Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

O ROZKLADU PŘIROZENÝCH ČÍSEL NA TŘI PŘIROZENÉ SČÍTANCE

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň

(Došlo dne 26. ledna 1961)

Článek odpovídá elementárním způsobem na otázku, kolik je celkem možností napsat dané přirozené číslo jako součet tří celých kladných sčítanců.

1. Úvod. Napřed zavedeme několik pomocných pojmů a označení:

Definice 1.1. Jsou-li $m < n$ dvě přirozená čísla, označíme symbolem $V(n, m)$ počet řešení $v_1, v_2, \ldots, v_m$ rovnice

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_m = n \tag{1,1}$$

přirozenými čísly $v_1 < v_2 < \ldots < v_m$ a znakem $V(n, m, k)$ počet těch řešení, při nichž je $v_1 = k$.

Definice 1.2. Symbol $E(\alpha)$ bude znamenat celistvou část daného reálného čísla α, znak $N(\alpha)$ pak celé číslo určené vztahy

$$N(\alpha) = E(\alpha), \quad \text{když} \quad 2\alpha \leqq E(\alpha) + E(\alpha + 1),$$
$$N(\alpha) = E(\alpha + 1), \quad \text{když} \quad 2\alpha > E(\alpha) + E(\alpha + 1).$$

$N(\alpha)$ je zřejmě celé číslo nejbližší k α.

Podle definice čísel $V(n, m)$ a $V(n, m, k)$ platí očividně

$$V(n, 1) = 1, \quad n \geqq 1, \tag{1,2}$$

$$V(n, 1, k) = 0 \text{ pro } k \neq n, \quad V(n, 1, n) = 1. \tag{1,3}$$

Nyní dokážeme pro libovolné přirozené n vztah

$$V(n, 2) = N\left(\frac{n-1}{2}\right), \tag{1,4}$$

kterého použijeme při dalších úvahách.

Mezi všemi $n - 1$ rozklady $v_1 + (n - v_1) = n$, $v_1 = 1, 2, \ldots, n - 1$ čísla n ve dva přirozené sčítance v_1 a $n - v_1$ přicházejí při stanovení čísla $V(n, 2)$ podle definice 1.1 v úvahu jen ty, kde platí $v_1 < n - v_1$, tj. $2v_1 < n$. Při sudých $n = 2s$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$)

přijdou tedy v úvahu jen ty rozklady, kde je $1 \leqq v_1 \leqq s - 1$, při lichých $n = 2s + 1$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$) jenom ty rozklady, pro které $1 \leqq v_1 \leqq s$. Celkem tedy máme

$$(1,5) \qquad V(2s, 2) = s - 1\,, \quad V(2s + 1, 2) = s\,, \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

což však je podle výše uvedené definice čísla $N(\alpha)$ právě skutečnost vyjádřená vzorcem (1,4).

Ke konci ještě poznamenejme, že o číslech $V(n, 2, k)$ platí

(1,6)

$$V(n, 2, k) = 1 \quad \text{pro} \quad 1 \leqq k \leqq N\left(\frac{n-1}{2}\right), \quad V(n, 2, k) = 0 \quad \text{pro} \quad k > N\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

2. Případ $m = 3$. Nyní přistoupíme k vlastnímu předmětu článku, jímž je určení celkového počtu $V(n, 3)$ řešení diofantické rovnice

$$(2,1) \qquad v_1 + v_2 + v_3 = n$$

přirozenými čísly $v_1 < v_2 < v_3$.

Především máme

$$(2,2) \qquad V(n, 3) = 0\,, \quad 1 \leqq n \leqq 5\,,$$

a proto stačí uvažovat jen o číslech n tvaru

$$(2,3) \qquad n = 3q,\ 3q + 1,\ 3q + 2\,, \quad q = 2, 3, 4, \ldots$$

Konečné vzorce pro výpočet hledaného čísla $V(n, 3)$ budou důsledkem několika pomocných poznatků. Především je to skutečnost, že je největší hodnota $v(n, 3)$ prvního sčítance v_1 z rozkladu (2,1) určena předpisem

$$(2,4) \qquad v(3q, 3) = v(3q + 1, 3) = v(3q + 2, 3) = q - 1\,, \quad q = 2, 3, 4, \ldots$$

Správnost tohoto tvrzení plyne z existence rozkladů

$$3q = (q - 1) + q + (q + 1)\,, \quad 3q + 1 = (q - 1) + q + (q + 2)\,,$$
$$3q + 2 = (q - 1) + q + (q + 3)$$

a z okolnosti, že už je $q + (q + 1) + (q + 2) = 3q + 3 > 3q + 2$.

Druhá přípravná skutečnost je vyjádřena vzorcem

$$(2,5) \qquad N\left(\frac{n - v_1 - 1}{2}\right) > v_1\,,$$

který platí pro všechny hodnoty v_1 z rozkladu (2, 1).

Podle definice 1.2 totiž je zcela obecně $N(\alpha) \geqq E(\alpha) > \alpha - 1$ a podle předešlého pomocného poznatku máme $v_1 \leqq v(n, 3) \leqq \frac{1}{3}(n - 3)$. Dostáváme tudíž

$$N\left(\frac{n - v_1 - 1}{2}\right) - v_1 > \frac{1}{2}(n - 3v_1 - 3) \geqq 0$$

a odtud je vidět správnost vzorce (2,5).

Posledním přípravným poznatkem je okolnost, že platí pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots, \nu(n, 3)$ formule

$$V(n, 3, k) = N\left(\frac{n - k - 1}{2}\right) - k. \tag{2,6}$$

K důkazu si uvědomme, že jde o počet rozkladů tvaru $k + \nu_2 + \nu_3 = n$, tj. $\nu_2 + \nu_3 = n - k$, $\nu_2 \geqq k + 1$. Podle vzorce (1,1), definice 1.1, formule (2,5) a podle (1,6) činí zmíněný počet $V(n, 3, k)$ vskutku

$$V(n, 3, k) = V(n - k, 2) - \sum_{\kappa=1}^{k} V(n - k, 2, \kappa) = N\left(\frac{n - k - 1}{2}\right) - \sum_{\kappa=1}^{k} 1 = N\left(\frac{n - k - 1}{2}\right) - k.$$

Nyní už je docela snadné vypočítat hledaný počet $V(n, 3)$. Je totiž zřejmě

$$V(n, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{\nu(n,3)} V(n, 3, \nu_1)$$

a tudíž podle (2,6)

$$V(n, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{\nu(n,3)} \left[N\left(\frac{n - \nu_1 - 1}{2}\right) - \nu_1\right] = -\binom{1 + \nu(n, 3)}{2} + \sum_{\nu_1=1}^{\nu(n,3)} N\left(\frac{n - \nu_1 - 1}{2}\right).$$

Tím jsme dospěli k výsledku obecné platnosti. Je vyjádřen větou:

Věta 2.1. *Rovnice* (2,1) *má pro každé přirozené n dohromady*

$$V(n, 3) = -\binom{1 + \nu(n, 3)}{2} + \sum_{\nu_1=1}^{\nu(n,3)} N\left(\frac{n - \nu_1 - 1}{2}\right) \tag{2,7}$$

řešení přirozenými čísly $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$. Čísla $\nu(n, 3)$ a $N(\alpha)$ se přitom určí podle předpisu (2,4) a podle definice 1.2.

Abychom získali vzorce k přímému použití, probereme podle obecného výsledku (2,7) výše zmíněné případy (2,3). Je tu $n = 3q + r$, $q = 2, 3, 4, \ldots$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ a proto máme předně

$$\nu(n, 3) = q - 1, \quad \binom{1 + \nu(n, 3)}{2} = \frac{1}{2} q(q - 1). \tag{α}$$

Pro součet $S(n, 3)$ ze vzorce (2,7) však vyjdou různé výrazy podle povahy čísla n. Podle (1,4) a (1,5) totiž je

$$N\left(\frac{2s - 1}{2}\right) = s - 1, \quad N(s) = s, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{2,8}$$

a proto vychází pro $q = 2s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$S(6s, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{2s-1} N\left(\frac{6s - \nu_1 - 1}{2}\right) = \sum_{\kappa=0}^{s-1} N\left(\frac{6s - 2\kappa - 2}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{s-1} N\left(\frac{6s - 2\kappa - 1}{2}\right) = 3s - 1 + 2\sum_{\kappa=1}^{s-1}(3s - \kappa - 1) = 5s^2 - 4s + 1\,,$$

$$S(6s + 1, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{2s-1} N\left(\frac{6s - \nu_1}{2}\right) = \sum_{\kappa=0}^{s-1}(3s - \kappa - 1) + \sum_{\kappa=1}^{s-1}(3s - \kappa) = 5s^2 - 3s\,,$$

$$S(6s + 2, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{2s-1} N\left(\frac{6s - \nu_1 + 1}{2}\right) = \sum_{\kappa=0}^{s-1}(3s - \kappa) + \sum_{\kappa=1}^{s-1}(3s - \kappa) = 5s^2 - 2s$$

a pro $q = 2s + 1$, $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$S(6s + 3, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{2s} N\left(\frac{6s - \nu_1 + 2}{2}\right) = \sum_{\kappa=0}^{s-1}(3s - \kappa) + \sum_{\kappa=1}^{s}(3s - \kappa + 1) = 5s^2 + s\,,$$

$$S(6s + 4, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{2s} N\left(\frac{6s - \nu_1 + 3}{2}\right) = \sum_{\kappa=0}^{s-1}(3s - \kappa + 1) + \sum_{\kappa=1}^{s}(3s - \kappa + 1) =$$

$$= 5s^2 + 2s\,,$$

$$S(6s + 5, 3) = \sum_{\nu_1=1}^{2s} N\left(\frac{6s - \nu_1 + 4}{2}\right) = \sum_{\kappa=0}^{s-1}(3s - \kappa + 1) + \sum_{\kappa=1}^{s}(3s - \kappa + 2) =$$

$$= 5s^2 + 3s\,.$$

Dosadíme-li tyto výsledky a hodnotu (α) do naší obecné formule (2,7), dospíváme k větě:

Věta 2.2. *Pro každé $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí*

(2,9) $$V(6s, 3) = 3s^2 - 3s + 1\,, \quad V(6s + 3, 3) = 3s^2\,,$$
$$V(6s + 1, 3) = s(3s - 2)\,, \quad V(6s + 4, 3) = s(3s + 1)\,,$$
$$V(6s + 2, 3) = s(3s - 1)\,, \quad V(6s + 5, 3) = s(3s + 2)\,.$$

Že jsou vzorce (2,9) správné i pro případ $s = 0$, který stál při jejich odvození mimo naše úvahy, je vidět z okolnosti (2,2).

Výsledné vzorce (2,9) je ovšem možno vyjádřit také jedinou formulí, jak ukazuje tato věta:

Věta 2.3. *Jde-li o přirozené číslo n s vlastností*

(2,10.1) $$n \equiv r \pmod 6\,, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,,$$

platí

(2,10.2) $$V(n, 3) = \frac{1}{12}(n - r)(n + r - 6) - \binom{r - 1}{5}.$$

Příklad 2.1. Podle věty 2.2 dostaneme snadno

$$V(n, 3) = 0\,,\ 1 \leqq n \leqq 5\,, \quad V(6, 3) = V(7, 3) = 1\,, \quad V(8, 3) = 2\,,$$
$$V(9, 3) = 3\,, \quad V(10, 3) = 4\,, \quad V(11, 3) = 5\,, \quad V(12, 3) = 7\,,$$
$$V(13, 3) = 8\,, \quad V(14, 3) = 10\,, \quad V(15, 3) = 12\,, \quad V(16, 3) = 14\,,$$
$$V(17, 3) = 16\,, \quad V(18, 3) = 19\,, \quad V(19, 3) = 21\,, \quad V(20, 3) = 24\,.$$

Čtenář si může napsat všech $V(20, 3) = 24$ rozkladů čísla 20 na tři přirozené sčítance a ověřit si na nich správnost výše uvedeného vzorce (2,6).

Ke konci se ještě zmíníme o jednom tvaru našeho řešení. Vyjdeme z věty 2.3. Podle (2,10.1) je

$$\frac{1}{12}(n^2 - r^2) = N\left(\frac{n^2}{12}\right) - N\left(\frac{r^2}{12}\right), \quad \frac{1}{2}(n - r) = E\left(\frac{n-1}{2}\right) - E\left(\frac{r-1}{2}\right)$$

a vzorec (2,10.2) tím nabude tvaru

$$V(n, 3) = N\left(\frac{n^2}{12}\right) - E\left(\frac{n-1}{2}\right) + E\left(\frac{r-1}{2}\right) - N\left(\frac{r^2}{12}\right) - \binom{r-1}{5}.$$

Protože však platí pro $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$E\left(\frac{r-1}{2}\right) - N\left(\frac{r^2}{12}\right) - \binom{r-1}{5} = 0,$$

dospíváme k jednoduché větě:

Věta 2.4. *Pro každé přirozené číslo n je*

$$V(n, 3) = N\left(\frac{n^2}{12}\right) - E\left(\frac{n-1}{2}\right). \tag{2,11}$$

Příklad 2.2. Podle vzorce (2,11) máme

$$V(100, 3) = N\left(\frac{2500}{3}\right) - E\left(\frac{99}{2}\right) = 833 - 49 = 784,$$

takže je možno rozložit číslo 100 celkem 784 způsoby na součet tří přirozených sčítanců.

3. Závěrečné poznámky. Píšeme-li formuli (2,11) ve tvaru

$$V(n, 3) + E\left(\frac{n-1}{2}\right) = N\left(\frac{n^2}{12}\right)$$

a uvážíme-li, že je $E((n-1)/2)$ počet řešení rovnice $2\nu + \varrho = n$ přirozenými čísly ν, ϱ, dojdeme k Hardyovu poznatku, že má problém

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n, \quad \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \tag{3,1}$$

celkem $N(n^2/12)$ řešení přirozenými čísly ν_1, ν_2, ν_3.

Bylo by ovšem také možno považovat tento Hardyův výsledek za známý a s jeho pomocí pak přímo napsat vzorec (2,11). Zmíněný Hardyův poznatek však není všeobecně známý a jeho odvození není o nic jednodušší než naše přímá cesta k větě 2.4. Způsob, jehož jsme výše užili, se zdá výhodnější, ježto nepředpokládá žádných předběžných znalostí a řeší nejen původní úlohu, nýbrž vede zároveň zcela snadno i k uvedené Hardyově skutečnosti. Hlavní předností naší přímé cesty je však její použitelnost i ve složitějších případech (např. při rozkladu daného přirozeného čísla na čtyři přirozené sčítance), jak ještě ukážeme později.

V dalším článku uvedeme výše použité úvahy v souvislost s některými skutečnostmi, o nichž byla řeč v dřívější autorově práci [1].

Literatura

[1] *V. Vodička*: Über eine Formel der Elementarmathematik. Zbornik radova Mat. inst. SAN 7, 1959, 93–98.

Резюме

О РАЗЛОЖЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЦЕЛОГО ЧИСЛА НА СУММУ ТРЕХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ВАЦЛАВ ВОДИЧКА (Václav Vodička), Плзень

Предлагается элементарный метод для нахождения числа решений проблемы $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n$, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$ ($n \geqq 1$ – произвольное целое число) в положительных целых числах ν_1, ν_2, ν_3. Результат представлен сначала в общем виде (2, 7), откуда получаются последовательно формулы (2, 9), (2, 10.2), пригодные для численных расчетов.

Решение особо элегантного вида дается формулой (2,11). Из нее очень легко получить общее число решений проблемы

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n, \ \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$$

в положительных целых числах ν_1, ν_2, ν_3.

Résumé

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE NATUREL EN SOMME DE TROIS NOMBRES NATURELS

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň

On donne une méthode élémentaire pour trouver le nombre de solutions du problème

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n\,, \quad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \quad (n \geqq 1 \text{ est un nombre entier quelconque})$$

en nombres entiers positifs ν_1, ν_2, ν_3. Le résultat se présente tout d'abord sous la forme générale (2,7), d'où l'on parvient successivement aux formules (2,9), (2,10.2) qui conviennent pour les calcules numériques.

Une solution particulièrement élégante est donnée par la formule (2,11). D'ici, il est très facile de trouver le nombre total de solutions du problème

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n\,, \quad \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$$

en nombres entiers positifs ν_1, ν_2, ν_3.