Michal Bučko

Inverzné relácie k niektorým vytvárajúcim funkciám permutácií

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 4, 449--453

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117610`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

INVERZNÉ RELÁCIE K NIEKTORÝM VYTVÁRAJÚCIM FUNKCIÁM PERMUTÁCIÍ

MICHAL BUČKO, Košice

(Došlo dňa 2. mája 1966)

Nech n je prirodzené číslo. Nech $E(u, t) = \exp u\, f(t)$, $F(u, t) = \exp u\, g(t)$, $f^k(t) \equiv \equiv f_k(t)$, $g^k(t) \equiv g_k(t)$ sú exponenciálne vytvárajúce funkcie pre postupnosti funkcií $\{f_n(t)\}$ a $\{g_n(t)\}$ (pozri [1], II. kapitola).

Definícia 1. Postupnosť funkcií $\{g_n(t)\}$ nazývame inverznou postupnosťou k postupnosti funkcií $\{f_n(t)\}$, ak platí

$$(\exp u\, f(t)) (\exp u\, g(t)) = 1 . \tag{1}$$

Rovnica (1) je ekvivalentná s týmito dvoma rovnicami

$$f_0(t)\, g_0(t) = 1 , \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k(t)\, g_{n-k}(t) = 0 .$$

1. Majme vytvárajúcu funkciu $c_n(t) = (t + n - 1)_n$, $c_0(t) = 1$ pre počet permutácií z n rôznych prvkov obsahujúcich práve k cyklov $(1 \leqq k \leqq n)$ bez ohľadu na ich dĺžky ([1], IV. kapitola). Označme $\{\bar{c}_n(t)\}$ inverznú postupnosť k postupnosti $\{c_n(t)\}$.

Veta 1. *Postupnosť* $\{\bar{c}_n(t)\}$ *je inverznou postupnosťou k postupnosti* $\{c_n(t)\}$, *ak platí*

$$\bar{c}_n(t) = c_n(-t) . \tag{3}$$

D ô k a z. Stačí dokázať, že $\bar{c}_n(t)$ a $c_n(t)$ vyhovujú rovniciam (2). Je $c_n(t) = = (t + n - 1)_n$, utvorme $\bar{c}_n(t) = c_n(-t) = (-1)^n (t)_n$. Zrejme $c_0(t)\, \bar{c}_0(t) = 1$. Ďalej je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k}(t)\, c_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t + n - k - 1)_{n-k} (-1)^k (t)_k =$$

$$= -(1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t)_{n-k} (-t)_k = (-1)^n\, d(n) .$$

Potom stačí dokázať, že $d(n) = 0$ pre $n \geqq 1$. Dôkaz prevedieme indukciou.

Platí $d(1) = (t)_1 + (-t)_1 = t - t = 0$. Nech platí $d(n) = 0$. Utvorme

$$d(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (t)_{n-k+1} (-t)_k = \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} (t)_{n-k+1} (-t)_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t)_{n-k} (-t)_k (t - n + k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t)_{n-k} (-t)_{k+1} =$$

$$= -n\, d(n) + d(n) \,.\, 0 = 0 \,.$$

Tým je dôkaz vety prevedený.

Z rovníc

$$c_n(t) = (t + n - 1)_n \,, \quad \bar{c}_n(t) = (-1)^n (t)_n$$

dostávame

$$\binom{t}{n} c_n(t) = (-1)^n \bar{c}_n(t) \binom{t+n-1}{t-1} \,,$$

alebo

$$\bar{c}_n(t) = (-1)^n \binom{t}{n} \binom{t+n-1}{t-1}^{-1} c_n(t) \,. \tag{4}$$

Stirlingove čísla ([1], II. kapitola) sú definované pre $n > 0$ takto:

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, t^k \,, \tag{5}$$

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, (t)_k \,, \quad s(0, 0) = S(0, 0) = 1 \,, \tag{6}$$

kde $s(n, k)$ sú Strilingove čísla prvého a $S(n, k)$ druhého druhu. Z (5) a (6) dostávame Kroneckerove delta

$$\delta_{nm} = \sum_{k=m}^{n} s(n, k)\, S(k, m) \,, \tag{7}$$

pre ktoré platí

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad m \neq n \\ 1 & \text{pre} \quad m = n \,. \end{cases}$$

Rovnice (5) a (6) nazývame inverznými reláciami (pozri napr. [2]), alebo inverznou dvojicou.

Je

$$c_n(t) = (-1)^n (-t)_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n, k) (-t)^k \,,$$

teda

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n, k) t^k .$$

Ďalej

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) (t)_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S(n, k) \bar{c}_k(t) .$$

Ak tu za $\bar{c}_k(t)$ dosadíme (4), dostávame inverznú dvojicu

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{t + k - 1}{t - 1}^{-1} S(n, k) c_k(t) , \tag{8}$$

$$c_n(t) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n, k) t^k . \tag{9}$$

Z (8) a (9) dostávame Kroneckerove delta vo tvare

$$\delta_{mn} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+m} \binom{t}{k} \binom{t + k - 1}{t - 1}^{-1} S(n, k) s(k, m) . \tag{10}$$

Pretože je

$$\bar{c}_n(t) = (-1)^n (t)_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n, k) t^k ,$$

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) (t)_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S(n, k) \bar{c}_k(t) ,$$

potom

$$\bar{c}_n(t) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n, k) t^k , \quad t^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S(n, k) \bar{c}_k(t)$$

tvoria ďalšiu inverznú dvojicu.

2. Označme vytvárajúce funkcie pre počty párnych (nepárnych) permutácií z n rôznych prvkov, obsahujúcich práve k cyklov ($1 \leqq k \leqq n$) bez ohľadu na dĺžky týchto cyklov $c_n^e(t)$ ($c_n^0(t)$). Potom ([1], IV. kapitola)

$$2c_n^e(t) = (t + n - 1)_n + (t)_n , \tag{11}$$

$$2c_n^0(t) = (t + n - 1)_n - (t)_n . \tag{12}$$

Veta 2. *Postupnosť* $\{\bar{c}_n^e(t)\}$ ($\{\bar{c}_n^0(t)\}$) *je inverznou postupnosťou k* $\{c_n^e(t)\}$ ($\{c_n^0(t)\}$), *ak platí*

$$\bar{c}_n^e(t) = c_n^e(-t) , \quad (\bar{c}_n^0(t) = c_n^0(-t)) . \tag{13}$$

Dôkaz. Veta 2. je dôsledkom vety 1., pretože

$$\begin{aligned} 2c^e_{2m}(t) &= c_{2m}(t) + \bar{c}_{2m}(t), \\ 2c^e_{2m-1}(t) &= c_{2m-1}(t) - \bar{c}_{2m-1}(t), \\ 2c^0_{2m}(t) &= c_{2m}(t) - \bar{c}_{2m}(t), \\ 2c^0_{2m-1}(t) &= c_{2m-1}(t) + \bar{c}_{2m-1}(t). \end{aligned}$$

Z vety 2 a z (11) a (12) vyplýva

$$\begin{aligned} 2\bar{c}^e_n(t) &= (-1)^n (t)_n + (-1)^n (t + n - 1)_n, \\ 2\bar{c}^0_n(t) &= (-1)^n (t)_n - (-1)^n (t + n - 1)_n, \end{aligned}$$

alebo

$$\bar{c}^e_n(t) = (-1)^n c^e_n(t), \tag{14}$$

$$\bar{c}^0_n(t) = (-1)^{n+1} c^0_n(t). \tag{15}$$

Ďalej je

$$c^e_n(t) = \tfrac{1}{2}\{(t + n - 1)_n + (t)_n\} = \tfrac{1}{2}\{(-1)^n (-t)_n + (t)_n\},$$

ak tu dosadíme (5), dostávame

$$c^e_n(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \{(-1)^{n+k} + 1\} s(n, k) t^k.$$

Potom

$$c^e_n(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} s(n, n - 2k) t^{n-2k} \tag{16}$$

Analogicky dostávame

$$c^0_n(t) = - \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} s(n, n - 2j - 1) t^{n-2k-1}. \tag{17}$$

Literatúra

[1] *J. Riordan:* An Introduction to Combinatorial Analysis. New York, 1958.
[2] *J. Riordan:* Inverse Relations and Combinatorial Identities. The American Math. Monthly *71* (1964), 485—498.

Adresa autora: Košice, Námestie Februárového víťazstva 9 (Katedra matematiky SF VŠT).

Резюме

ОБРАТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ПЕРЕСТАНОВОК

МИХАИЛ БУЧКО (Michal Bučko), Кошице

Последовательность функций $\{g_n(t)\}$ называется обратной по отношению к последовательности $\{f_n(t)\}$ если выполнено $(\exp u\, f(t))\,(\exp u\, g(t)) = 1$.

В статье приводятся обратные последовательности функций к производящим функциям перестановок, для числа перестановок n различных элементов, а то как для четных и нечетных перестановок. К этим функциям выведены также и им соответствующие обратные соотношения.

Summary

THE INVERSE RELATIONS TO SOME GENERATING FUNCTIONS OF PERMUTATIONS

MICHAL BUČKO, Košice

A sequence of functions $\{g_n(t)\}$ is called the inverse sequence to the sequence $\{f_n(t)\}$ if $(\exp u\, f(t))\,(\exp u\, g(t) = 1)$ holds.

The paper contains the inverse sequences of functions to generating functions of permutations for number of permutations of n different elements and also for even and odd permutations. The respective inverse relations to these functions are given.