

Bohumil Cenkľ

Les connexions non-linéaires sur la variété  $A_m^n$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 1, 12--25

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117535>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

LES CONNEXIONS NON-LINÉAIRES SUR LA VARIÉTÉ  $A_m^n$

BOHUMIL CENKL, Praha

(Reçu le 4 janvier 1963)

Dans le présent travail, on détermine la connexion affine tangente à une connexion ponctuelle non-linéaire donnée sur  $A_m^n$  avec ses centres ponctuels dans les espaces locaux. On trouve ensuite les connexions non-linéaires telles que leur connexion affine tangente soit la connexion affine osculatrice. On caractérise aussi géométriquement quelques types spéciaux de connexions ponctuelles non-linéaires.

1. Soit donnée une variété différentiable  $X_m$  à  $m$  dimensions. A chaque point  $x^\alpha$ <sup>1)</sup> de la variété  $X_m$  associons un espace affine  $A_n(x)$  à  $n$  dimensions. Nous obtenons ainsi la variété de König  $A_m^n$ . Soit

$$(1.1) \quad M, I_1, \dots, I_n$$

la base choisie dans  $A_n$ . Les transformations admissibles des paramètres sur  $X_m$  et de la base dans  $A_n$  sont

$$(1.2) \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha); \quad \Delta = \text{Det} |A_\alpha^{\alpha'}| \neq 0, \quad A_\alpha^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha};$$

$$M = M', \quad I_a = \sigma_a^{\alpha'} I_{\alpha'}, \quad \sigma = \text{Det} |\sigma_a^{\alpha'}| \neq 0$$

où les fonctions  $\sigma_a^{\alpha'}$  ne dépendent que du point  $x^\alpha$ . Désignons par  $\sigma_a^{\alpha'}$  les éléments de la matrice inverse de  $\|\sigma_a^{\alpha'}\|$ . Nous avons alors

$$(1.3) \quad \sigma_a^{\alpha'} \sigma_b^{\alpha'} = \delta_b^a, \quad \sigma_a^{\alpha'} \sigma_a^{b'} = \delta_a^{b'}.$$

Considérons ensuite l'espace vectoriel  $V_n(x)$  dont les éléments sont les vecteurs de l'espace affine  $A_n(x)$ . Un point  $x^\alpha$  de la variété  $X_m$  et la direction déterminée par un vecteur  $u^a \in V_n(x)$  forment ce qu'on appelle élément  $(x, u)$ . Le point  $x^\alpha$  est appelé centre de l'élément  $(x, u)$ . Notons  $E_m^n$  la variété des éléments  $(x, u)$ ; elle est manifestement à  $m + n - 1$  dimensions. L'espace affine  $A_n(x)$  associé au point  $x^\alpha$  de la variété  $X_m$  peut également être considéré comme un espace affine associé à l'élément  $(x, u)$  de l'espace  $E_m^n$ . En effet,  $u^a$  est un vecteur de  $A_n(x)$ . La base (1) étant choisie,

<sup>1)</sup> On a  $a, b, \dots = 1, 2, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, m$ ;  $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots = 0, 1, 2, \dots, n$ .

déterminons, sur la variété de König ainsi définie ayant  $E_m^n$  pour sa base et  $A_n$  pour son espace local, la connexion affine par les formes

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \omega^a &= \Gamma_{\alpha}^a(x, u) dx^{\alpha} + G_c^a(x, u) du^c, \\ \omega_a^b &= \Gamma_{\alpha a}^b(x, u) dx^{\alpha} + G_{ac}^b(x, u) du^c. \end{aligned}$$

Or, demandons que les formes (4) dépendent seulement des coordonnées  $(x^1, \dots, x^m, t^1, \dots, t^{n-1})$  où  $u^{\tau} = t^{\tau} u^n$  ( $\tau = 1, 2, \dots, n-1$ ). Pour cela, il faut évidemment, et il suffit, que les formes (4) ne varient pas si nous multiplions  $u^a$  par un facteur scalaire  $\varrho(x, u, v)$ ,  $v$  étant un paramètre arbitraire. Il se fait voir que cette condition est exprimée par les équations

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Gamma_{b\alpha}^a(x, \varrho u) &= \Gamma_{b\alpha}^a(x, u), \quad G_{bc}^a(x, \varrho u) = \varrho^{-1} G_{bc}^a(x, u), \\ G_{bc}^a(x, u) u^c &= 0, \end{aligned}$$

où nous posons  $\Gamma_{0\alpha}^a = \Gamma_{\alpha}^a$ ,  $G_{0\alpha}^a = G_{\alpha}^a$ . Si nous nous bornons au cas où  $\varrho$  est une constante réelle, nous pourrions remplacer les conditions (5) par  $(5_{1,2})$ , c'est-à-dire que la dernière des équations (5) pourra ne pas être vérifiée. Nous pouvons écrire les équations qui déterminent la connexion linéaire sur la variété de König définie ci-dessus sous la forme de

$$(1.6) \quad dM = \omega^a I_a, \quad dI_a = \omega_a^b I_b.$$

Nous dirons que le vecteur  $Y(x) = u^a(x) I_a(x)$  se transporte parallèlement suivant la courbe  $c : x^{\alpha} = x^{\alpha}(t)$ ,  $t \in I = \langle t_1, t_2 \rangle$  sur  $X_m$  lorsque les coordonnées  $u^a(x(t))$  du vecteur  $Y$  le long la courbe  $c$  vérifient les équations

$$(1.7) \quad \frac{du^a}{dt} + u^b \left( \Gamma_{b\alpha}^a \frac{dx^{\alpha}}{dt} + G_{bc}^a \frac{du^c}{dt} \right) = 0.$$

Nous dirons que le point  $A(x) = M(x) + u^a(x) I_a(x)$  se transporte parallèlement le long de la courbe  $c$ , lorsque les coordonnées du point  $A$  le long de la courbe  $c$  vérifient l'équation

$$(1.8) \quad \frac{du^a}{dt} + u^b \Gamma_{b\alpha}^a \frac{dx^{\alpha}}{dt} + \Gamma_{\alpha}^a \frac{dx^{\alpha}}{dt} + G_c^a \frac{du^c}{dt} + G_{bc}^a u^b \frac{du^c}{dt} = 0.$$

Ayant ainsi défini le transport parallèle suivant les courbes sur la variété  $X_m$ , nous parlons d'une *connexion ponctuelle non-linéaire*, ou bien tout court de la connexion non-linéaire  $(\Gamma, G)$  sur la variété  $A_m^n$ . Compte tenu transformations admissibles (2), on peut montrer que nous avons les formules de transformation que voici

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\alpha}^a &= \Gamma_{\alpha'}^{a'} A_{\alpha'}^{\alpha} \sigma_{a'}^a + G_c^{a'} \sigma_{a'}^a \partial_{\alpha} \sigma_c^{c'} u^c, \\ \Gamma_{\alpha\alpha'}^b &= \sigma_{\alpha'}^{a'} \sigma_b^b (\Gamma_{\alpha'}^{b'} A_{\alpha'}^{\alpha'} + G_{a'c}^{b'} \partial_{\alpha} \sigma_c^{c'} u^c) - \partial_{\alpha} \sigma_{a'}^b \sigma_{\alpha'}^{a'}, \\ G_{ac}^b &= G_{a'c'}^{b'} \sigma_{b'}^b \sigma_{\alpha'}^{a'} \sigma_c^{c'}, \quad G_c^a = G_c^{a'} \sigma_c^{c'} \sigma_{a'}^a. \end{aligned}$$

Nous entendrons par *différentielle absolue* d'un vecteur contrevariant  $u^a$  l'expression

$$(1.10) \quad Du^a = du^a + u^b(\Gamma_{ba}^a dx^a + G_{bc}^a du^c).$$

Nous pouvons évidemment écrire  $Du^a = (\delta_c^a + u^b G_{bc}^a) du^c + u^b \Gamma_{ba}^a dx^a$ . Nous voyons que nous avons sur la variété  $E_m^n$ , le champ tensoriel

$$(1.11) \quad \Phi_c^a = \delta_c^a + u^b G_{bc}^a.$$

Supposons ensuite que nous ayons  $\Phi = \text{Det} |\Phi_c^a| \neq 0$ . Dans ce cas-là, nous dirons que la connexion définie sur l'espace des éléments est régulière. Dans la suite, nous ne considérerons que des connexions régulières, mais nous les appellerons connexions tout court.

Définissons maintenant les grandeurs  $M_a^b$  à l'aide des expressions

$$(1.12) \quad M_a^b \Phi_b^c = \delta_a^c, \quad M_a^b \Phi_c^a = \delta_c^b.$$

En vertu de (10) et (11) nous avons donc

$$(1.13) \quad du^b = M_a^b (Du^a - u^c \Gamma_{ca}^a dx^a).$$

Les formes qui déterminent la connexion de la variété  $A_m^n$  peuvent maintenant s'écrire comme

$$\begin{aligned} \omega^a &= (\Gamma_{\alpha}^a - M_b^c G_c^a \Gamma_{e\alpha}^b u^e) dx^{\alpha} + G_c^a M_b^c Du^b, \\ \omega_a^b &= (\Gamma_{aa}^b - M_e^c G_{ac}^b \Gamma_{ha}^e u^h) dx^{\alpha} + G_{ac}^b M_e^c Du^e. \end{aligned}$$

Si nous posons maintenant

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \overset{*}{\Gamma}_{aa}^b &= \Gamma_{aa}^b - M_e^c G_{ac}^b \Gamma_{ha}^e u^h, & \overset{*}{G}_{ac}^b &= G_{ae}^b M_c^e, \\ \overset{*}{\Gamma}_{\alpha}^a &= \Gamma_{\alpha}^a - M_b^c G_c^a \Gamma_{h\alpha}^b u^h, & \overset{*}{G}_b^a &= G_c^a M_b^c, \end{aligned}$$

et que nous écrivions  $Du^c = \tilde{u}^c$ , nous pourrions exprimer les formes  $\omega^a, \omega_a^b$  ainsi:

$$(1.15) \quad \omega^a = \overset{*}{\Gamma}_{\alpha}^a dx^{\alpha} + \overset{*}{G}_c^a \tilde{\omega}^c, \quad \omega_a^b = \overset{*}{\Gamma}_{aa}^b dx^{\alpha} + \overset{*}{G}_{ac}^b \tilde{\omega}^c.$$

**2.** Une fonction  $a(x, u)$  définie sur  $E_m^n$  sera appelée *scalaire de poids p*, lorsque les transformations (1.2) font varier cette fonction suivant la loi

$$(2.1) \quad a' = \Delta^p a.$$

Lorsque  $p = 0$ , nous parlons de scalaire tout court.

Par *tenseur de caractéristique*  $\left( p, \begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \right)$  nous entendrons l'ensemble des fonctions  $T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  sur  $E_m^n$  avec la loi de transformation

$$(2.2) \quad T_{\beta_1', \dots, \beta_s'}^{\alpha_1', \dots, \alpha_r'} = \Delta^p T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} A_{\alpha_1'}^{\alpha_1} \dots A_{\alpha_r'}^{\alpha_r} A_{\beta_1'}^{\beta_1} \dots A_{\beta_s'}^{\beta_s}$$

pour les transformations admissibles (1.2).

Soient maintenant  $Y_a(x) = u^b(x) I_b(x)$   $n$  champs vectoriels linéairement indépendants sur la variété  $A_m^n$ . Soient  $u_b^a(x)$  les fonctions vérifiant les équations

$$(2.3) \quad u^b u_c^a = \delta_c^b, \quad u^b u_b^a = \delta_a^c.$$

L'ensemble des fonctions  $u^b$  (ou  $u_b$ , resp.) étant donné, nous dirons que nous avons un repère fondamental dans l'espace local  $A_n(x)$ .

Soient

$$T_{e_1, \dots, e_v}^{d_1, \dots, d_u} \quad T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$$

des tenseurs de caractéristique  $\left( p, \begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \right)$ . Considérons les expressions

$$(2.4) \quad T_{b_1', \dots, b_v', \beta_1', \dots, \beta_s'}^{a_1, \dots, a_u, \alpha_1, \dots, \alpha_r} = T_{e_1, \dots, e_v}^{d_1, \dots, d_u} T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} u^{a_1}_{d_1} \dots u^{a_u}_{d_u} u^{e_1}_{b_1'} \dots u^{e_v}_{b_v'}$$

qui se transforment par (1.2) selon la loi

$$(2.5) \quad T_{b_1', \dots, b_v', \beta_1', \dots, \beta_s'}^{a_1', \dots, a_u', \alpha_1', \dots, \alpha_r'} = \Delta^p T_{b_1, \dots, b_v, \beta_1, \dots, \beta_s}^{a_1, \dots, a_u, \alpha_1, \dots, \alpha_r} A_{\alpha_1'}^{\alpha_1} \dots A_{\alpha_r'}^{\alpha_r} A_{\beta_1'}^{\beta_1} \dots A_{\beta_s'}^{\beta_s} \sigma_{a_u'}^{a_u} \sigma_{b_1'}^{b_1} \dots \sigma_{b_v'}^{b_v}.$$

L'ensemble des fonctions (4) avec la loi de transformation (5) sera appelé *tenseur de caractéristique*  $\left( \begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}, p, \begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \right)$ . Si  $p = 0$ , nous parlerons de tenseur tout court. Lorsque  $p = r = s = 0$  et  $u = 0$  (ou bien  $v = 0$ ), nous parlerons d'un tenseur covariant (ou contrevariant, respectivement).

Par la *différentielle relative d'un tenseur de caractéristique*  $\left( \begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}, 0, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ , qui sera noté simplement par  $\left( \begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}, 0 \right)$ , par rapport au champ vectoriel  $u^a$ , nous entendons

$$(2.6) \quad \underset{(u)}{DT}_{b_1, \dots, b_v}^{a_1, \dots, a_u} = dT_{b_1, \dots, b_v}^{a_1, \dots, a_u} + T_{b_1, \dots, b_v}^{a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_u} \omega_c^{a_i} - T_{b_1, \dots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \dots, b_v}^{a_1, \dots, a_u} \omega_{b_i}^c.$$

Considérons, à titre d'exemple, le tenseur  $T_{ab}$ . Sa différentielle relative par rapport au champ  $u^a$  est donc

$$\begin{aligned} \underset{(u)}{DT}_{ab} &= dT_{ab} - T_{ac}\omega_b^c - T_{cb}\omega_a^c = \\ &= \{\partial_\alpha T_{ab} - M_c^e u^h \Gamma_{ha}^c \partial_e T_{ab} - T_{ac} \overset{*}{\Gamma}_{ba}^c - T_{cb} \overset{*}{\Gamma}_{ba}^c\} dx^\alpha + \\ &\quad + \{\partial_e T_{ab} M_c^e - T_{ac} \overset{*}{G}_{bc}^e - T_{eb} \overset{*}{G}_{ac}^e\} Du^c. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire brièvement

$$(2.7) \quad \underset{(u)}{DT}_{ab} = T_{ab/\alpha} dx^\alpha + T_{ab/c} Du^c,$$

la signification de  $T_{ab/\alpha}$  et  $T_{ab/c}$  étant évidente des calculs précédents.

3. D'une manière analogue à celle appliquée dans les espaces à connexion affine, nous pouvons maintenant exprimer les tenseurs de torsion et de courbure. Par différentiation extérieure de (1.4) nous obtenons

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [d\omega^a] &= [\omega^b \omega_b^a] - \Omega^a, \\ [d\omega_a^b] &= [\omega_a^c \omega_c^b] - \Omega_a^b, \end{aligned}$$

où, comme il est aisé de montrer

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 2\Omega^a &= S_{\alpha\beta}^a [dx^\alpha dx^\beta] + S_{ce}^a [\tilde{\omega}^c \tilde{\omega}^e] + 2S_{ac}^a [dx^\alpha \tilde{\omega}^c], \\ 2\Omega_a^b &= R_{\alpha\beta a}^b [dx^\alpha dx^\beta] + R_{lha}^b [\tilde{\omega}^l \tilde{\omega}^h] + 2R_{\alpha la}^b [dx^\alpha \tilde{\omega}^l], \end{aligned}$$

$S$  et  $R$  étant le tenseur de torsion et celui de courbure. Si nous écrivons explicitement les composantes du tenseur de courbure, nous obtenons

$$(3.3) \quad \begin{aligned} R_{\alpha\beta a}^b &= 2\partial_{[\beta} \overset{*}{\Gamma}_{|a|\alpha]}^b + 2\overset{*}{\Gamma}_{a[\alpha}^c \overset{*}{\Gamma}_{|\beta]}^b + 2\partial_c \overset{*}{\Gamma}_{a[\beta}^b \overset{*}{\Gamma}_{|\alpha]}^k M_k^c u^h, \\ R_{lka}^b &= 2\partial_c \overset{*}{G}_{a[l}^b M_{k]}^c + 2\overset{*}{G}_{a[l}^c \overset{*}{G}_{|k]}^b, \\ R_{\alpha la}^b &= \partial_c \overset{*}{\Gamma}_{\alpha a}^b M_l^c - \partial_\alpha \overset{*}{G}_{al}^b + \overset{*}{G}_{cl}^b \overset{*}{\Gamma}_{\alpha a}^c - \overset{*}{G}_{al}^c \overset{*}{\Gamma}_{ca}^b + \partial_c \overset{*}{G}_{al}^c M_k^b \overset{*}{\Gamma}_{ha}^k u^h. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, le tenseur de torsion peut être exprimé sous la forme

$$(3.4) \quad \begin{aligned} S_{\alpha\beta}^a &= 2\partial_{[\beta} \overset{*}{\Gamma}_{\alpha]}^a + 2\overset{*}{\Gamma}_{[\alpha}^b \overset{*}{\Gamma}_{|\beta]}^a + 2\partial_c \overset{*}{\Gamma}_{[\beta}^a \overset{*}{\Gamma}_{|\alpha]}^b M_b^c u^h, \\ S_{hi}^a &= 2\partial_c \overset{*}{G}_{[h}^a M_{i]}^c + 2\overset{*}{G}_{[h}^b \overset{*}{G}_{|i]}^a, \\ S_{ab}^a &= \partial_c \overset{*}{\Gamma}_{a}^a M_b^c - \partial_a \overset{*}{G}_b^a + \overset{*}{\Gamma}_a^c \overset{*}{G}_{cb}^a - \overset{*}{\Gamma}_{ca}^a \overset{*}{G}_b^c + \partial_c \overset{*}{G}_b^a M_i^c \overset{*}{\Gamma}_{ha}^i u^h. \end{aligned}$$

4. Dans cette partie de notre travail nous allons considérer l'approximation d'une connexion non-linéaire sur une variété de König  $A_m^n$  par une connexion affine générale, définie ci-dessous, dans le cas où l'on a

$$(4.1) \quad G_{ca}^b = G_a^b = 0.$$

Soit donc donnée une variété de König  $A_m^n$ . Nous dirons qu'une *connexion affine générale* est donnée sur la variété  $A_m^n$ , lorsque pour toute courbe  $c : x^\alpha = x^\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , sur la variété  $X_m$ , et pour tout espace local  $A_n(x(t_0))$ ,  $t_0 \in I$ , on se donne une affinité  $\mathcal{A}_c(t_0, t)$ ,  $t \in I$ , de l'espace  $A_n(x(t_0))$  sur l'espace  $A_n(x(t))$ . L'application  $t \rightarrow \mathcal{A}_c(t_0, t)$  est une application différentiable de  $I$  dans l'ensemble des affinités de l'espace  $A_n(x(t_0))$  sur l'espace  $A_n(x(t))$ , pour  $t \in I$  arbitraire.

Remarquons que pour une connexion affine générale sur la variété  $A_m^n$ , l'affinité  $\mathcal{A}_c(t_0, t)$  de l'espace  $A_n(x(t_0))$  sur  $A_n(x(t))$ , les points  $x(t_0), x(t)$  étant fixés sur la courbe  $c$ , ne coïncide généralement pas avec l'affinité  $\mathcal{A}_c(t, t_0)$  de l'espace  $A_n(x(t))$  sur  $A_n(x(t_0))$ . En effet, l'affinité  $\mathcal{A}_c(t_0, t)$  dépend de la courbe  $c$  et du choix du point  $x(t_0)$  sur  $c$ , c'est-à-dire qu'elle dépend de la courbe  $c$  „centrée”. Dans le cas où l'affinité  $\mathcal{A}_c(t_0, t)$  coïncide avec  $\mathcal{A}_c(t, t_0)$  pour toute paire  $t_0, t \in I$ , nous obtenons une connexion affine sur la variété de König, au sens usuel. L'approximation de la connexion non-linéaire par la connexion affine générale qui vient d'être définie, sera entendue comme suit: Si nous avons une courbe  $c : x^\alpha = x^\alpha(t)$ ,  $t \in I_1 = \langle t_1, t_2 \rangle$ ,  $x^\alpha(t_1) = x^\alpha$ ,  $x^\alpha(t_2) = x^\alpha$  sur la variété  $X_m$ , le transport parallèle de l'espace affine  $A_n(x)$  le long de la courbe  $c$  sur l'espace  $A_n(x(t))$ ,  $t \in I_1$ , est donné par la solution des équations (1.8) dans l'intervalle  $I_1$ . Si nous fixons un point  $A$  dans l'espace  $A_n(x)$  et prenons la solution  $u^a(t)$  des équations (1.8) avec la condition initiale  $u^a(t_1) = u^a$ , où  $A = M(x) + u^a I_a(x)$ , alors le point  $B = M(x) + u^a(t) I_a(x)$  sera le point  $A$  transporté parallèlement par la connexion non-linéaire donnée. Supposons maintenant, pour simplifier l'écriture, que l'intervalle  $I$  coïncide avec l'intervalle  $I_1$ , cela veut dire que les équations (1.8) admettent une solution dans l'intervalle  $I$ . Le transport parallèle des points par la connexion non-linéaire nous détermine une application  $\mathcal{C}_c$  de l'espace affine  $A_n(x)$  sur  $A_n(x)$ , donc une correspondance existant entre les espaces affines considérés, mais qui dépend de la courbe  $c$ . On sait bien qu'à toute correspondance générale  $C_c$  il est associé une et une seule affinité tangente  $\mathcal{A}_c$  correspondant au choix du point  $A$  de l'espace local  $A_n(x)$  (voir [3]). Cette affinité dépend, dans le point considéré, d'une part de la courbe  $c$ , d'autre part du choix de l'espace local  $A_n(x)$  et du point  $A$  en cet espace. Si nous avons donc une variété de König  $A_m^n$  aux espaces locaux centrés, c'est-à-dire si nous fixons un point en chaque espace local, nous obtenons pour la connexion non-linéaire donnée, une et une seule connexion affine générale, que nous appelons *connexion affine tangente* à la connexion non-linéaire

donnée. Si  $\mathcal{A}_c$  est l'affinité osculatrice à la correspondance  $\mathcal{C}_c$  dans le point  $A$  de l'espace local  $A_n(x)$ ,  $x$  étant un point arbitraire de la variété  $X_m$ , la connexion affine tangente sera appelée *connexion affine osculatrice*.

Prenons maintenant un espace local  $A_n(x(t_0))$ ,  $t_0 \in I$ , et en lui un point  $A(x(t_0))$ . Sur la variété  $X_m$  prenons une courbe  $c$  passant par le point  $x(t_0)$  et l'espace local  $A_n(x(t))$  au point  $x(t)$  de la courbe  $c$ . Soit ensuite  $\gamma$  une courbe dans l'espace local  $A_n(x(t_0))$  passant par le point  $A(x(t_0))$  et soit  $v$  le vecteur tangent à la courbe  $\gamma$  en  $A(x(t_0))$ . Par le transport parallèle dans la connexion non-linéaire donnée sur  $A_m^n$ , nous obtenons à partir de  $\gamma$  une courbe  $\gamma'$  dans l'espace  $A_n(x(t))$ , soit  $v'$  le vecteur  $v$  transporté parallèlement de la même façon dans l'espace  $A_n(x(t))$ . Supposons que  $v'$  est le vecteur tangent à la courbe  $\gamma'$  au point considéré. Les connexions non-linéaires de ce type seront caractérisées dans la suite, pour le cas de variétés de König aux espaces locaux localement centrés.

Dans l'étoile de droites de sommet  $A(x(t_0))$  dans l'espace local  $A_n(x(t_0))$ , il y a, pour la correspondance  $\mathcal{C}_c$  existant entre les espaces  $A_n(x(t_0))$  et  $A_n(x(t))$  et donnée par la connexion non-linéaire sur la variété  $A_m^n$ , une et une seule transformation quadratique qui associe à la courbe  $\gamma$  en  $A(x(t_0))$  la droite linéarisante (voir [1]). Si nous fixons dans  $A_n(x(t_0))$  un sous-espace contenant le point  $A(x(t_0))$  et demandons que la droite linéarisante soit située dans ce sous-espace, nous obtenons une correspondance  $\mathcal{C}_c$  spéciale. Si nous demandons donc que la droite linéarisante se trouve dans le sous-espace choisi pour n'importe quelle courbe  $\gamma$  passant par le point  $A(x(t_0))$ , pour n'importe quel choix de l'espace  $A_n(x(t))$  sur la courbe  $c$ , et pour n'importe quelle courbe  $c$  sur  $X_m$  passant par le point  $x(t_0)$ , nous obtenons une condition pour la connexion non-linéaire en  $x(t_0)$ . En étendant ces conditions géométriques à tous les points  $x$  de la variété  $X_m$ , nous obtenons une connexion non-linéaire spéciale sur la variété de König  $A_m^n$  aux espaces locaux centrés — les centres sont ponctuels. En faisant varier le choix des sous-espaces mentionnés des espaces locaux de la variété  $A_m^n$ , nous obtenons différents types de connexions non-linéaires sur la variété localement centrée  $A_m^n$ . Le transport parallèle qui est donné par ces connexions non-linéaires spéciales peut être caractérisé, à l'aide des droites linéarisantes et des connexions affines tangentes mentionnées ci-dessus, par des propriétés de contact et de projection, comme cela résulte facilement de [1]. C'est donc dans ce sens-ci que nous comprenons l'approximation d'une connexion non-linéaire par une connexion affine générale.

Considérons donc à présent une variété de König centrée  $A_m^n$  et étudions les relations existant entre le transport parallèle des points et celui des vecteurs dans une connexion non-linéaire sur  $A_m^n$ .

En supposant (1) vérifié, nous pouvons écrire les équations différentielles du transport parallèle de vecteurs et de points sous la forme.

$$(4.2) \quad \frac{dv^a}{dt} + v^b \Gamma_{ba}^a \frac{dx^a}{dt} = 0, \quad \frac{du^a}{dt} + (\Gamma_{\alpha}^a + u^b \Gamma_{ba}^a) \frac{dx^a}{dt} = 0.$$



Il est alors possible d'exprimer les développements, au voisinage du point  $t_0 \in I$  de la solution des équations (2) correspondant aux conditions initiales  $v^a(t_0)$ ,  $u^a(t_0)$ , de la façon suivante

$$(4.3) \quad \begin{aligned} v^a(t) &= v^a(t_0) - t(v^b \Gamma_{ba}^a x^a)_{t_0} + \\ &+ \frac{t^2}{2} \{(\Gamma_{c\beta}^b \Gamma_{ba}^a - \partial_\beta \Gamma_{ca}^a + v^l \partial_b \Gamma_{ca}^a \Gamma_{l\beta}^b) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \Gamma_{ca}^a \ddot{x}^\alpha\}_{t_0} v^c(t_0) + \dots \\ u^a(t) &= u^a(t_0) - t\{(\Gamma_\alpha^a + u^b \Gamma_{ba}^a) \dot{x}^\alpha\}_{t_0} - \\ &- \frac{t^2}{2} \{(\partial_\beta \Gamma_\alpha^a - \partial_c \Gamma_\beta^a \Gamma_\alpha^c - \partial_c \Gamma_\beta^a \Gamma_{ba}^a u^b + \partial_\beta \Gamma_{ba}^a u^b - \partial_c \Gamma_{b\beta}^a \Gamma_\alpha^c u^b - \partial_c \Gamma_{b\beta}^a \Gamma_{la}^c u^b u^l - \\ &- \Gamma_{b\beta}^a \Gamma_\alpha^b - \Gamma_{b\beta}^a \Gamma_{ca}^b u^c) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + (\Gamma_\alpha^a + \Gamma_{ba}^a u^b) \ddot{x}^\alpha\}_{t_0} + \dots \quad \text{où } \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Pour mettre un relief explicitement le fait que la condition initiale  $u^a(t_0)$  de la solution des équations différentielles (2<sub>2</sub>) dépend de  $n$  paramètres  $s_1, \dots, s_n$  – correspondant au choix du point dans l'espace local  $A_n(x(t_0))$  – écrivons maintenant pour un instant  $u^a(t_0; s_1, \dots, s_n) = u^a(t_0, s)$ . La courbe en  $A_n(x(t_0))$  est donc donnée paramétriquement:  $s_a = s_a(\tau)$ ,  $\tau \in I' = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ . Ecrivons alors pour plus de brièveté  $u^a(t_0, s_a(\tau)) = u^a(t_0, \tau)$ . Considérons maintenant, dans l'espace local  $A_n(x(t))$ , la courbe  $\gamma(t) : A(t, \tau) = M(t) + u^a(t, \tau) I_a(t)$ . Pour une valeur fixée  $\tau \in I'$  du paramètre soit  $u^a(t, \tau)$  la solution des équations (2<sub>2</sub>) exprimée sous la forme de (3<sub>2</sub>). La courbe  $\gamma(t)$  dans l'espace local  $A_n(x(t))$  résulte alors du transport parallèle de la courbe  $\gamma(t_0)$  de l'espace  $A_n(x(t_0))$  dans l'espace  $A_n(x(t))$ . Examinons maintenant comment se transportent les vecteurs tangents à la courbe  $\gamma(t_0)$  et cherchons les conditions sous lesquelles le transport parallèle du vecteur tangent à la courbe  $\gamma(t_0)$  dans le point correspondant à la valeur  $\tau_0 \in I'$  donne le vecteur tangent à la courbe  $\gamma(t)$  dans le point correspondant à la même valeur  $\tau_0 \in I'$ , et ceci pour tout choix de la courbe  $c$  sur  $X_m$  et pour n'importe quelle courbe  $\gamma(t_0)$  dans l'espace affine  $A_n(x(t_0))$  passant par le point  $A(t_0, \tau_0)$  – c'est-à-dire par le centre de l'espace local. Une telle connexion non-linéaire sera appelée connexion non-linéaire tangente.

En vertu de (3<sub>2</sub>) nous avons

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \left. \frac{\partial u^a(t, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau_0} &= \left. \frac{\partial u^a(t_0, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau_0} - t \left\{ \partial_c (\Gamma_\alpha^a + u^b \Gamma_{ba}^a) \dot{x}^\alpha \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau} \right\}_{\tau_0, t_0} - \\ &- \frac{t^2}{2} \left\{ \partial_c (\dots) \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau} \right\}_{\tau_0, t_0} + \dots \end{aligned}$$

Il faut donc que  $\partial u^a(t, \tau) / \partial \tau|_{\tau_0}$  vérifient les équations différentielles (2<sub>1</sub>). Nous obtenons donc la condition cherchée sous la forme

$$(4.5) \quad \left\{ \partial_c (\Gamma_\alpha^a + u^b \Gamma_{ba}^a) \dot{x}^\alpha \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau} \right\}_{\tau_0, t_0} = \left\{ \Gamma_{ca}^a \dot{x}^\alpha \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau} \right\}_{\tau_0, t_0}$$

Si nous exigeons que (5) soit vrai pour n'importe quelle courbe  $c$  sur  $X_m$  et pour n'importe quelle courbe  $\gamma$  dans l'espace affine local, nous obtenons au lieu de (5) la condition

$$(4.6) \quad \partial_c(\Gamma_\alpha^a + u^b \Gamma_{b\alpha}^a) = \Gamma_{c\alpha}^a.$$

Il est évident que l'on peut écrire (6) en vertu de (3.3), (3.4) comme suit:

$$(4.7) \quad S_{\alpha c}^a + u^b R_{\alpha c b}^a = 0.$$

La condition (7) est nécessaire pour que la connexion non-linéaire soit une connexion non-linéaire tangente. Il est aisé de voir que  $S_{\alpha c}^a = R_{\alpha c b}^a = 0$  est la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion non-linéaire sur la variété  $A_m^n$  soit une connexion affine sur la variété de König  $A_m^n$ . Il suffit, en effet, de se rendre compte que dans (7)  $u^b$  sont les coordonnées du centre.

Calculons maintenant l'affinité tangente à la correspondance  $\mathcal{C}_c$  de l'espace  $A_n(x)$  dans  $A_n(x)$ , correspondant à un point  $A(x)$  dans  $A_n(x)$ , ainsi que la droite linéarisante associée à cette affinité. Soit maintenant (3<sub>2</sub>) le développement de la solution de l'équation (2<sub>2</sub>) au voisinage du point correspondant à la valeur  $t_1$  du paramètre; c'est-à-dire soit  $t_0 = t_1$ . La correspondance  $\mathcal{C}_c$  est donc donnée comme suit:  $\mathcal{C}_c : A(x) \rightarrow A(x)$ , où

$$(4.8) \quad \begin{aligned} A(x) &= M(x) + u^a(t_1) I_a(x), \\ A(x) &= M(x) + u^a(t_2) I_a(x). \end{aligned}$$

L'affinité générale  $\mathcal{A}_c$  de l'espace  $A_n(x)$  sur  $A_n(x(t))$  qui associe l'un à l'autre les points  $A(x)$  et  $A(x(t))$ , est donc

$$(4.9) \quad \mathcal{A}_c A = B, \quad \mathcal{A}_c I_a = \omega_a^b J_b,$$

où

$$A(x) = A, \quad A(x(t)) = B, \quad I_a(x) = I_a, \quad I_a(x(t)) = J_a.$$

Ici,  $\omega_a^b$  est fonction du paramètre  $t$  si l'espace  $A_n(x)$  est fixé; il est aussi fonction de la condition initiale  $u^a(t_1)$  des équations différentielles (2). Demandons ensuite que  $\mathcal{A}_c$  soit l'affinité tangente à la correspondance  $\mathcal{C}_c$ , c'est-à-dire que l'on ait

$$(4.10) \quad \mathcal{A}_c dA = dB.$$

La différentielle  $d$ , c'est la différentielle par rapport aux paramètres  $s_a$ , dont dépend le choix du point  $A(x)$ . Nous pouvons manifestement écrire

$$(4.11) \quad dA = du^a(t_1) I_a, \quad dB = du^a(t) J_a.$$

Nous demandons donc que nous ayons  $\omega_c^a(t) du^c(t_1) = du^a(t)$ . Or, comme

$$(4.12) \quad du^a(t) = du^a(t_1) - t\{\partial_c(\Gamma_\alpha^a + u^b\Gamma_{ba}^a) \dot{x}^\alpha\}_{t_1} du^c(t_1) - \\ - \frac{t^2}{2} \{\partial_c(\dots)\}_{t_1} du^c(t_1) + \dots,$$

nous avons

$$(4.13) \quad \omega_c^a(t) = \delta_c^a - t\{\partial_c(\Gamma_\alpha^a + u^b\Gamma_{ba}^a) \dot{x}^\alpha\}_{t_1} - \\ - \frac{t^2}{2} \partial_c\{(\partial_\beta\Gamma_\alpha^a - \partial_t\Gamma_\beta^a\Gamma_\alpha^t - \partial_t\Gamma_\beta^a\Gamma_{ba}^t u^b + \partial_\beta\Gamma_{ba}^a u^b - \partial_t\Gamma_{b\beta}^a\Gamma_\alpha^t u^b - \\ - \partial_t\Gamma_{b\beta}^a\Gamma_{ka}^t u^b u^k - \Gamma_{b\beta}^a\Gamma_\alpha^b - \Gamma_{b\beta}^a\Gamma_{la}^b u^l) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + (\Gamma_\alpha^a + u^b\Gamma_{ba}^a) \dot{x}^\alpha\}_{t_1} + \dots$$

Nous obtenons une fois de plus le fait bien connu, savoir que l'affinité  $\mathcal{A}_c$  est déterminée sans ambiguïté par l'équation (13). Considérons maintenant une courbe  $c$  sur  $X_m$  quelconque; nous obtenons à partir de l'existence d'une connexion non-linéaire sur  $A_m^n$  une seule connexion affine sur  $A_m^n$ , à condition que nous ayons choisi un point dans chaque espace local affine  $A_n(x)$ . Soit  $A(x) = M(x) + u^a(x) I_a(x)$  ce point. Si nous substituons ses coordonnées  $u^a(x)$  dans  $\Gamma_\alpha^a$  et  $\Gamma_{ba}^a$ , en obtenant ainsi  $\tilde{\Gamma}_\alpha^a$  et  $\tilde{\Gamma}_{ba}^a$ , alors les formes  $\omega^a = \tilde{\Gamma}_\alpha^a dx^\alpha$ ,  $\omega_a^b = \tilde{\Gamma}_{ba}^b dx^\alpha$  donnent la connexion affine mentionnée. Nous obtenons donc une connexion affine au sens usuel du mot, et qui n'est pas identique avec la connexion affine tangente définie ci-dessus. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante: *Si  $A_m^n$  est une variété de König aux espaces locaux affines centrés et  $\Gamma$  une connexion non-linéaire sur  $A_m^n$ , alors il existe une et une seule connexion affine tangente  $\Omega$  sur  $A_m^n$  qui est tangente à la connexion non-linéaire  $\Gamma$ , et une et une seule connexion affine  $\tilde{\Gamma}$ .*

Ensuite, nous avons

$$(4.14) \quad d^2 A = d^2 u^a(t_1) I_a, \\ d^2 B = d^2 u^a(t) J_a = (d\omega_c^a(t) du^c(t_1) + \omega_c^a(t) d^2 u^c(t_1)) J_a.$$

En vertu de (9), nous avons

$$(4.15) \quad \mathcal{A}_c d^2 A = \omega_c^a(t) d^2 u^c(t_1) J_a.$$

En posant  $L = \underset{2}{d^2}B - \mathcal{A}_c \underset{2}{d^2}A$ , nous obtenons évidemment

$$(4.16) \quad L = \underset{2}{d\omega_c^a(t)} \underset{2}{du^c(t_1)} J_a.$$

Dans l'étoile de droites dans  $A_n(x(t))$  de sommet  $A(x(t))$  nous avons maintenant une transformation quadratique qui associe à toute droite  $\{B, \underset{2}{du^a(t)} J_a\}$  la droite  $\{B, L\}$ .

Nous parlons alors d'une transformation linéarisante (voir [3]). La droite  $\{B, L\}$  s'appelle *droite linéarisante* et la direction déterminée par le vecteur  $L$  s'appelle *direction linéarisante* correspondant à la direction  $\underset{2}{du^a(t)}$ . La connexion non-linéaire étant donnée, la direction  $L$  dépend: 1) du choix du point  $A$ , 2) de la courbe  $c$  sur  $X_m$  et de la position de l'espace local sur  $c$ , 3) de la direction  $\underset{2}{du^a(t_1)} I_a$ .

Supposons que nous ayons  $\omega = \text{Det } |\omega_a^b| \neq 0$  le long de la courbe correspondante sur  $X_m$ . Nous définissons alors  $\tilde{\omega}_a^b$  par la relation

$$(4.17) \quad \omega_c^a(t) \tilde{\omega}_a^b(t) = \delta_c^b.$$

L'affinité  $\mathcal{A}_c$  fait correspondre à la direction  $L$  dans  $A_n(x(t))$  la direction  $L^{-1} = \mathcal{A}^{-1}L$  dans  $A_n(x)$ . Un calcul direct fait voir que

$$(4.18) \quad L^{-1} = \lambda^b I_b$$

où

$$(4.19) \quad \lambda^b = \underset{2}{d\omega_c^a(t)} \underset{2}{du^c(t_1)} \tilde{\omega}_a^b(t).$$

Si nous écrivons

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \Omega_\alpha^a &= \Gamma_\alpha^a + u^b \Gamma_{b\alpha}^a, & \Omega_{ab}^a &= \partial_b \Omega_\alpha^a, \\ M_{ac\alpha}^b &= \partial_{ac}(\Gamma_\alpha^b + u^l \Gamma_{l\alpha}^b), \end{aligned}$$

alors (19) devient

$$(4.21) \quad \lambda^b = \left\{ - (M_{c1\alpha}^b \dot{x}^\alpha)_{t_1} - \frac{t}{2} (\partial_\beta M_{c1\alpha}^b \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + 2\Omega_{\beta a}^b M_{c1\alpha}^a \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + M_{c1\alpha}^a \ddot{x}^\alpha)_{t_1} + \dots \right\} \cdot \underset{2}{t du^l(t_1)} \underset{2}{du^c(t_1)}.$$

Si  $M_{bc\alpha}^a = 0$ , nous avons  $\lambda^a = 0$ , donc  $L = 0$ . Réciproquement, si  $L = 0$  pour toutes les courbes  $c$  sur  $X_m$ , pour toutes les courbes  $\gamma$  dans  $A_n(x)$  et pour tout  $t \in I$ , on a  $M_{bc\alpha}^a = 0$ . Nous avons donc la proposition suivante: <sup>1</sup>

$$(4.22) \quad M_{bc\alpha}^a = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion affine tangente

à la connexion non-linéaire donnée sur une variété ponctuellement centrée  $A_m^n$  soit une connexion affine osculatrice.

Au lieu de (22), nous pouvons écrire

$$(4.22') \quad \partial_l S_{ac}^b + R_{aia}^b + u^a \partial_l R_{aca}^b = 0.$$

Or,  $R_{aia}^b$  n'est rien d'autre que le tenseur d'alinéarité (cf. [2]). Ecrivons maintenant d'après (21)  $\lambda^b = L_{ac}^b du^a(t_1) du^c(t_1) x$ . Soit  $W_p$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $V_n$ , lequel est formé par les vecteurs indépendants  $K_\kappa = \omega^a I_a^\kappa$ ,  $0 < \kappa \leq p$ .

Nous avons donc dans chaque espace local  $A_n$ , en y fixant un point  $A$ , un sous-espace à  $p$  dimensions  $\{A, K_\kappa\}$ . Demandons que la droite linéarisante  $\{A, L^{-1}\}$  – image de la droite linéarisante  $\{B, L\}$  dans l'affinité tangente correspondante – soit une droite du sous-espace  $\{A, K_\kappa\}$  pour n'importe quel choix 1) du point  $x^a \in X_m$ , 2) de la courbe  $c$  sur  $X_m$ , 3) des espaces locaux  $A_n(x(t_1))$ ,  $A_n(x(t))$  sur  $c$ , 4) de la courbe  $\gamma$  dans  $A_n(x)$ , passant par le point  $A$ . Pour cela, il faut et il suffit que pour n'importe quel choix 1)–4) il existe un nombre réel  $k$  et un vecteur  $z^a$  de l'espace vectoriel  $W_p$  tels que l'on ait

$$(4.23) \quad L_{bc}^a du^b(t_1) du^c(t_1) = kz^a.$$

D'une manière analogue au cas d'une variété de König  $A_2^3$  à connexion affine, il est possible de construire la géométrie différentielle locale d'une variété  $A_2^3$  à connexion non-linéaire.

#### Littérature

- [1] E. Čech: Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces I. Časopis pro pěstování matematiky 74 (1949), 32–48.
- [2] A. Kawaguchi: On the theory of non-linear connexions, I. Tensor 2 (1952), 123–142.
- [3] A. Švec: L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Czechoslovak Math. Journal 10 (1960), 523–550.

#### Výtah

### NELINEÁRNÍ KONEXE NA VARIETĚ $A_m^n$

BOHUMIL CENKL, Praha

Nechť je dána  $m$ -dimensionální diferencovatelná varieta  $X_m$ . Každému bodu  $x^a \in X_m$  přiřadme  $n$ -dimensionální afinní prostor  $A_n(x)$ . Dostáváme tak tzv. Königovu varietu  $A_m^n$ . Nechť  $V_n$  je  $n$ -dimensionální vektorový prostor (množina vektorů afinního prostoru  $A_n(x)$ ). Nelineární konexi  $(\Gamma, G)$  na  $A_m^n$  definujeme formami (1.4), když platí

(1.5), kde  $x^a \in X_m$  a  $u$  je směr určený vektorem  $u^a \in V_n$ . Paralelní přenos vektoru  $U = u^a J_a$  resp. bodu  $A = M + u^a J_a$  lokálního afinního prostoru podél křivky  $c : x^a = x^a(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  je dán diferenciálními rovnicemi (1.7) resp. (1.8). Dále jsou zavedeny relativní diferenciály zobecněných tenzorů a definovány tenzory torse a křivosti.

V dalším uvažujeme paralelní přenos bodu za předpokladu, že platí (4.1). Zvolíme-li na pevné křivce  $c$  na  $X_m$  dva lokální prostory, máme uvedeným paralelním přenosem dānu korespondenci (zobrazení na) mezi dvěma afinními prostory. Je znāmo, že pro každou volbu bodu v jednom z těchto dvou prostorů existuje právě jedna tečná afinita  $\mathcal{A}_c$  uvedené korespondence. Dostáváme tak při pevné křivce  $c$  a zvoleném bodu v jednom lokálním prostoru na  $c$  jednoparametrický systém afinit. Zvolíme-li v každém lokálním prostoru  $A_n(x)$  bod  $A(x)$ , nazveme *tečnou afinní konexí* takovou konexi na  $A_m^n$ , při které je přenos bodů podél křivky  $c$  dān výše uvedenou tečnou afinitou, zvolíme-li na  $c$  pevný bod  $y$  a  $A(y)$  je počáteční hodnota pro systém (4.2). Takto definovaná tečná afinní konexe není afinní konexí v obvyklém slova smyslu. Ukazuje se však, že platí následující tvrzení: *K nelineární konexi na varietě  $A_m^n$  s bodově centrovanými lokálními prostory existuje právě jedna tečná afinní konexe a právě jedna afinní konexe.* Realisuje-li výše uvedená tečna afinita  $\mathcal{A}_c$  styk 2. řādu pro každou volbu křivky  $c$ , potom příslušnou tečnou afinní konxi nazýváme *oskulační afinní konexí*. Ukazuje se, že tečná afinní konexe je oskulační afinní konexí právě tehdy, když platí (4.22).

V práci je dále zaveden pojem *nelineární tečné konexe* pro takové nelineární konexe na centrované varietě, pro něž paralelním přenosem tečného vektoru ke křivce lokálního prostoru je opět tečný vektor ke křivce přenesené, a to pro libovolnou volbu křivky jdoucí bodem v lokálním prostoru a pro libovolnou volbu křivky  $c$  na  $X_m$ . K tomu, aby nelineární konexe byla tečnou nelineární konexí je nutné, aby platilo (4.7).

Určité vlastnosti linearisujících přímků příslušných k uvedeným korespondencím a tečným afinitām dāvají speciální typy nelineárních konexí, které však nejsou lineárními (afinními) konexemi.

## Резюме

### НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ НА МНОГООБРАЗИИ $A_m^n$

БОГУМИЛ ЦЕНКЛ, Прага

Пусть дано  $m$ -мерное дифференцируемое многообразие  $X_m$ . Каждой точке  $x^a \in X_m$  поставим в соответствие  $n$ -мерное аффинное пространство  $A_n(x)$ . Таким образом мы получаем т. наз. многообразие Кенига  $A_m^n$ . Пусть  $V_n$  —  $n$ -мерное векторное пространство (множество векторов аффинного пространства  $A_n(x)$ ). Определим нелинейную связность  $(\Gamma, G)$  на  $A_m^n$  формами

(1.4), если имеет место (1.5), где  $x^a \in X_m$  и  $u$  есть направление, определенное вектором  $u^a \in V_n$ . Параллельный перенос вектора  $U = u^a J_a$ , соотв. точки  $A = M + u^a J_a$  локального аффинного пространства, вдоль кривой  $c: x^a = x^a(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  дан дифференциальными уравнениями (1.7), соотв. (1.8). Далее вводятся относительные дифференциалы обобщенных тензоров и даются определения тензоров кручения и кривизны.

В дальнейшем рассматривается параллельный перенос точки при условии, что имеет место (4.1). Если на фиксированной кривой  $c$  на  $X_m$  взять два локальные пространства, то указанным параллельным переносом определяется соответствие (отображение на) между двумя аффинными пространствами. Известно, что для каждого выбора точки в одном из этих двух пространств существует точно одно касательное аффинное соответствие  $\mathcal{A}_c$  упомянутого соответствия. Таким образом, при фиксированной кривой  $c$  и выбранной точке в одном локальном пространстве на  $c$  мы получаем однопараметрическую систему аффинных соответствий. Если в каждом локальном пространстве  $A_n(x)$  взять точку  $A(x)$ , то мы назовем *касательной аффинной связностью* такую связность на  $A_m^n$ , при которой перенос точек вдоль кривой  $c$  определяется указанным выше касательным аффинным соответствием, если на  $c$  взять фиксированную точку  $y$  и если  $A(y)$  — начальное значение для системы (4.2<sub>2</sub>). Определенная таким образом касательная аффинная связность не является аффинной связностью в обычном смысле слова. Однако, оказывается, что справедливо следующее утверждение: *Для нелинейной связности на многообразии  $A_m^n$  с точечно центрированными локальными пространствами существует в точности одна касательная аффинная связность и в точности одна аффинная связность.* Если указанное выше касательное аффинное соответствие  $\mathcal{A}_c$  осуществляет касание второго порядка для каждого выбора кривой  $c$ , то соответствующую касательную аффинную связность мы называем *соприкасающейся аффинной связностью*. Оказывается, что касательная аффинная связность является соприкасающейся аффинной связностью тогда и только тогда, если справедливо (4.22).

В работе далее вводится понятие *нелинейной касательной связности* для таких нелинейных связностей на центрированном многообразии, для которых параллельным переносом вектора, касательного к кривой локального пространства, мы получаем снова касательный вектор к перенесенной кривой (совершенно независимо от выбора кривой, проходящей через точку в локально пространстве, и от выбора кривой  $c$  на  $X_m$ ). Для того, чтобы нелинейная связность была касательной нелинейной связностью, необходимо, чтобы имело место (4.7).

Некоторые свойства линеаризирующих прямых, отвечающих указанным соответствиям и касательным аффинным соответствиям, приводят к специальным типам нелинейных связностей, не являющихся, однако, линейными (аффинными) связностями.