O JISTÉ ÚLOZE Z VARIAČNÍHO POČTU

BOHUSLAV MÍŠEK, Stochov-Honice

(Došlo dne 27. června 1961)

V článku se řeší úloha o minimu jistého kvadratického funkcionálu na třídě funkcí, jejichž derivace má konečný počet bodů nespojitosti prvého druhu, resp. je spojitá skoro všude v uvažovaném intervalu, s jistými vedlejšími podmínkami.

Řešená úloha je zobecněním úlohy č. 1, kterou předložil ANTON KOTZIG v tomto časopise roč. *86* (1961) na str. 111. Nejprve dokážeme dvě pomocné věty:

Nechť $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ jsou reálná čísla. Položme

$$\alpha_r^{(1)} = -2x_r\,, \quad \beta_r^{(1)} = -1\,, \quad \gamma_r^{(1)} = 0\,, \quad \alpha_r^{(2)} = x_r^2\,, \quad \beta_r^{(2)} = x_r\,, \quad \gamma_r^{(2)} = 1$$
$$(r = 0, 1, \ldots, n)\,.$$

Pro $i, j = 1, 2$ definujme determinant

$$D_3^{(ij)}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} \alpha_0^{(i)} & , & \beta_0^{(i)} & , & \gamma_0^{(i)} \\ \frac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3) & , & \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) & , & x_1 - x_0 \\ \alpha_1^{(j)} & , & \beta_1^{(j)} & , & \gamma_1^{(j)} \end{vmatrix}.$$

Je-li již definován determinant $D_{3(n-1)}^{(ij)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, definujme pro $i, j = 1, 2$ determinant $D_{3n}^{(ij)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ takto:

$$\begin{vmatrix} & & & & & & 0 & , & 0 & , & 0 \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & D_{3(n-1)}^{(i2)}(x_0, \ldots, x_{n-1}) & & & & 0 & , & 0 & , & 0 \\ & & & & & & 0 & , & 0 & , & 0 \\ & & & & & & 0 & , & 0 & , & 0 \\ & & & & & & -\alpha_{n-1}^{(2)} & , & -\beta_{n-1}^{(2)} & , & -\gamma_{n-1}^{(2)} \\ 0, \ldots, 0, & -\alpha_{n-1}^{(1)}, & -\beta_{n-1}^{(1)}, & -\gamma_{n-1}^{(1)}, & & & \alpha_{n-1}^{(1)} & , & \beta_{n-1}^{(1)} & , & \gamma_{n-1}^{(1)} \\ 0, \ldots, 0, & 0 & , 0 & , 0 & , & & \frac{1}{3}(x_n^3 - x_{n-1}^3) & , & \frac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2) & , & x_n - x_{n-1} \\ 0, \ldots, 0, & 0 & , 0 & , 0 & , & & \alpha_n^{(j)} & , & \beta_n^{(j)} & , & \gamma_n^{(j)} \end{vmatrix}$$

1. pomocná věta. *Nechť $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ jsou reálná čísla. Pak platí: Je-li $j + n$ sudé, je $D_{3n}^{(ij)}(x_0, \ldots, x_n) > 0$, je-li $j + n$ liché, je $D_{3n}^{(ij)}(x_0, \ldots, x_n) < 0$ $(i, j = 1, 2;$ $n = 1, 2, \ldots)$.*

Důkaz. Věta platí pro $n = 1$; $i, j = 1, 2$, neboť

$$D_3^{(11)}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} -2x_0 \,, & -1 \,, & 0 \\ \frac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3) \,, & \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) \,, & x_1 - x_0 \\ -2x_1 \,, & -1 \,, & 0 \end{vmatrix} = 2(x_1 - x_0)^2 > 0 \,,$$

$$D_3^{(22)}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} x_0^2 \,, & x_0 \,, & 1 \\ \frac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3) \,, & \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) \,, & x_1 - x_0 \\ x_1^2 \,, & x_1 \,, & 1 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{6}(x_1 - x_0)^4 < 0 \,,$$

$$D_3^{(12)}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} -2x_0 \,, & -1 \,, & 0 \\ \frac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3) \,, & \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) \,, & x_1 - x_0 \\ x_1^2 \,, & x_1 \,, & 1 \end{vmatrix} = -\tfrac{2}{3}(x_1 - x_0)^3 < 0 \,,$$

$$D_3^{(21)}(x_0, x_1) = D_3^{(12)}(x_1, x_0) = \tfrac{2}{3}(x_1 - x_0)^3 > 0 \,.$$

Předpokládejme, že věta platí pro $n - 1$; $i, j = 1, 2$. Determinant $D_{3n}^{(ij)}(x_0, \ldots, x_n)$ rozvedeme použitím Laplaceovy věty podle posledních tří sloupců. Zřejmě platí (píšeme-li pro stručnost $D_3^{(ij)}$, $D_{3(n-1)}^{(ij)}$, $D_{3n}^{(ij)}$ místo $D_3^{(ij)}(x_{n-1}, x_n)$, $D_{3(n-1)}^{(ij)}(x_0, \ldots, x_{n-1})$, $D_{3n}^{(ij)}(x_0, \ldots, x_n)$):

(1) $$D_{3n}^{(i1)} = D_3^{(11)} \,.\, D_{3(n-1)}^{(i2)} - D_3^{(21)} \,.\, D_{3(n-1)}^{(i1)} \,,$$
$$D_{3n}^{(i2)} = D_3^{(12)} \,.\, D_{3(n-1)}^{(i2)} - D_3^{(22)} \,.\, D_{3(n-1)}^{(i1)} \,.$$

Je-li n sudé, je $n - 1$ liché, tedy je podle předpokladu $D_{3(n-1)}^{(i1)} > 0$, $D_{3(n-1)}^{(i2)} < 0$, a věta platí. Je-li n liché, věta platí opět, neboť nyní všechna $D_{3(n-1)}^{(ij)}$ v (1) vpravo změní znamení, tedy je změní i $D_{3n}^{(ij)}$.

2. pomocná věta. *Budiž k přirozené číslo, x_{k-1}, x_k, y_{k-1}, y_k, c_k reálná čísla. Nechť $x_{k-1} < x_k$. Budiž C množina všech funkcí tvaru $y = f(x)$, definovaných a spojitých v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, jež mají spojitou první derivaci v tomto intervalu a pro něž platí $y_{k-1} = f(x_{k-1})$, $y_k = f(x_k)$. Budiž dále $\Phi \subset C$ tak, že pro $f \in \Phi$ platí*

(2) $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = c_k \,.$$

Definujme na množině C funkcionál $M_k(f) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x$. Pak existuje funkce $g \in \Phi$ tak, že pro libovolnou funkci $f \in \Phi$, $f \neq g$, platí

(3) $$M_k(g) < M_k(f) \,.$$

Přitom $g(x) = lx^2 + ax + b$, kde konstanty l, a, b jsou určeny jednoznačně soustavou tří lineárních rovnic

(4) $$\tfrac{1}{3}(x_k^3 - x_{k-1}^3)\, l + \tfrac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2)\, a + (x_k - x_{k-1})\, b = c_k \,,$$
$$l x_{k-1}^2 + a x_{k-1} + b = y_{k-1} \,, \quad l x_k^2 + a x_k + b = y_k \,.$$

Důkaz. Existuje-li funkce $y = g(x) \in \Phi$ realizující minimum funkcionálu M_k na množině Φ, pak realizuje $g(x)$ minimum téhož funkcionálu na množině C za podmínky (2). Tedy, ježto $y = g(x)$ není extremálou integrálu (2) pro $f \in C$, existuje podle

Eulerovy věty konstanta $4l$ tak, že $y = g(x)$ realizuje minimum funkcionálu

$$J_k(y) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x, y, y')\, dx\,,$$

kde $F(x, y, y') = y'^2 + 4ly$, na množině C za podmínky (2). (Viz např. [2], str. 116.)

Ukážeme nejprve, že funkce $g(x)$, definovaná ve větě, splňuje všechny postačující podmínky silného (relativního) minima funkcionálu J_k:

1. $g(x)$ je integrálem Eulerovy diferenciální rovnice $F_y - d/dx\, F_{y'} = 0$,
2. podél $g(x)$ je splněna podmínka Legendreova $F_{y'y'} = 2 > 0$,
3. podél $g(x)$ je splněna podmínka Jacobiova, tj. $g(x)$ neobsahuje body konjugované se svým počátečním bodem (x_{k-1}, y_{k-1}), čili žádný kořen rovnice

$$0 = \begin{vmatrix} g_l(x_{k-1}) & g_a(x_{k-1}) & g_b(x_{k-1}) \\ g_l(x) & g_a(x) & g_b(x) \\ \int_{x_{k-1}}^x g_l\, dx & \int_{x_{k-1}}^x g_a\, dx & \int_{x_{k-1}}^x g_b\, dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{k-1}^2 & x_{k-1} & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ \frac{1}{3}(x^3 - x_{k-1}^3) & \frac{1}{2}(x^2 - x_{k-1}^2) & x - x_{k-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(x - x_{k-1})^4$$

neleží v intervalu $(x_{k-1}, x_k\rangle$,

4. $g(x)$ splňuje podmínku Weierstrassovu, tj. existuje okolí $g(x)$ tak, že v každém jeho bodě (x, y), v němž má pole extremál směr $p(x, y)$, je pro libovolné hodnoty $\bar{p} \neq p$ Weierstrassova funkce

$$E(x, y, p, \bar{p}; l) = F(x, y, \bar{p}) - F(x, y, p) - (\bar{p} - p)\, F_{y'}(x, y, p) = (\bar{p} - p)^2 > 0\,.$$

(Viz např. [1], str. 518, 519, 533.)

Ježto podmínka 4 je splněna pro libovolný bod (x, y), tj. pole extremál obklopujících $g(x)$ pokrývá celou rovinu, realizuje $g(x)$ absolutní minimum funkcionálu J_k na množině C za podmínky (2) a tedy i funkcionálu M_k na množině Φ. Poněvadž konečně determinant soustavy (4), které musí $g(x)$ vyhovovat na základě podmínek (2), $g(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $g(x_k) = y_k$, je $\frac{1}{6}(x_k - x_{k-1})^4 \neq 0$, je $g(x)$ určena jednoznačně a pro každou funkci $f \in \Phi$, $f \neq g$, musí platit (3).

Věta 1. *Nechť x_0, x_k, c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou reálná čísla. Budiž $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Označme $C^{(m)}$ množinu všech funkcí tvaru $y = f(x)$, definovaných a spojitých v intervalu $\langle x_0, x_n\rangle$, jež mají spojitou první derivaci ve všech bodech tohoto intervalu až na m bodů nespojitosti prvého druhu $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Budiž dále $\Phi^{(m)} \subset C^{(m)}$ tak, že pro $f \in \Phi^{(m)}$ platí*

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{5}$$

Pro $f \in C^{(m)}$ definujme funkcionál

$$M(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(x)]^2\, dx = \int_{x_0}^{x_n} [f'(x)]^2\, dx\,.$$

(Všechny integrály jsou Riemannovy.)

Pak existuje funkce $\varphi \in \Phi^{(0)}$ tak, že pro libovolnou funkci $f \in \Phi^{(m)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, $f \neq \varphi$, platí

$$M(\varphi) < M(f) . \tag{6}$$

Funkce $\varphi(x)$ je definována takto: V intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ je $\varphi(x) = \lambda_k x^2 + \alpha_k x + \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kde $3n$ konstant $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k$ je určeno systémem $3n$ lineárních rovnic:

$$\tfrac{1}{3}(x_k^3 - x_{k-1}^3)\,\lambda_k + \tfrac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2)\,\alpha_k + (x_k - x_{k-1})\,\beta_k = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) , \tag{7}$$

$$(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k^2 + (\alpha_k - \alpha_{k+1})\,x_k + \beta_k - \beta_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1) , \tag{8}$$

$$2(\lambda_k - \lambda_{k+1})\,x_k + \alpha_k - \alpha_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1) , \tag{9}$$

$$2\lambda_1 x_0 + \alpha_1 = 0 , \quad 2\lambda_n x_n + \alpha_n = 0 .$$

Důkaz. Budiž $C \subset \bigcup C^{(m)}$, resp. $\Phi \subset \bigcup \Phi^{(m)}$ množina funkcí, jejichž první derivace je spojitá ve všech otevřených intervalech (x_{k-1}, x_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Zvolme pevně libovolnou soustavu reálných čísel $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Podle pomocné věty 2 existuje pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ funkce $g_k(x)$ tak, že $g_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $g_k(x_k) = y_k$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(x)\,dx = c_k$ a že pro libovolnou funkci $f \in \Phi$, pro niž

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ \ldots,\ f(x_n) = y_n \tag{10}$$

a zároveň $f(x) \neq g_k(x)$ v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, platí

$$M_k(g_k) < M_k(f) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Sestrojíme-li funkci $g(x)$ tak, že v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ položíme $g(x) = g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, je $g(x) \in \Phi$ a platí, jestliže alespoň v jednom z intervalů $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ je $g_k(x) \neq f(x)$,

$$M(g) = \sum_{k=1}^{n} M_k(g_k) < \sum_{k=1}^{n} M_k(f) = M(f) . \tag{11}$$

Definujeme-li na množině $C^{(m)}$ funkcionál

$$J(y) = \sum_{k=1}^{n} J_k(y) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F^{(k)}(x, y, y')\,dx ,$$

kde $F^{(k)}(x, y, y') = y'^2 + \lambda_k y$, λ_k je isoperimetrická konstanta a integrál vpravo je Riemannův, lze (11) přepsat ve tvaru

$$J(g) = \sum_{k=1}^{n} J_k(g_k) < \sum_{k=1}^{n} J_k(f) = J(f) , \tag{12}$$

při čemž nyní místo $f \in \Phi$, $g \in \Phi$ položíme $f \in C$, $g \in C$ za podmínek (5).

Označme D množinu všech funkcí $y = g(x)$ definovaných shora udaným způsobem ke všem možným soustavám reálných čísel $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Na množině D je funkcionál J spojitou a jednoznačnou funkcí $(n + 1)$ nezávisle proměnných $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Předpokládejme, že existuje funkce $\varphi \in D$ tak, že pro libovolnou funkci $g \in D$, $g \neq \varphi$, platí $J(\varphi) < J(g)$. Pak musí platit pro funkci $y = \varphi(x)$ (označíme-li znakem $\delta\omega$ variaci funkce ω) při přechodu od ní k funkci jí nekonečně blízké $g(x) = \varphi(x) + \delta y(x)$

$$(13) \qquad 0 = \delta J = \sum_{k=1}^{n} \delta J_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ [F_{y'}^{(k)} \delta y]_{x=x_k-0} - [F_{y'}^{(k)} \delta y]_{x=x_{k-1}+0} + \right.$$
$$\left. + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(F_y^{(k)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}^{(k)} \right) \delta y \, \mathrm{d}x \right\}.$$

Poněvadž funkce g je extremálou v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je spojitá a $y_0, y_1, \ldots, y_n$ jsou proměnné na sobě nezávislé, tedy $\delta y(x_0)$, $\delta y(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou libovolné, plyne z (13)

$$[F_{y'}^{(1)}]_{x=x_0+0} = [F_{y'}^{(n)}]_{x=x_n-0} = 0\,,$$
$$[F_{y'}^{(k)}]_{x=x_k-0} = [F_{y'}^{(k+1)}]_{x=x_k+0} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,,$$

tedy

$$(14) \quad \varphi'(x_0) = \varphi'(x_n) = 0\,, \quad \varphi'(x_k - 0) = \varphi'(x_k + 0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,,$$

tj. funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci i v bodech $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, takže $\varphi \in C^{(0)}$, $\varphi \in \Phi^{(0)}$. Ukážeme, že $\varphi(x)$ vskutku existuje, a to jednoznačně. Z podmínky $\varphi \in D$ plyne, že φ je extremálou v každém intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ za vedlejších podmínek (5), tj. že má v tomto intervalu tvar $\varphi(x) = \lambda_k x^2 + \alpha_k x + \beta_k$ a že její koeficienty $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k$ musí vyhovovat rovnostem (7) a (8). Z podmínek (14) plynou vztahy (9). Z pomocné věty 1 vyplývá, že determinant systému lineárních rovnic (7), (8), (9), který je roven $D_{3n}^{(11)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, je nenulový. Z pomocné věty 2 plyne konečně, že $\varphi(x)$ udílí funkcionálu J absolutní minimum, a to mezi všemi funkcemi množiny D, tj. vzhledem k (12) i mezi všemi funkcemi množiny C za podmínek (5), čili $\varphi(x)$ udílí absolutní minimum funkcionálu M mezi všemi funkcemi množiny Φ.

Předpokládejme nyní, že existuje funkce $\psi(x) \in \Phi^{(m)} \dot{-} \Phi$ tak, že platí

$$M(\psi) \leqq M(\varphi)\,.$$

Pak především $m \neq \emptyset$, tj. existuje k tak, že v intervalu (x_{k-1}, x_k) leží r bodů nespojitosti prvého druhu funkce $\psi'(x)$, jež označíme $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$. Položme $x_{k-1} = \xi_0 < < \xi_1 < \ldots < \xi_r < \xi_{r+1} = x_k$, dále $\psi(\xi_0) = y^{(0)}$, $\psi(\xi_1) = y^{(1)}, \ldots, \psi(\xi_{r+1}) = y^{(r+1)}$, konečně

$$\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \psi(x)\, \mathrm{d}x = c^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r+1)\,.$$

Aplikujeme-li nyní celou hořejší úvahu na interval $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ místo $\langle x_0, x_n \rangle$, s body $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{r+1}$ místo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a s hodnotami $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(r+1)}$, resp. $c^{(0)}$, $c^{(1)}, \ldots, c^{(r+1)}$ místo hodnot $y_0, y_1, \ldots, y_n$, resp. $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – s tím rozdílem pouze, že podržíme hodnoty $y^{(0)}, y^{(r+1)}$ pevně (což bude znamenat, že užijeme nyní determinantu $D_{3n}^{(22)}$ místo $D_{3n}^{(11)}$ z pom. věty 1) – pak dostaneme, že funkce realizující absolutní minimum funkcionálu M_k mezi všemi funkcemi $f \in C^{(m)}$, jejichž první derivace je spojitá ve všech intervalech (ξ_{j-1}, ξ_j) $(j = 1, 2, \ldots, r+1)$ a pro něž platí $f(\xi_0) = = y^{(0)}$, $f(\xi_1) = y^{(1)}, \ldots, f(\xi_{r+1}) = y^{(r+1)}$, dále

$$\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f(x)\, \mathrm{d}x = c^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r+1)\,,$$

má spojitou derivaci v bodech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$. Sestrojíme-li tuto funkci v každém intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a označíme-li funkci výslednou $\chi(x)$, je $\chi(x) \in \Phi$. Avšak pak platí $M(\varphi) < M(\chi) < M(\psi)$, což je spor. Tím je důkaz ukončen.

Věta 2. *Nechť x_0, x_k, c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou reálná čísla. Budiž $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Označme C množinu všech funkcí tvaru $y = f(x)$, definovaných a spojitých v intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$, jejichž prvá derivace je spojitá skoro všude v tomto intervalu. Budiž dále $\Phi \subset C$ tak, že pro $f \in \Phi$ platí $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Pro $f \in C$ definujme funkcionál

$$M(f) = \int_{x_0}^{x_n} [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

(Všechny integrály jsou Lebesgueovy.)

Pak existuje nekonečně mnoho funkcí $y = \psi(x) \in \Phi$ tak, že pro libovolnou funkci $f \in C$ platí

$$M(f) \geqq M(\psi) = 0\,. \tag{15}$$

Důkaz. Zvolme libovolné reálné číslo y_0 a stanovme

$$y_k = \frac{2c_k}{x_k - x_{k-1}} - y_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Položme

$$\alpha = \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \ldots + \frac{2a_{j-1}}{3^{j-1}}\,, \quad \beta = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_{j-1}}{2^{j-1}}\,,$$

$$I_{k,\alpha} = \left(x_{k-1} + \left(\alpha + \frac{1}{3^j}\right)(x_k - x_{k-1}),\; x_{k-1} + \left(\alpha + \frac{2}{3^j}\right)(x_k - x_{k-1})\right),$$

kde $a_i = 0$ nebo 1; $i = 1, 2, \ldots, j - 1$; $j = 1, 2, \ldots$ Definujme $\psi(x) = y_{k-1} + (\beta + 1/2^j)(y_k - y_{k-1})$ pro $x \in I_{k,\alpha}$, $\psi(x_0) = y_0$, $\psi(x_k) = y_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, ve všech ostatních bodech intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ budiž pro $y_{k-1} < y_k$, resp. $y_{k-1} = y_k$, resp. $y_{k-1} > y_k$:

$$\psi(x) = \sup_{\substack{x_{k-1} \leqq \xi < x \\ \xi \in I_{k,\alpha} \cup (x_{k-1})}} \psi(\xi)\,, \quad \text{resp.} \quad \psi(x) = y_{k-1}\,, \quad \text{resp.} \quad \psi(x) = \inf_{\substack{x_{k-1} \leqq \xi < x \\ \xi \in I_{k,\alpha} \cup (x_{k-1})}} \psi(\xi)\,.$$

Funkce $\psi(x)$ je definována a spojitá v intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$. Je-li $x \in I_{k,\alpha}$, existuje $\psi'(x)$ a je spojitá v tomto intervalu. Tedy označíme-li μ Lebesgueovu míru a položíme-li $N_k = \langle x_{k-1}, x_k \rangle \dot{-} \bigcup_\alpha I_{k,\alpha}$, pak ježto $\mu(\bigcup_\alpha I_{k,\alpha}) = x_k - x_{k-1}$, je $\mu(N_k) = 0$ a $\psi \in C$. Dále poněvadž pro $x \in I_{k,\alpha}$ platí $\psi(x) = y_k + y_{k-1} - \psi(x_k + x_{k-1} - x)$, je

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)(x_k - x_{k-1}) = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

tedy $\psi \in \Phi$. Konečně protože pro $x \in I_{k,\alpha}$ je $\psi'(x) = 0$, plyne odtud ihned (15), neboť funkcionál M nemůže nabývat záporných hodnot. Ježto y_0 bylo libovolné, lze definovat shora udaným způsobem nekonečně mnoho funkcí $\psi(x)$ vyhovujících podmínkám věty.

Literatura

[1] *O. Bolza*: Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909.
[2] *M. A. Lavrenťjev a L. A. Ljusternik*: Kurs variačního počtu, Praha 1952.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

БОГУСЛАВ МИШЕК (Bohuslav Míšek), Стохов-Гонице

Пусть x_0, x_k, c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — действительные числа, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Обозначим через Φ множество всех функций вида $y = f(x)$, определенных и непрерывных на интервале $\langle x_0, x_n \rangle$, для которых справедливо

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{a}$$

Для $f \in \Phi$ определим функционал

$$M(f) = \int_{x_0}^{x_n} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{b}$$

Теорема 1. *Пусть $\Phi_1 \subset \Phi$ — подмножество всех функций, первая производная которых непрерывна на интервале $\langle x_0, x_n \rangle$ за исключением m точек разрыва первого рода ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Пусть* (a), (b) *— интегралы Римана. Тогда существует функция $\varphi \in \Phi_1$, для которой $m = 0$ так, что для любой функции $f \in \Phi_1$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), $f \neq \varphi$, справедливо $M(\varphi) < M(f)$. Функция $\varphi(x) = \lambda_k x^2 + \alpha_k x + \beta_k$ на интервале $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, где константы $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k$ определены системой $3n$ линейных уравнений* (7), (8), (9).

Функция $\varphi(x)$ представляет наиболее гладкий ход какого-то процесса при данных условиях (a).

Теорема 2. *Пусть $\Phi_2 \subset \Phi$ — подмножество всех функций, первая производная которых непрерывна почти всюду на интервале $\langle x_0, x_n \rangle$. Пусть* (a), (b) *— интегралы Лебега. Тогда существует бесконечное число функций $\psi \in \Phi_2$ так, что $\psi'(x) = 0$ почти всюду на интервале $\langle x_0, x_n \rangle$, и для любой функции $f \in \Phi_2$ справедливо $M(f) \geqq M(\psi) = 0$.*

Одна из функций $\psi(x)$ построена с применением множества Кантора.

Summary

ON A VARIATIONAL PROBLEM

BOHUSLAV MÍŠEK, Stochov-Honice

Let x_0, x_k, c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ be real numbers, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Let us denote by Φ the set of functions of the form $y = f(x)$, which are defined and continuous in the interval $\langle x_0, x_n\rangle$ and satisfy the relations

$$\text{(a)} \qquad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

For $f \in \Phi$, let us define the functional

$$\text{(b)} \qquad M(f) = \int_{x_0}^{x_n} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Theorem 1. *Let $\Phi_1 \subset \Phi$ be the subset of functions with first derivative continuous in the interval $\langle x_0, x_n\rangle$ with the exception of m points of simple discontinuity $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Let* (a), (b) *be Riemann integrals. Then there exists a function $\varphi \in \Phi_1$, for which $m = 0$, such that for any function $f \in \Phi_1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, $f \neq \varphi$, there holds $M(\varphi) < M(f)$; further $\varphi(x) = \lambda_k x^2 + \alpha_k x + \beta_k$ in the interval $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, where the constants $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k$ are determined by the system of $3n$ linear equations* (7), (8), (9).

The function $\varphi(x)$ determines as smooth as possible a development of a process under given conditions (a).

Theorem 2. *Let $\Phi_2 \subset \Phi$ be the subset of functions with first derivative continuous almost everywhere in $\langle x_0, x_n\rangle$. Let* (a), (b) *be Lebesgue integrals. Then there exists an infinity of functions $\psi \in \Phi_2$ such that $\psi'(x) = 0$ almost everywhere in $\langle x_0, x_n\rangle$ and that for any function $f \in \Phi_2$ there holds $M(f) \geqq M(\psi) = 0$.*

One such function $\psi(x)$ is constructed using Cantor's discontinuum.