Časopis pro pěstování matematiky

Ludvík Janoš

Metoda výpočtu relativního extrému jistého funkcionálu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 375--377

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117434

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

REFERÁTY

METODA VÝPOČTU RELATIVNÍHO EXTRÉMU JISTÉHO FUNKCIONÁLU

(Obsah přednášky LUDVÍKA JANOŠE *konané 19. února 1962 na matematicko-fysikální fakultě KU)*

Byla vyšetřována první vlastní hodnota $\alpha(M)$ integrální rovnice struny

$$\int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = \alpha(M)\, y(x),$$

kde jádro je definováno vztahy

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq 1 \\ t(1-x) & \text{pro} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq 1 \end{cases},$$

a $M(t)$ je libovolná neklesající funkce na $\langle 0, 1\rangle$. M představuje nezápornou míru na $\langle 0, 1\rangle$. Množinu všech nezáporných měr označme $\mathfrak{S}$. $\alpha(M)$ je pak spojitým funkcionálem na $\mathfrak{S}$, zavedeme-li na $\mathfrak{S}$ topologii slabou konvergencí.

Hlavním úkolem je výpočet extrému funkcionálu $\alpha(M)$ při konečném počtu lineárních podmínek

$$\int_0^1 U_i\, \mathrm{d}M = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad U_i(x) \in C(0, 1).$$

Je-li $z \in (0, \frac{1}{2})$, je $\mathfrak{S}_z \subset \mathfrak{S}$ definována jako množina těch nezáporných měr na $\langle 0, 1\rangle$, pro něž intervaly $\langle 0, z\rangle$ a $\langle 1 - z, 1\rangle$ mají míru rovnou nule. Pro funkcionál $\alpha(M)$ jsou dokázány tyto vlastnosti:

1. $\alpha(M)$ je kladný na všech $\mathfrak{S}_z$:

$$M \in \mathfrak{S}_z, \quad M \neq 0 \Rightarrow \alpha(M) > 0;$$

2. $\alpha(M)$ je striktně subaditivní na $\mathfrak{S}$:

$$M_1, M_2 \in \mathfrak{S}_z \Rightarrow \alpha(M_1 + M_2) < \alpha(M_1) + \alpha(M_2),$$

kde $M_1, M_2 \neq 0$, $M_2 \neq aM_1$;

3. $\alpha(M)$ je isotonní na $\mathfrak{S}$:

$$M_1, M_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow \alpha(M_1) \leqq \alpha(M_1 + M_2).$$

Zavedeme množinu $\mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ vztahem

$$M \in \mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n] \subset \mathfrak{S} \Leftrightarrow \int_0^1 U_i \, dM = a_i \, ; \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

a předpokládejme, že $\mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n] \neq 0$.

Množina $\mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ je konvexní, z čehož plyne vzhledem k subaditivitě $\alpha(M)$, že supréma $\alpha(M)$ pro $M \in \mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ je dosaženo alespoň v jednom vrcholu množiny $\mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Zbývá tedy nalézt hodnotu $\inf \alpha(M)$, $M \in \mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Budiž $V(x)$ libovolná spojitá funkce na $\langle 0, 1 \rangle$ taková, že existuje $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pro něž $V(x) > 0$. Označme

$$M \in \mathfrak{S}^+ \Leftrightarrow \int_0^1 V \, dM > 0 \,, \quad V^+(x) = \max\,[V(x), 0] \,, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle \,.$$

Je-li na $\mathfrak{S}^+$ dosaženo infima výrazu $\alpha(M)/\int V \, dM$, plyne z isotonie

$$\inf_{M \in \mathfrak{S}^+} \frac{\alpha(M)}{\int V \, dM} = \inf \frac{\alpha(M)}{\int V^+ \, dM} \quad \text{pro} \quad \int V^+ \, dM > 0 \,.$$

Budiž $M \in \mathfrak{S}$. Označme $J_M \subset \langle 0, 1 \rangle$ množinu těch $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pro něž funkce $M(t)$ je nekonstantní na všech okolích bodu x. Označme nyní $\mathfrak{S}^* = \bigcup_{z \in (0, \frac{1}{2})} \mathfrak{S}_z$. Zřejmě platí $M \neq 0$, $M \in \mathfrak{S}^* \Leftrightarrow J_M \cap (0, 1) \neq 0$. Ze striktní subaditivity plyne, že výraz $\alpha(M)/\int V \, dM$ dosahuje na $\mathfrak{S}^+ \cap \mathfrak{S}^*$ svého infima nejvýše v jednom bodě (ovšem až na konstantní faktor).

Budiž nyní $V(0) = V(1) = 0$ a nechť infimum výrazu $\alpha(M)/\int V \, dM$ je dosaženo na $\mathfrak{S}^+ \cap \mathfrak{S}^*$. Pak toto číslo je kladné a je rovno

$$1 \Big/ \left(\int_0^1 y'^2 \, dx \right),$$

kde $y(x)$ je konvexní obal funkce $(V^+(x))^{\frac{1}{2}}$.

Budiž nyní $T \subset E_n$ množina takových bodů $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ n-dimensionálního Euklidova prostoru, že funkcionál $\alpha(M)$ dosahuje svého infima na množině $H_{[t_1, t_2, \ldots, t_n]} \cap \mathfrak{S}^*$, při čemž je

$$M \in \dot{H}_{[t_1, t_2, \ldots, t_n]} \Leftrightarrow \int_0^1 [U_0 + \sum_1^n t_n U_i] \, dM = a_0 + \sum_1^n t_i a_i \,.$$

Ze striktní subaditivity pak plyne, že bod, kde infima je dosaženo, je jediný $M_{[t_1, t_2, \ldots, t_n]} \in H_{[t_1, t_2, \ldots, t_n]}$.

Označme

$$\int_0^1 U_i \, dM_{[t_1, t_2, \ldots, t_n]} = \varphi_i[t_1, t_2, \ldots, t_n] \,, \quad i = 0, 1, \ldots, n \,.$$

Bylo dokázáno: Je-li možno nalézt takový bod $[t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0] \in T$, že platí $\varphi_i[t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0] = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, potom

$$\inf \alpha(M) = \alpha(M_{t_1^0, t_2^0, \ldots t_n^0}), \quad M \in \mathfrak{K}[a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Tím se však výpočet v podstatě redukuje na určení konvexního obalu funkce $([U_0(x) + \sum_1^n t_i^0 U_i(x)]^+)^{\frac{1}{2}}$.

Uvedenou metodou byly nalezeny oba extrémy funkcionálu $\alpha(M)$ při dvou podmínkách:

$$\int_0^1 x(1-x)\, \mathrm{d}M(x) = 1, \quad \int_0^1 \mathrm{d}M = a,$$

kde a je parametr probíhající interval $\langle 4, \infty)$. Výsledkem je nerovnost $\beta(a) \leqq \alpha(M) \leqq 1$. Pro funkci $\beta(a)$, která je hledaným infimem, byly nalezeny hodnoty dané touto tabulkou:

a	4,000	4,038	4,231	5,099	5,758	7,083	10,070
$\beta(a)$	1,000	0,896	0,776	0,616	0,563	0,501	0,434

Ludvík Janoš, Praha