Jaroslav Morávek; Pavel Randl

Extremální množiny uzlů v sudém grafu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 4, 443--448

EXTREMÁLNÍ MNOŽINY UZLŮ V SUDÉM GRAFU

JAROSLAV MORÁVEK a PAVEL RANDL, Praha

(Došlo dne 25. dubna 1966)

1°. Budiž $G = (X, Y, \Gamma)$, $(X \neq 0, Y \neq 0)$ konečný sudý graf [1] s ohodnocením uzlů $a(x)$, $x \in X$; $b(y)$, $y \in Y$. Budeme předpokládat, že platí: $a(x) > 0$, $b(y) \geqq 0$. Nechť jsou dále dána čísla a, b $(a \geqq 0, b \geqq 0)$.

Pro $A \subset X$, $B \subset Y$ položme

$$a(A) = \sum_{x \mid x \in A} a(x), \quad b(B) = \sum_{y \mid y \in B} b(y)$$

(Speciálně: $a(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$).

Naším cílem je popsat algoritmus pro řešení následující úlohy:

Úloha I. *Máme nalézt množinu A $(A \subset X)$, pro niž platí:*

1. $a(A) + a > 0$.
2. $\dfrac{b(\Gamma A) + b}{a(A) + a} \to \min$.

Dříve než přistoupíme k vlastnímu výkladu, ukážeme, že následující úlohu lze převést na úlohu I:

Úloha II. *V sudém grafu s ohodnocením z úlohy I je dána množina uzlů X_0 $(X_0 \subset X, X_0 \neq X)$. Úloha spočívá v nalezení množiny A, pro niž platí:*

1. $X_0 \subset A \subset X$.
2. $a(A) + a > 0$.
3. $\dfrac{b(\Gamma A) + b}{a(A) + a} \to \min$.

Definujeme nový sudý graf $\hat{G} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{\Gamma})$ takto:

$$\hat{X} = X - X_0, \quad \hat{Y} = Y - \Gamma X_0,$$

zobrazení $\hat{\Gamma}$ vznikne zúžením zobrazení Γ na množiny $\hat{X}$, $\hat{Y}$:

$$\hat{\Gamma}x = \Gamma x - \Gamma X_0 \quad \text{pro} \quad x \in X - X_0 .$$

Ohodnocení grafu $\hat{G}$ je definováno takto:

$$\hat{a}(x) = a(x), \ldots, x \in X - X_0 , \quad \hat{b}(y) = b(y), \ldots, y \in Y - \Gamma X_0 .$$

Dále položíme:

$$\hat{a} = a(X_0) + a , \quad \hat{b} = b(\Gamma X_0) + b .$$

Úlohu II lze nyní zformulovat ekvivalentním způsobem takto:

Úloha II'. *Nalézt množinu $\hat{A}$ ($\hat{A} \subset \hat{X}$), pro niž platí:*

1. $\hat{a}(\hat{A}) + \hat{a} > 0$.
2. $\dfrac{\hat{b}(\hat{\Gamma}\hat{A}) + \hat{b}}{\hat{a}(\hat{A}) + \hat{a}} \to \min.$

Poslední formulace je shodná s formulací úlohy I. Přitom, je-li A řešením úlohy II, je $\hat{A} = A - X_0$ řešením úlohy II' a obráceně, je-li $\hat{A}$ řešením úlohy II', je $A = X_0 \cup \hat{A}$ řešením úlohy II.

2°. Přejděme nyní k řešení Úlohy I. Označme

$$\mu^* = \min \left\{ \frac{b(\Gamma A) + b}{a(A) + a} \,\middle|\, (A \subset X) \,\&\, (a(A) + a > 0) \right\} . \tag{1}$$

Tuto rovnici lze postupně upravit takto:

$$\begin{aligned} \mu^* = \min \{\mu \mid \exists A[(A \subset X) \,\&\, (a(A) + a > 0) \,\& \\ \&\, (\mu(a(A) + a) \geqq b(\Gamma A) + b)]\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^* = \min \{\mu \mid \min \{\mu \,.\, a(X - A) + b(\Gamma A) \mid (A \subset X) \,\& \\ \&\, (a(A) + a > 0)\} \leqq \mu \,.\, a(X) + \mu \,.\, a - b\} . \end{aligned} \tag{1'}$$

Ukážeme nyní metodu, jak při daném μ ($\mu \geqq 0$) nalézt množinu A, $A \subset X$, pro niž platí:

$$a(A) + a > 0 . \tag{2}$$

$$\mu \,.\, a(X - A) + b(\Gamma A) \to \min . \tag{3}$$

Při daném μ s použitím grafu $G = (X, Y, \Gamma)$ a ohodnocení $a(x)$, $x \in X$; $b(y)$, $y \in Y$ jeho uzlů sestrojíme dopravní síť [1] adjunkcí uzlů x_0 (vstupu), z (výstupu), vstupních hran (x_0, x) pro $x \in X$ a výstupních hran (y, z) pro $y \in Y$. Přitom vstupní hrany

(x_0, x) ohodnotíme propustnostmi $\mu \, . \, a(x)$, výstupní hrany (y, z) propustnostmi $b(y)$ a hrany (x, y) pro $y \in \Gamma x$ budou mít nekonečnou propustnost $+\infty$. Jiných hran v síti není.

Takto definovanou dopravní síť označíme $\mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}(x_0, z, X, Y, \Gamma, \mu)$. *Tokem* (*přípustným tokem*) dopravní sítě $\mathfrak{N}_\mu$ nazveme funkci hran sítě $\varphi(x)$, $x \in X$; $\psi(x, y)$, $y \in \Gamma x$; $\chi(y)$, $y \in Y$, splňující následující podmínky:

$$0 \leqq \varphi(x) = \sum_{y \mid y \in \Gamma x} \psi(x, y) \leqq \mu \, . \, a(x) \quad \text{jestliže} \quad x \in X \,,$$

$$0 \leqq \chi(y) = \sum_{x \mid x \in \Gamma^{-1} y} \psi(x, y) \leqq b(y) \quad \text{jestliže} \quad y \in Y ,$$

$$\psi(x, y) \geqq 0 \quad \text{jestliže} \quad y \in \Gamma x, \; x \in X, \; y \in Y .$$

Maximálním tokem se nazývá tok, pro nějž výraz

$$\sum_{x \mid x \in X} \varphi(x) \equiv \sum_{y \mid y \in Y} \chi(y)$$

nazývaný *hodnotou toku*, nabývá maximální hodnoty.

Řezem sítě $\mathfrak{N}_\mu$ budeme rozumět dvojici množin (R, S) uzlů sítě, mající následující vlastnosti:

$$R \cap S = \emptyset \,, \quad R \cup S = X \cup Y \cup \{x_0, z\} \,, \quad x_0 \in R \,, \quad z \in S \,, \quad \Gamma(X \cap R) \cap S = \emptyset \,.$$

(Naše definice řezu je poněkud speciálnější než definice v [1, 2]. Poslední podmínka vyjadřuje, že zkoumáme pouze řezy s konečnou propustností.)

Propustností řezu nazveme číslo $\mu \, . \, a(X \cap S) + b(Y \cap R)$. Řez s minimální propustností nazveme *minimálním řezem*. Platí známá věta Ford - Fulkersonova:

Věta: $\max\limits_{\varphi, \psi, \chi} \sum\limits_{x \mid x \in X} \varphi(x) = \min \{\mu \, . \, a(X \cap S) + b(Y \cap R) \mid (R, S)$ *je libovolný řez*$\}$, *tj. hodnota maximálního toku je rovna propustnosti minimálního řezu.*

V [1, 2] je popsán efektivní algoritmus pro současné nalezení maximálního toku a minimálního řezu. Jiné algoritmy pro řešení této úlohy jsou uvedeny v [3, 4].

Vrátíme se nyní k problému (2), (3).

Tvrzení 1: *Platí:*

$$\begin{aligned} (4) \qquad & \min \{\mu \, . \, a(X - A) + b(\Gamma A) \mid A \subset X, \; a(A) + a > 0\} = \\ & = \min \{\mu \, . \, a(X \cap S) + b(Y \cap R) \mid (R, S) \; \textit{je řez}, \; a(X \cap R) + a > 0\} \,. \end{aligned}$$

Přitom je-li A množina, pro niž výraz na levé straně vztahu (4) *dosahuje minima, sestrojíme minimální řez na pravé straně vztahu* (4) *takto*:

$$R = \{x_0\} \cup A \cup \Gamma A \,, \quad S = (X - A) \cup (Y - \Gamma A) \cup \{z\} \,.$$

Obráceně k minimálnímu řezu (R, S) sestrojíme množinu A takto:

$$A = X \cap R .$$

Tvrzení 2: *Budiž (R, S) minimální řez sítě $\mathfrak{N}_\mu$ a nechť platí $a(X \cap R) + a > 0$, $\mu \geqq \mu^*$ (kde μ^* je definováno v (1)). Položme*

$$A = X \cap R , \quad \bar{\mu} = \frac{b(\Gamma A) + b}{a(A) + a} .$$

Potom platí $\mu \geqq \bar{\mu} \geqq \mu^*$. Přitom vztah $\mu = \bar{\mu}$ platí právě tehdy, jestliže $\mu = \bar{\mu} = \mu^*$.

Důkaz. Vztah $\bar{\mu} \geqq \mu^*$ je zřejmý. Vzhledem k (1') musíme vyšetřit tyto dva případy:

$$\alpha)\ \mu \,.\, a(X - A) + b(\Gamma A) < \mu \,.\, a(X) + \mu \,.\, a - b .$$

$$\beta)\ \mu \,.\, a(X - A) + b(\Gamma A) = \mu \,.\, a(X) + \mu \,.\, a - b .$$

V případě α) platí:

$$\mu(a(A) + a) > b(\Gamma A) + b$$

a tedy $\mu > \bar{\mu}$.

V případě β) platí:

$$\mu(a(A) + a) = b(\Gamma A) + b$$

a na druhé straně:

$$\mu(a(C) + a) \leqq b(\Gamma C) + b \quad \text{jestliže} \quad C \subset X .$$

(viz (1'), (2), (3) a tvrzení 1). Tudíž platí $\mu = \bar{\mu} = \mu^*$, Q. E. D.

V Tvrzení 2 jsme předpokládali, že platí $a(X \cap R) + a > 0$. Zbývá ještě vyřešit případ $\mu \geqq 0$, $a(X \cap R) + a = 0$. Tento případ zřejmě nastane právě tehdy, jestliže $a = 0$ a maximální tok v síti $\mathfrak{N}_\mu$ nasycuje vstupní hrany (x_0, x).

Tvrzení 3: *Nechť $\mu \geqq 0$. Budiž (R, S) minimální řez sítě $\mathfrak{N}_\mu$ a nechť platí $a(X \cap R) = a = 0$. Potom platí $\mu \leqq \mu^*$.*

Důkaz. Podle předpokladu existuje tok (φ, ψ, χ), nasycující vstupní hrany sítě $\mathfrak{N}_\mu$. Budiž $A \subset X$, $a(A) + a > 0$. Potom platí:

$$\mu(a(A) + a) = \mu \,.\, a(A) = \mu \sum_{x \mid x \in A} a(x) = \sum_{x \mid x \in A} \varphi(x) =$$

$$= \sum_{x \mid x \in A} \sum_{y \mid y \in \Gamma x}' \psi(x, y) \leqq \sum_{y \mid y \in \Gamma A} \sum_{x \mid x \in X} \psi(x, y) = \sum_{y \mid y \in \Gamma A} \chi(y) \leqq b(\Gamma A) \leqq b(\Gamma A) + b$$

a tedy platí $\mu \leqq \mu^*$, Q. E. D.

Z tvrzení 1, 2, 3 vyplývá algoritmus, popsaný v následujícím odstavci.

3°. Algoritmus pro řešení úlohy I.

A. Položíme $\mu_0 = (b(\Gamma\tilde{A}) + b)/(a(\tilde{A}) + a)$, kde $\tilde{A}$ je libovolná množina splňující vztahy $\tilde{A} \subset X$, $a(\tilde{A}) + a > 0$. Sestrojíme maximální tok $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ a minimální řez (R_0, S_0) v síti $\mathfrak{N}_{\mu_0}$.

B. Nechť $(\varphi_K, \psi_K, \chi_K)$ je maximální tok a (R_K, S_K) minimální řez $\mathfrak{N}_{\mu_K}$ $(K = 0, 1, 2, \ldots)$. Položíme $A_K = X \cap R_K$. Jestliže platí $a(A_K) + a = 0$, přejdeme k bodu D. algoritmu.

C. Položíme

$$\mu_{K+1} = \frac{b(\Gamma A_K) + b}{a(A_K) + a}.$$

Platí $\mu_{K+1} \leqq \mu_K$. Je-li $\mu_{K+1} < \mu_K$, sestrojíme přípustný tok $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\chi})$ v síti $\mathfrak{N}_{\mu_{K+1}}$ takto:

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\mu_{K+1}}{\mu_K} \varphi_K(x), \quad \hat{\psi}(x, y) = \frac{\mu_{K+1}}{\mu_K} \psi_K(x, y), \quad \hat{\chi}(y) = \frac{\mu_{K+1}}{\mu_K} \chi_K(y).$$

Vycházejíce z přípustného toku $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\chi})$ nalezneme pomocí Ford - Fulkersonova algoritmu maximální tok $(\varphi_{K+1}, \psi_{K+1}, \chi_{K+1})$ a minimální řez (R_{K+1}, S_{K+1}) a přejdeme k bodu B. algoritmu. Je-li $\mu_{K+1} = \mu_K$, přejdeme k bodu *D*.

D. Algoritmus končí. A_K je řešením úlohy I, $\mu_K = \mu^*$.

Popsaný algoritmus vytváří konečnou posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots, A_K$, při čemž A_K je řešením. Autorům není znám netriviální odhad pro číslo K, udávající počet kroků algoritmu a zdá se, že získání takového odhadu bude v obecném případě dosti obtížné. Na druhé straně však, srovnáme-li popsaný algoritmus s triviálním algoritmem enumerace všech množin A, vidíme, že popsaný algoritmus má na rozdíl od posledního tyto přednosti:

1. Obsahuje netriviální kritérium optimálnosti množiny A.
2. Posloupnost čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ vytvořená algoritmem je klesající.

Literatura

[1] *C. Berge:* Théorie des graphes et ses applications. Paris, Dunod, 1958 (ruský překlad Moskva 1962).

[2] *L. R. Ford, D. R. Fulkerson:* Flows in Networks, 1962, Princeton, New Jersey (ruský překlad: Moskva 1966).

[3] *M. Iri:* A new method of solving transportation network problems, J. Oper. Res. Soc. Japan, Vol. *3*, No 1 and 2, October, 1960.

[4] *R. Kurata:* Primal dual method of parametric programming and Iri's theory on network flow problems, J. Oper. Research Soc. Jap., vol. *7*, February 1965, No 3.

Adresy autorů: Jaroslav Morávek, Žitná 25, Praha 1 (Matematický ústav ČSAV); Pavel Randl, Na bělidle 21, Praha 5 (VÚPP).

Резюме

О ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ВЕРШИН ПРОСТОГО ГРАФА

ЯРОСЛАВ МОРАВЕК (Jaroslav Morávek), ПАВЕЛ РАНДЛ (Pavel Randl), Прага

Целью этой статьи является построение алгоритма для решения следующей задаги:

Пусть (X, Y, Γ) обозначает простой граф (обозначения заимствованы из [1]) с заданными значениями вершин. Надо определить множество вершин A такое, что $A \subset X$ и функция $(b(\Gamma A) + b)/(a(A) + a)$ достигает минимума. Употребляется обозначение

$$a(A) = \sum_{x|x \in A} a(x), \quad b(B) = \sum_{y|y \in B} b(y),$$

причем $a(x) > 0$, $b(y) \geqq 0$ $(x \in X, \; y \in Y)$ заданые значения вершин; $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

Алгоритм, решающий на каждом шагу задачу о максимальном потоке и минимальном разрезе, определяет конечную последовательность чисел $\mu_0 > > \mu_1 > \ldots > \mu_j > \ldots > \mu_K$, где $\mu_j = (b(\Gamma A_j) + b)/(a(A_j) + a)$ и A_K является решением задачи.

Summary

ON EXTREMAL SETS OF NODES IN BIPARTITE GRAPHS

Jaroslav Morávek and Pavel Randl, Praha

The purpose of the present paper is to describe an algorithm for solving the following problem:

Let (X, Y, Γ) be a bipartite graph (the notation is used from [1]) with labelled nodes. We have to determine the set of nodes A such that $A \subset X$ and the function $(b(\Gamma A) + b)/(a(A) + a)$ attains the minimum value. The following notation is used:

$$a(A) = \sum_{x|x \in A} a(x), \quad b(B) = \sum_{y|y \in B} b(y),$$

where $a(x) > 0$, $b(y) \geqq 0$ $(x \in X, y \in Y)$ are tbe given labellings of the nodes; $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. The algorithm solving at each step the problem of finding the maximum flow and minimum cut, generates a finite sequence of numbers $\mu_0 > \mu_1 > \ldots > > \mu_j > \ldots > \mu_K$ where $\mu_j = (b(\Gamma A_j) + b)/(a(A_j) + a)$ and A_K is the solution of the problem.