Zbyněk Nádeník

Zobecnění Guldinových pravidel

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 3, 311--316

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117464`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

ZOBECNĚNÍ GULDINOVÝCH PRAVIDEL

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Došlo dne 29. prosince 1961)

Pro integrál střední křivosti, povrch a objem tělesa ohraničeného obálkou jednoparametrového systému konvexních válcových ploch jsou odvozeny vzorce analogické Guldinovým formulím.

Úvod. Podržujeme všecka označení, pojmenování a předpoklady z úvodu k práci [1]. Pro integrál střední křivosti M a povrch O obálky S jednoparametrového systému konvexních válcových ploch s opěrnou funkcí $h(\alpha, \gamma)$ a pro objem V tělesa ohraničeného plochou S (která je homeomorfní s torem) byly nalezeny vzorce (viz (*), (1) a (6) v [1])

$$(*)\qquad M = \pi \int_C \mathrm{d}s - \int_0^a \int_0^{2\pi} h \cos \gamma \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}\alpha\,,$$

$$O = \int_C L \,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{2h^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma}\right)^2 - w^2\right\} \cos \gamma \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}\alpha\,,$$

$$V = \int_C F \,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{2\pi} \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right) \left\{h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma}\right)^2 - w^2\right\} \cos \gamma \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Pro každé $\alpha \in \langle 0, a)$ nechť $T_1(\alpha)$ resp. $T_2(\alpha)$ resp. $T_3(\alpha)$ znamená těžiště křivosti normálního řezu $\kappa(\alpha)$ obalové válcové plochy $\Lambda(\alpha)$ normální rovinou $\nu(\alpha)$ základní křivky C v jejím bodě $P(\alpha)$ resp. těžiště křivky $\kappa(\alpha)$ resp. těžiště oblasti $\mathscr{B}(\alpha)$ ohraničené čarou $\kappa(\alpha)$.

Věta 1. *Leží-li bod T_1 resp. T_2 resp. T_3 pro každé $\alpha \in \langle 0, a)$ na binormále v bodě P křivky C, je*

$$M = \pi \int_C \mathrm{d}s \quad \textit{resp.} \quad O = \int_C L \,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{2\pi} w^2 \cos \gamma \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}\alpha$$

resp.

$$V = \int_C F \,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{2\pi} \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right) w^2 \cos \gamma \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Je-li základní křivka C kružnice a normální řez $\kappa(\alpha)$ neproměnná křivka pevně spjatá s průvodním trojhranem křivky C při měnícím se $\alpha \in \langle 0, a)$, pak podle (4) z úvodu v [1] je $w = 0$, takže ve vzorcích z věty 1 vymizí dvojnásobné integrály a vzorce přejdou v GULDINovy formule.

Věta 2. *Nechť charakteristiky všech válcových ploch $\Lambda(\alpha)$ jsou rovinné křivky. Pak přímka procházející bodem $T_i(\alpha)$ rovnoběžně s povrchovými přímkami válcové plochy $\Lambda(\alpha)$ vytvoří při měnícím se $\alpha \in \langle 0, a)$ a každém $i = 1, 2, 3$ rozvinutelnou plochu.*

Splňují-li ještě hrany rozvinutelných ploch z věty 2 — označme je C_1, C_2, C_3 — požadavky kladené za základní křivku C v úvodu v [1], můžeme kteroukoliv z nich vzíti za základní křivku C a uvědomíme-li si ještě, že podle (1,2) z [1] předpoklad z věty 2 znamená $\partial w(\alpha, \gamma)/\partial \gamma = 0$ pro všecka $\alpha \in \langle 0, a)$, plyne snadno z věty 1, že $M = \int_{C_1} \pi \, ds_1$, $O = \int_{C_2} L ds_2$, $V = \int_{C_3} F \, ds_3$; ds_i znamená ovšem diferenciál oblouku křivky C_i $(i = 1, 2, 3)$.

1. Důkaz věty 1. Zvolme v rovině $\nu(\alpha)$ soustavu pravoúhlých souřadnic x, y tak, že osa x je v hlavní normále a osa y v binormále křivky C a orientujme je souhlasně s vektory $\boldsymbol{n}(\alpha)$ a $\boldsymbol{b}(\alpha)$. Pro souřadnice x_i, y_i bodu $T_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, 3)$ platí:

$$(1,1) \qquad x_1 = \frac{1}{2\pi} \int_\kappa x \,.\, \frac{1}{r} \,.\, d\sigma \,, \qquad y_1 = \frac{1}{2\pi} \int_\kappa y \,.\, \frac{1}{r} \,.\, d\sigma \,,$$

$$(1,2) \qquad x_2 = \frac{1}{L} \int_\kappa x \, d\sigma \,, \qquad y_2 = \frac{1}{L} \int_\kappa y \, d\sigma \,,$$

$$(1,3) \qquad x_3 = \frac{1}{F} \int_{\mathscr{B}} X \, d\varrho \,, \qquad y_3 = \frac{1}{F} \int_{\mathscr{B}} Y \, d\varrho \,;$$

zde

$$(1,4) \quad x = h(\alpha, \gamma) \cos \gamma - \frac{\partial h(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \sin \gamma \,, \quad y = h(\alpha, \gamma) \sin \gamma + \frac{\partial h(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \cos \gamma$$

jsou souřadnice bodu křivky $\kappa(\alpha)$, $r = h + \partial^2 h/\partial \gamma^2$ její poloměr křivosti a $d\sigma = r \, d\gamma$ diferenciál jejího oblouku. Dále je $X = tx$, $Y = ty$,

$$d\varrho = \left(\frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial \gamma} - \frac{\partial X}{\partial \gamma} \frac{\partial Y}{\partial t} \right) d\gamma \, dt = th \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2} \right) d\gamma \, dt \,, \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \,;$$

je-li počátek $P(\alpha)$ bodem oblasti $\mathscr{B}$, jsou X, Y souřadnice bodu z oblasti $\mathscr{B}$ a $d\varrho$ plošný element oblasti $\mathscr{B}$.

Při výpočtu souřadnic x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ budeme užívat elementárních parciálních integrací a okolnosti, že funkce $h(\alpha, \gamma)$ je periodická v argumentu γ s periodou 2π. Z (1,1) tak plyne

$$(1,5) \qquad x_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h \cos \gamma - \frac{\partial h}{\partial \gamma} \sin \gamma \right) d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h \cos \gamma \, d\gamma \,,$$

a dále z (1,2) dostaneme

$$x_2 = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial \gamma^2}\right)\left(h \cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial \gamma}\sin\gamma\right) d\gamma =$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^{2\pi}\left\{h\left(h\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma\right) - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\cos\gamma - h\sin\gamma\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\cos\gamma\right\} d\gamma\,,$$

takže

$$x_2 = \frac{1}{2L}\int_0^{2\pi}\left\{2h^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right\}\cos\gamma\, d\gamma\,. \tag{1,6}$$

Podobně z (1,3) plyne

$$x_3 = \frac{1}{3F}\int_0^{2\pi} h\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left(h\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma\right) d\gamma =$$

$$= \frac{1}{3F}\int_0^{2\pi}\left\{h^2\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\cos\gamma + \frac{1}{2}h^2\left[\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma} + \frac{\partial^3 h}{\partial\gamma^3}\right)\sin\gamma + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\cos\gamma\right]\right\} d\gamma\,.$$

Avšak

$$\int_0^{2\pi} h^2\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma\, d\gamma = \int_0^{2\pi}\left[2h\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 + h^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right]\cos\gamma\, d\gamma\,,$$

$$\int_0^{2\pi} h^2\frac{\partial^3 h}{\partial\gamma^3}\sin\gamma\, d\gamma = -\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\left(2h\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + h^2\cos\gamma\right) d\gamma =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{-\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + h\cos\gamma\right) + h^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\cos\gamma\right\} d\gamma =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{3\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2} + h\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 - h^2\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right\}\cos\gamma\, d\gamma\,.$$

Tedy úhrnem

$$x_3 = \frac{1}{2F}\int_0^{2\pi}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left\{h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right\}\cos\gamma\, d\gamma\,. \tag{1,7}$$

Za předpokladu z věty 1 je $x_1 = 0$ resp. $x_2 = 0$ resp. $x_3 = 0$ pro všecka $\alpha \in \langle 0, a)$ a z (1,5)–(1,7) a (*) plynou ihned vzorce uvedené ve větě 1.

2. Důkaz věty 2. Zcela podobně jako v odst. 1 se zjistí, že

$$y_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h\sin\gamma\, d\gamma\,, \tag{2,1}$$

$$y_2 = \frac{1}{2L}\int_0^{2\pi}\left\{2h^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right\}\sin\gamma\, d\gamma\,, \tag{2,2}$$

$$y_3 = \frac{1}{2F}\int_0^{2\pi}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left\{h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right\}\sin\gamma\, d\gamma\,. \tag{2,3}$$

Přímka $p_i(\alpha)$ procházející bodem $T_i(\alpha)$ rovnoběžně s povrchovými přímkami válcové plochy $\Lambda(\alpha)$ má parametrický popis

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\alpha) + \lambda\, \boldsymbol{t}(\alpha) + x_i(\alpha)\, \boldsymbol{n}(\alpha) + y_i(\alpha)\, \boldsymbol{b}(\alpha)\,, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

a při měnícím se $\alpha \in \langle 0, a)$ vytváří rozvinutelnou plochu tehdy a jen tehdy, když

$$kx_i + \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{2,4}$$

($i = 1, 2, 3$; $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ a $k = k(\alpha)$ je definováno v úvodu v [1]).

Při dalších výpočtech budeme zase užívat parciálních integrací spolu s periodicitou funkce $h(\alpha, \gamma)$ a definice funkce $w(\alpha, \gamma)$ z (4) v úvodu v [1], na což nebudeme v jednotlivých případech upozorňovat.

Podle (1,5) a (2,1) je

$$\pi\left(kx_1 + \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\alpha}\right) = \int_0^{2\pi}\left(-k\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + \frac{\partial h}{\partial\alpha}\sin\gamma\right)\mathrm{d}\gamma = -\int_0^{2\pi} w\cos\gamma\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,,$$

takže pro $i = 1$ platí (2,4) tehdy a jen tehdy, když

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\sin^2\gamma\,\mathrm{d}\gamma = 0\,. \tag{2,5}$$

Z (1,6) a (2,2) plyne vzhledem k $L = \int_0^{2\pi} h\,\mathrm{d}\gamma$:

$$\begin{aligned}
L\left(kx_2 + \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\alpha}\right) &= -k\int_0^{2\pi}\left(2h\frac{\partial h}{\partial\gamma} - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma + \\
&+ \int_0^{2\pi}\left(2h\frac{\partial h}{\partial\alpha} - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma\,\partial\alpha}\right)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma - y_2\int_0^{2\pi}\frac{\partial h}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}\gamma = \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-2hw\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial w\cos\gamma}{\partial\gamma}\right)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma + y_2\int_0^{2\pi}\left(w\cos\gamma + k\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)\mathrm{d}\gamma = \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-2hw\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial\gamma}w\sin\gamma\right)\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma + y_2\int_0^{2\pi} w\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma = \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{-2hw\cos\gamma\sin\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma\sin\gamma + \right. \\
&\left. + h\left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\sin^2\gamma + 2w\cos\gamma\sin\gamma\right)\right\}\mathrm{d}\gamma - y_2\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma\,;
\end{aligned}$$

užijeme-li ještě (1,4), snadno nahlédneme, že pro $i = 2$ platí (2,4) tehdy a jen tehdy, když

$$\int_0^{2\pi}(y - y_2)\frac{\partial w}{\partial\gamma}\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma = 0\,. \tag{2,6}$$

Podle (1,6) a (2,3) je vzhledem k $F^{\bullet} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{h^2 - (\partial h/\partial\gamma)^2\}\,d\gamma$:

$$F\left(kx_3 + \frac{dy_3}{d\alpha}\right) = -k\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial\gamma} + \frac{\partial^3 h}{\partial\gamma^3}\right)\left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left(h\frac{\partial h}{\partial\gamma} + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\right\}\sin\gamma\,d\gamma + \int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial\alpha} + \frac{\partial^3 h}{\partial\gamma^2\,\partial\alpha}\right)\left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left(h\frac{\partial h}{\partial\alpha} + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma\,\partial\alpha}\right)\right\}\sin\gamma\,d\gamma - y_3\int_0^{2\pi}\left(h\frac{\partial h}{\partial\alpha} - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma\,\partial\alpha}\right)d\gamma =$$
$$= -\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right]\left(w\cos\gamma + \frac{\partial^2 w\cos\gamma}{\partial\gamma^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left(hw\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial w\cos\gamma}{\partial\gamma}\right)\right\}\sin\gamma\,d\gamma - y_3\int_0^{2\pi}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\frac{\partial h}{\partial\alpha}\,d\gamma\,.$$

Oba poslední integrály vyjádříme ještě jinak. Pro druhý dostaneme, užijeme-li v závěru (1,4):

$$\int_0^{2\pi}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\frac{\partial h}{\partial\alpha}\,d\gamma = \int_0^{2\pi}\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left(-w\cos\gamma + k\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)d\gamma =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{-hw\cos\gamma - \frac{\partial h}{\partial\gamma}\left(-\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma + w\sin\gamma\right)\right\}d\gamma =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{-hw\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma + h\left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\sin\gamma + w\cos\gamma\right)\right\}d\gamma = \int_0^{2\pi} y\frac{\partial w}{\partial\gamma}\,d\gamma\,.$$

První ze zmíněných integrálů upravíme takto:

$$\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right]\left(w\cos\gamma + \frac{\partial^2 w\cos\gamma}{\partial\gamma^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left(hw\cos\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\frac{\partial w\cos\gamma}{\partial\gamma}\right)\right\}\sin\gamma\,d\gamma =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right]w\cos\gamma\sin\gamma - \right.$$
$$- \left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma - w\sin\gamma\right)\left[\left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\frac{\partial h}{\partial\gamma}\sin\gamma + \frac{1}{2}\left(h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right)\cos\gamma\right] +$$
$$\left. + \left(h + \frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right)\left[hw\cos\gamma\sin\gamma + \frac{\partial h}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos\gamma - w\sin\gamma\right)\sin\gamma\right]\right\}d\gamma =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{\left[2h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2 + h\frac{\partial^2 h}{\partial\gamma^2}\right]w\cos\gamma\sin\gamma - \frac{1}{2}\left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right]\frac{\partial w}{\partial\gamma}\cos^2\gamma\right\}d\gamma =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{\left[2h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\gamma}\right)^2\right]w\cos\gamma\sin\gamma - \right.$$

$$- \frac{\partial h}{\partial \gamma} \left[\frac{\partial h}{\partial \gamma} w \cos \gamma \sin \gamma + h \frac{\partial w}{\partial \gamma} \cos \gamma \sin \gamma + hw \left(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \gamma} \cos^2 \gamma \Big\} d\gamma = \int_0^{2\pi} \Big\{ 2h^2 w \cos \gamma \sin \gamma - h \frac{\partial h}{\partial \gamma} \frac{\partial w}{\partial \gamma} \cos \gamma \sin \gamma +$$

$$+ \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial w}{\partial \gamma} \left(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \right) - 4w \cos \gamma \sin \gamma \right] - \frac{1}{2} \left[h^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \gamma} \cos^2 \gamma \Big\} d\gamma =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(h \sin \gamma + \frac{\partial h}{\partial \gamma} \cos \gamma \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \gamma} d\gamma = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 \frac{\partial w}{\partial \gamma} d\gamma ;$$

v závěru jsme zase užili (1,4). Spojením všech výsledků dostaneme, že při $i = 3$ platí (2,4) tehdy a jen tehdy, když

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} y^2 - y y_3 \right) \frac{\partial w}{\partial \gamma} d\gamma = 0 . \tag{2,7}$$

Předpoklad z věty 2 znamená $\partial w / \partial \gamma = 0$ (viz závěr úvodu), takže z relací (2,5) až (2,7), které jsou ekvivalentní s (2,4), plyne ihned správnost věty 2.

Literatura

[1] *Z. Nádeník*: Über das Volumen des Körpers, dessen Randfläche die Enveloppe einer einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen ist. Čas. pro pěst. mat. *88* (1963), 200—208.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ГУЛЬДИНА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Для замкнутых огибающих однопараметрической системы выпуклых цилиндрических поверхностей, изучаемых в работе [1], доказаны некоторые формулы, которые содержат в качестве очень специального случая хорошо известные теоремы Гульдина.

Zusammenfassung

DIE VERALLGEMEINERUNG DER GULDINSCHEN REGELN

Zbyněk Nádeník, Praha

Man beweist für die in der Arbeit [1] untersuchte geschlossene Enveloppe einer einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen einige Formeln, welche die wohlbekannten Guldinschen Regeln als einen sehr speziellen Fall enthalten.