$ konverguje k nule. V (37) musí tedy platit

$$\psi(0) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k} = 0\,,$$

což dosazeno do (36) a (37) dává vzorce (20) a (22), které jsme měli dokázat.

Podmínky 1) až 6) jsou tedy dostačující k platnosti vzorce (20). Protože podle 2) je funkce (25) holomorfní v otevřené komplexní rovině až na body 0, $\pm i$, $\pm 2i, \ldots$, v nichž má odstranitelné singularity nebo jednoduché póly, představuje podle 1) vzorec (22) rozklad analytického pokračování funkce F na částečné zlomky s reálnými koeficienty. Tím je věta dokázána.

8. Malým zesílením předpokladů o funkci f lze dosáhnout toho, aby rozklad (22) analytického pokračování Laplaceova integrálu (20) na částečné zlomky s reálnými koeficienty konvergoval absolutně a po odstranění konečného počtu počátečních členů stejnoměrně:

Věta. *Předpokládejme:*

1) *f je reálná lokálně integrabilní funkce s periodou 2π.*

2) $f(t) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$.

3) *Řada $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k/k$ konverguje absolutně.* (*Z* [1], *str.* 216, *plyne, že tento předpoklad je jistě splněn v případě, kdy $f \in L^q(0, 2\pi)$ pro některé $q \in (1, +\infty)$.*)

Potom platí:

I. Řada

$$(38)\qquad \frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2}$$

konverguje absolutně pro $p \neq 0, \pm i, \pm 2i, \ldots, \infty$.

II. Jestliže $R \in \langle 0, +\infty)$, řada

$$(39)\qquad \sum_{k>R} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2}$$

konverguje stejnoměrně pro všechna $|p| \leqq R$.

Důkaz. Z 1) plyne $f \in L(0, 2\pi)$, takže podle Riemann-Lebesgueovy věty koeficienty a_k a b_k konvergují pro $k \to +\infty$ k nule. Existuje tedy $A \in \langle 0, +\infty)$ takové, že platí (9).

Nechť $R \in \langle 0, +\infty)$ a nechť k_0 je nejmenší přirozené číslo větší než R. Potom podle (9) a 3.

$$\left|\frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2}\right| \leqq \left|\frac{pa_k}{k^2 + p^2}\right| + \left|\frac{k^2}{k^2 + p^2}\right| \left|\frac{b_k}{k}\right| \leqq \frac{k_0^2}{k_0^2 - R^2}\left(\frac{AR}{k^2} + \left|\frac{b_k}{k}\right|\right)$$

$$\text{pro celá} \quad k > R \quad \text{a} \quad |p| \leqq R\,.$$

Z toho a ze 3) plyne, že řada (39) konverguje absolutně a stejnoměrně pro všechna $|p| \leqq R$, takže platí II.

Zvolme nyní pevně libovolné p takové, že $p \neq 0, \pm i, \pm 2i, \ldots, \infty$, a k němu libovolné $R \in \langle\, |p|, +\infty)$, takže $|p| \leqq R$. Píšeme-li pak ještě

$$\frac{a_0}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2} = \left(\frac{a_0}{p} + \sum_{1 \leqq k \leqq R} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2}\right) + \sum_{k > R} \frac{pa_k + kb_k}{k^2 + p^2}\,,$$

obsahuje závorka vpravo konečný počet konečných členů, a jak jsme právě zjistili, řada vpravo konverguje absolutně. Tedy platí I. a věta je dokázána.

9. Na závěr probereme ještě otázku, jak ověřit podmínku 6) z věty 7., tj. jak zjistit, zda čísla (21) jsou Fourierovy koeficienty nějaké funkce f, a jak tuto funkci určit.

Vedle elementární věty, říkající, že trigonometrická řada

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,, \tag{40}$$

která konverguje stejnoměrně v $\langle 0, 2\pi \rangle$, je Fourierovou řadou svého součtu, lze s výhodou použít ještě těchto vět:

I. Riesz-Fischerova věta. *Nechť konverguje řada* $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$. *Potom řada* (40) *je Fourierovou řadou jisté funkce* $f \in L^2(0, 2\pi)$ *a tato funkce* f *je limitou posloupnosti částečných součtů řady* (40) *při metrice v prostoru* $L^2(0, 2\pi)$.

Důkaz viz [1], str. 74.

II. *Předpokládejme:* 1) $\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0$. 2) *Konvergují řady* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}|$ *a* $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}|$. (*Podle* 1) *je tento předpoklad splněn mimo jiné v případě, že posloupnosti* $a_1, a_2, \ldots$ *a* $b_1, b_2, \ldots$ *jsou monotonní.*) 3) *Pro jisté* $p \in \langle 1, +\infty)$ *konvergují řady* $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-2} a_k^p$ *a* $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-2} b_k^p$. *Potom řada* (40) *konverguje aspoň pro*

$t \in (0, 2\pi)$, její součet patří do $L^p(0, 2\pi)$ a řada (40) je Fourierovou řadou tohoto svého součtu.

Důkaz. Konvergence řady (40) pro $t \in (0, 2\pi)$ plyne z 1) a 2) podle [1], str. 95. a 649.

Nechť $p = 1$. Potom podle 1), 2), 3) a [1], str. 649. a 652., je řada (40) Fourierova, takže podle [1], str. 650., její součet patří do $L(0, 2\pi)$. Z toho a z konvergence řady (40) pro $t \in (0, 2\pi)$ plyne podle zobecnění du Bois-Reymondovy věty ([1], str. 790.), že řada (40) je Fourierovou řadou svého součtu.

Nechť $p \in (1, +\infty)$. Potom podle 1), 2), 3) a [1], str. 649. a 657., patří součet řady (40) do $L^p(0, 2\pi)$ a tedy podle Hölderovy nerovnosti i do $L(0, 2\pi)$. Zbytek důkazu je pak stejný jako v případě $p = 1$.

Literatura

[1] *Bari:* Trigonometričeskije rjady, Moskva 1961.
[2] *Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation, I., Basel 1950.
[3] *Saks-Zygmund:* Funkcje analityczne, Warszawa 1959.

Adresa autora: Praha 10 - Strašnice, Třebohostická 987 (Výzkumný ústav telekomunikací).

Zusammenfassung

ZWEI SÄTZE ÜBER DIE LAPLACE-TRANSFORMATION REELLER PERIODISCHER FUNKTIONEN

MILOŠ NOVOTNÝ, Praha

Im Artikel sind folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz 1. *Sei f eine reelle lokal integrierbare Funktion mit der Periode 2π und der Fourierschen Reihe (40). Dann kann die Laplace-Transformation von f für* Re $p \in (0, +\infty)$ *durch gliedweise Laplace-Transformation der Reihe (40) ohne Rücksicht auf ihre Konvergenz gewonnen werden, d.h. es gilt die Formel (6). Dabei konvergieren alle Laplaceschen Integrale in (6) absolut.*

Satz 2. *Die Funktion F genügt der Formel (20), wo f eine reelle lokal integrierbare Funktion mit der Periode 2π ist, genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:* 1) $F(p) = C(p)/(1 - e^{-2\pi p})$ *für* Re $p \in (0, +\infty)$. 2) $C(p)$ *ist eine ganze Funktion.* 3) $C(p)$ *ist reell für* $p \in (-\infty, +\infty)$. 4) *Es existiert ein derartiges* $M \in \langle 0, +\infty)$, *daß* $|C(p)| \leqq Me^{-2\pi \operatorname{Re} p}$ *für* Re $p \in (-\infty, 0\rangle$ *und* $|C(p)| \leqq M$ *für* Re $p \in \langle 0, +\infty)$ *ist.* 6) *Die reelle lokal integrierbare Funktion f mit der Periode 2π erzeugt die*

Fouriersche Reihe (40) *mit den Koeffizienten* (21). *Ist das der Fall, besitzt die analytische Fortsetzung des Laplaceschen Integrals* (20) *eine Partialbruchentwicklung von der Form* (22). *Wenn noch* $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_j/k| < +\infty$, *was mindestens für* $f \in L^q(0, 2\pi)$ *mit* $q \in (1, +\infty)$ *eintritt, konvergiert die Reihe* (38) *für* $p \neq 0, \pm i, \pm 2i, \ldots, \infty$ *absolut und die Reihe* (39) *für* $|p| \leqq k$ *gleichmäßig.*

Der Beweis des Satzes 2. folgt aus dem Satz 1. und einer Modifikation des Cauchyschen Satzes über die Partialbruchentwicklung einer meromorphen Funktion.

Um die Bedingung 5) im Satz 2. zu prüfen, kann man außer mehreren Elementarsätzen über trigonometrishe Reihen und dem wohlbekannten Riesz-Fischerschen Satz noch den folgenden — im Artikel bewiesenen — Satz benützen:

Satz 3. *Man setzt voraus*: 1) $\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0$. 2) *Es konvergieren die Reihen* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}|$ *und* $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}|$. 3) *Für ein* $p \in \langle 1, +\infty)$ *konvergieren noch die Reihen* $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-2} a_k^p$ *und* $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{p-2} b_k^p$. *Dann konvergiert die Reihe* (40) *für alle* $t \in (0, 2\pi)$, *ihre Summe gehört zur Funktionenklasse* $L^p(0, 2\pi)$ *und* (40) *ist die Fouriersche Reihe ihrer Summe.*