Ivo Vrkoč

Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 326--358

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117431

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

ИВО ВРКОЧ (Ivo Vrkoč), Прага

(Поступило в редакцию 15/V 1961 г.)

В работе характеризуется с точки зрения функций Ляпунова понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Устойчивостью при постоянно действующих возмущениях занималось уже несколько авторов: Н. Г. Четаев [1], Н. А. Артемьев [2], Г. Н. Дубошин [3], И. Г. Малкин [4]; к сожалению, все эти статьи автору недоступны.

Пусть дана система дифференциальных уравнений, которую мы запишем в векторном виде $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $\|x\| = \sqrt{(\sum x_i^2)}$

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x)\,, \tag{1}$$

где отдельные составляющие $X_i(t, x)$ непрерывны и определены в области $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq a$, $a > 0$ (может быть и $a = \infty$). Далее мы будем предполагать, что $X(t, 0) \equiv 0$, т. е. что уравнение (1) обладает решением $x \equiv 0$.

Определение 1. Мы скажем, что решение $x \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях (далее только устойчиво ППДВ), если к любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать числа $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$ так, что для всех решений $y(t)$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = X(t, y) + R(t, y) \tag{2}$$

будет $\|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$, если $\|y(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$ и если непрерывная функция $R(t, y)$ удовлетворяет соотношению $\|R(t, y)\| < \delta_2(\varepsilon)$ в области $t \geqq 0$, $\|y\| < \varepsilon$. Если $a = \infty$ и $\lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_1(\varepsilon) = \infty$, то мы скажем, что $x \equiv 0$ является глобально устойчивым ППДВ. В случае, если $a < \infty$ или функция $\delta_1(\varepsilon)$ ограничена, мы скажем, что решение $x \equiv 0$ локально устойчиво ППДВ.

В случае локальной устойчивости мы определим функцию $V(t, x)$ лишь в некоторой области $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq K$. Оба случая устойчивости — глобальную и локальную — можно, однако, исследовать одновременно.

Если решение $x \equiv 0$ локально устойчиво ППДВ, можно, как обычно, видоизменить функции $X_i(t, x)$ так, чтобы в области $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq K$ они были тождественны с исходными, в области $t \geqq 0$, $\|x\| \geqq 2K$ были равны $-x_i$, и чтобы они были определены и непрерывны для всех $t \geqq 0$, x. Таким образом решение $x \equiv 0$, которое было локально устойчивым ППДВ, станет глобально устойчивым ППДВ и при помощи указанных в дальнейшем конструкций можно построить функцию $V(t, x)$, удовлетворяющую условиям 1, 2, 3 теоремы 1. Так как новые дифференциальные уравнения в области $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq K$ тождественны с исходными, функция $V(t, x)$ будет в области $t \geqq 0$, $\|x\| \leqq K$ удовлетворять условиям теоремы 1. Согласно теореме 1 и из того, что было здесь сказано, ясно, что определенная таким образом локально функция $V(t, x)$ будет характеризовать локальную устойчивость ППДВ решения $x \equiv 0$ уравнения (1). Нужно еще заметить, что функцию $\delta_1(\varepsilon)$ можно подобрать непрерывной и возрастающей, а функцию $\delta_2(\varepsilon)$ — непрерывной.

Очевидно, что указанное определение устойчивости ППДВ равносильно следующему определению:

Определение 2. Решение $x \equiv 0$ уравнения (1) является устойчивым ППДВ, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$ так, что для каждой (векторной) фунции $y(t)$ с непрерывной производной, для которой $\|y(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$ и $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| < \delta_2(\varepsilon)$ для $t \geqq t_0$, имеет место $\|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$.

В дальнейшем мы будем пользоваться этим более простым определением устойчивости ППДВ.

При построении функции $V_2(t, x)$ нам будут нужны указанные выше функции $y(t)$; от них мы будет требовать, однако, только абсолютную непрерывность. Напрашивается ворпос о взаимоотношении определенных таким образом двух понятий устойчивости ППДВ. Ясно, что из устойчивости ППДВ при условии абсолютной непрерывности функций $y(t)$ следует устойчивость ППДВ при условии, что функции $y(t)$ обладают непрерывными производными. Обратная импликация может быть выведена таким образом, что мы построим функцию $V_1(t, x)$ в теореме 2, если $x \equiv 0$ устойчиво ППДВ при условии существования непрерывных производных функций $y(t)$, и докажем, что $x \equiv 0$ устойчиво ППДВ при условии абсолютной непрерывности функций $y(t)$ (если такая функция существует). В определении 2 устойчивости ППДВ, следовательно, безразлично, возьмемли в качестве функций $y(t)$ функции с непрерывной производной или же функции абсолютно непрерывные. В определении 1 это обстоятельство проявится так, что относительно функций $R(t, y)$ можно ограничиться предположением, что они удовлетворяют условиям Каратеодори. Прежде чем формулировать упомянутую выше теорему, мы дадим два определения:

Определение 3. О фукции $V(t, x)$, определенной для всех $t \geqq 0$, x, мы скажем, что она глобально положительно определенная, если существует непрерывная функция $U_1(\eta)$ $U_1(\eta) > 0$ для $\eta > 0$, такая, что

$$V(t, x) \geqq U_1(\|x\|) \quad \text{и} \quad \lim_{\eta \to \infty} U_1(\eta) = \infty .$$

Определение 4. О функции $V(t, x)$, определенной для всех $t \geqq 0$, x, мы скажем, что она допускает бесконечно малый высший предел, если существует непрерывная функция $U_2(\eta)$ такая, что

$$U_2(0) = 0 \quad \text{и} \quad V(t, x) \leqq U_2(\|x\|) .$$

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1) *существует функция* $V(t, x)$, *определенная в области* $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$, *в которой она обладает непрерывными частными производными первого порядка и такая, что*

1. $V(t, x)$ *является глобально положительно определенной.*
2. $V(t, x)$ *допускает бесконечно малый высший предел.*
3. *Существует непрерывная функция* $U(\eta)$ *для* $\eta \geqq 0$, $U(\eta) > 0$ *для* $\eta > 0$ *так, что*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + U(\|x\|)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq 0 , \quad \text{где} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i .$$

Тогда решение $x \equiv 0$ *уравнения* (1) *будет глобально устойчивым ППДВ.*

Наоборот, пусть решение $x \equiv 0$ *уравнения* (1) *глобально устойчиво ППДВ; тогда существует функция* $V(t, x)$, *удовлетворяющая указанным выше требованиям и обладающая кроме того частными производными всех порядков по всем переменным.*

Замечание 1. Ход функции $U(\varepsilon)$ аналогичен ходу функции $\delta_2(\varepsilon)$, то есть, если $\lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_2(\varepsilon) = \infty$, то функцию $V(t, x)$ можно построить так, что $\lim_{\varepsilon \to \infty} U(\varepsilon) = \infty$, а если $\delta_2(\varepsilon) \leqq K$ или $\lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_2(\varepsilon) = 0$, то и функция $U(\varepsilon)$ ограничена или стремится к нулю.

Доказательство. Докажем прежде всего первую часть теоремы и в качестве класса функций $y(t)$ возьмем, как мы уже говорили, класс абсолютно непрерывных функций.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое положительное число, возьмем $U_1(\varepsilon)$, где $U_1(\eta)$ — функция, фигурирующая в условии глобальной положительной определенности функции $V(t, x)$. Число $\delta_1(\varepsilon)$ подберем так, чтобы $U_2(\delta_1(\varepsilon)) < U_1(\varepsilon)$, где $U_2(\eta)$ — — функция, фигурирующая в условии 2 теоремы 1. (Ясно, что $\delta_1(\varepsilon) \leqq \varepsilon$ и что функцию $\delta_1(\varepsilon)$ можно подобрать так, чтобы $\lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_1(\varepsilon) = \infty$.) Число $\delta_2(\varepsilon)$ возьмем так, чтобы $\delta_2(\varepsilon) < \min_{\delta_1(\varepsilon) \leqq \eta \leqq \varepsilon} U(\eta)$, где $U(\eta)$ — функция, фигурирующая в условии 3. Применяя доказательство от противного, покажем, что найденные только-что числа $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ выполняют требования, сформулированные в определении 2.

Итак, пусть существует (векторная) функция $y(t)$, определенная на некотором интервале $\langle t_0, t^{**}\rangle$. где она абсолютно непрерывна и удовлетворяет соотношениям $\|y(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$, $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| < \delta_2(\varepsilon)$ почти для всех $t \in \langle t_0, t^{**}\rangle$ и $\|y(t^{**})\| \geqq \varepsilon$. Возьмем наименьшее t^* такое, что $\|y(t^*)\| = \varepsilon$, и наибольшее t_1 (меньшее чем t^*) такое, что $\|y(t_1)\| = \delta_1(\varepsilon)$. В интервале (t_1, t^*) должно быть, следовательно, $\delta_1(\varepsilon) < \|y(t)\| < \varepsilon$. Положим $R(t) = \dot{y}(t) - X(t, y(t))$. Функция $R(t)$ определена почти для всех t, причем $\|R(t)\| < \delta_2(\varepsilon)$ почти для всех $t \in (t_1, t^*)$. Функция $y(t)$ является решением уравнения (2), в котором $R(t, y)$ мы заменим только что определенной функцией $R(t)$. Функция $V(t, y(t))$, очевидно, удовлетворяет для $t \in \langle t_1, t^*\rangle$ соотношению

$$
\begin{aligned}
V(t, y(t)) &= V(t_1, y(t_1)) + \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}V(t, y(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = V(t_1, y(t_1)) + \\
&+ \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \right) \mathrm{d}t = V(t_1, y(t_1)) + \\
&+ \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y(t))\, R_i(t)\,\mathrm{d}t \leqq V(t_1, y(t_1)) + \\
&+ \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right]} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} R_i^2 \right]}\,\mathrm{d}t \leqq V(t_1, y(t_1)) + \\
&+ \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \delta_2(\varepsilon) \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right)} \right] \mathrm{d}t \leqq V(t_1, y(t_1) + \\
&+ \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, y(t)) + U(\|y(t)\|) \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right)} \right] \mathrm{d}t \leqq V(t_1, y(t_1)).
\end{aligned}
$$

Таким образом мы получили $V(t^*, y(t^*)) \leqq V(t_1, y(t_1)) < U_2(\|y(t_1)\|) < U_1(\varepsilon)$, так как $\|y(t_1)\| = \delta_1(\varepsilon)$. С другой стороны, $V(t^*, y(t^*)) \geqq U_1(\|y(t^*)\|) = U_1(\varepsilon)$. Это противоречие доказывает, что векторная функция $y(t)$ должна удовлетворять неравенству $\|y(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqq t_0$, что и доказывает первую часть теоремы.

Доказательство второй части теоремы мы разделим на три следующие теоремы и несколько лемм. Векторных функций (кривых) $y(t)$, фигурирующих в определении 2, недостаточно для построения ляпуновской локально липшицевской функции, так как их направление в каждой точке ограничено. Для этой цели нужно использозать значительно более богатую систему вспомогательных кривых, свойства которых определяются в теореме 3. При помощи этой системы кривых уже нетрудно построить локально липшицевскую функцию с требуемыми свойствами (см. теорему 4). Пользуясь теоремами о приближении и сглаживании, приведенными в работе Я. Курцвейля [5], мы получим функцию $V(t, x)$, удовлетворяющую требованиям теоремы 1. Однако, оказывается, что для построения вспомогательной системы кривых (см. теорему 3) необходимо знать, что существует хотя бы непрерывная функция Ляпунова

$V(t, x)$, выполняющая условия 1, 2 теоремы 1 и некоторое условие 3′, которое заменяет условие 3 (в условии 3 требуется существование частных производных). Такую непрерывную функцию Ляпунова мы построим в теореме 2.

Прежде чем перейти к теореме 2, нам нужно определить две вспомогательные функции. Хотя мы в определении 1 устойчивости ППДВ не предполагаем, что функция $\delta_1(\varepsilon)$ непрерывна, но ясно, что в случае глобальной устойчивости ППДВ можно взять $\delta_1(\varepsilon)$ непрерывную и монотонную так, чтобы свойство $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \delta_1(\varepsilon) = \infty$ не нарушилось. Первую вспомогательную функцию $\lambda(\eta)$ мы выберем так, чтобы $\lambda(0) = 0$, $0 < \lambda(\|x\|) < \frac{1}{2}\delta_2(\varepsilon)$ для всякого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\frac{1}{2}\delta_1(\varepsilon) \leqq \|x\| \leqq \varepsilon$. Вторую вспомогательную функцию $\varphi(x, y)$ мы определим так:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq x \leqq y\,, \qquad \varphi(x, y) = \frac{x-y}{2y-x} \quad \text{для} \quad y < x < 2y\,.$$

Теорема 2. *Пусть решение $x \equiv 0$ уравнения (1) глобально устойчиво ППДВ; тогда существует функция $V_1(t, x)$, определенная и* ***непрерывная*** *для всех $t \geqq 0$, x, такая, что выполняются следующие условия:*

1. $V(t, x) \geqq \|x\|$.
2. *$V(t, x)$ допускаем бесконечно малый высшуй предел.*
3. *Функция $V(t, y(t))$ не возрастает с t, если функция $y(t)$ обладает непрерывной производной всюду за исключением конечного числа точек (в которых она непрерывна и имеет производные справа и слева) и удовлетворяет соотношению*

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \lambda(\|y(t)\|)\,,$$

причем в точках, в которых функция не имеет производной, это неравенство должно выполняться для производных справа и слева в отдельности.

Обозначение. Систему функций, имеющих непрерывные производные всюду за исключением конечного числа точек, в которых эти функции непрерывны и имеют производные справа и слева, мы обозначим через $\mathscr{S}$. Если мы скажем, что для функции $y(t)$ из системы $\mathscr{S}$ выполняется какое-либо неравенство для всех t, в котором фигурирует и производная $\dot{y}(t)$, то мы будем подразумевать, что в точках, в которых $y(t)$ не обладает производной, указанное неравенство выполняется для производных справа и слева.

Нам понадобится еще следующее вспомогательное утверждение:

Замечание 2. Глобальная устойчивость ППДВ (см. определение 2) равносильна глобальной устойчивости ППДВ при условии, что кривые $y(t)$ мы берем из системы $\mathscr{S}$. Дело в том, что функции $z(t)$ из системы $\mathscr{S}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|z(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)\,, \quad \|\dot{z}(t) - X(t, z(t))\| < \delta_2(\varepsilon)$$

а в конечном числе точек t_i, в которых не существует $\dot{z}(t)$, неравенствам

$$\|\dot{z}(t_i - 0) - X(t_i, z(t_i))\| < \delta_2(\varepsilon), \quad \|\dot{z}(t + 0) - X(t_i, z(t_i))\| < \delta_2(\varepsilon),$$

нетрудно аппроксимировать функциями $y(t)$, имеющими непрерывную производную и удовлетворяющими неравенствам $\|y(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$, $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| < \delta_2(\varepsilon)$, причем еще $y(t) = z(t)$ всюду, за исключением малых окрестностей точек t_i.

Лемма 1. *Пусть функция $y(t)$ из системы $\mathscr{S}$, определенная на интервале $\langle t_0, \infty)$, удовлетворяет неравенствам $\|y(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$ и $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq 2\lambda(\|y(t)\|)$ для всех $t \in \langle t_0, \infty)$; тогда $\|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует функция из системы $\mathscr{S}$ такая, что $\|y(t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$, $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq 2\lambda(\|y(t)\|)$ для всех $t \geqq t_0$ и $\|y(T)\| = \varepsilon$ для некоторого $T > t_0$. Очевидно, можно взять числа t^*, t^{**} так, чтобы $t_0 \leqq t^* < t^{**} \leqq T$, $\frac{1}{2}\delta_1(\varepsilon) < \|y(t)\| < \varepsilon$ для $t \in (t^*, t^{**})$ и $\|y(t^*)\| < \delta_1(\varepsilon)$, $\|y(t^{**})\| = \varepsilon$. Итак, в интервале $\langle t^*, t^{**})$

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq 2\lambda(\|y(t)\|) < \delta_2(\varepsilon)$$

и из определения устойчивости ППДВ (см. замечание 2) следует $\|y(t^{**})\| < \varepsilon$, чем и доказывается лемма 1.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Функцию $V(t, x)$ мы определим так:

$$V(t, x) = \sup_{\substack{y(\xi) \\ y(t) = x}} \{\sup_{\xi \geqq t} \|y(\xi)\| - \sup_{\eta \geqq t} \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\|, \lambda(\|y(\eta)\|))\},$$

где первый супремум распространяется на множество функций из системы $\mathscr{S}$, определенных для всех $\xi \geqq t$ и выполняющих равенство $y(t) = x$.

1. Функция $V(t, x)$ существует и допускает бесконечно малый высший предел. Множество таких кривых непусто, в качестве $y(\xi)$ можно взять решение $x(t)$ уравнения (1). Для функции $y(\xi)$ должно иметь место

$$\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\| < 2\lambda(\|y(\eta)\|), \tag{2,1}$$

иначе второе выражение в определении функции $V(t, x)$ не будет определенным. Возьмем теперь число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2\|x\| = \delta_1(\varepsilon)$. По лемме 1 имеет место с учетом неравенства (2,1) $\|y(\eta)\| < \varepsilon$ для $\eta \geqq t$. Итак, функция $V(t, x)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$V(t, x) \leqq \varepsilon. \tag{2,2}$$

Функцию $U_2(\eta)$ мы определим так, что $U_2(\eta)$ — непрерывная функция, определенная для $\eta \geqq 0$, $U_2(0) = 0$ и $U_2(\|x\|) > \varepsilon$ для тех ε, для которых $2\|x\| = \delta_1(\varepsilon)$. Итак, из неравенства (2,2) следует $V(t, x) \leqq \varepsilon < U_2(\|x\|)$.

2. Функция $V(t, x)$ глобально положительно определенна. Если в качестве функции $y(\xi)$ взять решение дифференциального уравнения (1), выходящее из точки $[t, x]$ и $\xi = t$, то получим $V(t, x) \geqq \|x\|$.

3. Функция $V(t, y(t))$ не возрастает с t для всех функций $y(t)$ из системы $\mathscr{S}$, которые для всех t удовлетворяют неравенству $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \lambda(\|y(t)\|)$. Возьмем две любые числа $0 \leqq t_1 < t_2$ и функцию $y(t)$ из системы $\mathscr{S}$, определенную на интервале $\langle t_1, t_2 \rangle$, для которой $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \lambda(\|y(t)\|)$ при всех $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. Докажем, что $V(t_1, y(t_1)) \geqq V(t_2, y(t_2))$. По определению $V(t_2, y(t_2))$ для каждого числа $\mu > 0$ можно найти функцию $u(\xi)$, определенную для $\xi \geqq t_2$ из системы $\mathscr{S}$ и число $\xi^* \geqq t_2$ так, что

$$(2,3) \qquad V(t_2, y(t_2)) - \|u(\xi^*)\| + \sup_{\eta \geqq t_2} \varphi(\|\dot{u}(\eta) - X(\eta, u(\eta))\|, \lambda(\|u(\eta)\|)) < \mu .$$

Положим

$$(2,4) \qquad v(t) = y(t) \quad \text{для} \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle, \qquad v(t) = u(t) \quad \text{для} \quad t > t_2 .$$

По определению функции V наверное будет

$$(2,5) \qquad V(t_1, y(t_1)) \geqq \sup_{\xi \geqq t_1} \|v(\xi)\| - \sup_{\eta \geqq t_1} \varphi(\|\dot{v}(\eta) - X(\eta, v(\eta))\|, \lambda(\|v(\eta)\|)) .$$

Ввиду (2,4) и в силу выбора функции $y(t)$ выражение $\varphi(\|\dot{v}(\eta) - X(\eta, v(\eta))\|, \lambda(\|v(\eta)\|))$ имеет смысл. Очевидно,

$$(2,6) \qquad \sup_{\xi \geqq t_1} \|v(\xi)\| \geqq \|u(\xi^*)\| \quad \text{и} \quad \varphi(\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\|, \lambda(\|y(t)\|)) = 0 ,$$

следовательно,

$$(2,7) \qquad \sup_{\eta \geqq t_1} \varphi(\|\dot{v}(\eta) - X(\eta, v(\eta))\|, \lambda(\|v(\eta)\|)) = \\ = \sup_{\eta \geqq t_2} \varphi(\|\dot{u}(\eta) - X(\eta, u(\eta))\|, \lambda(\|u(\eta)\|)) .$$

Ввиду (2,3)–(2,7) получим

$$V(t_2, y(t_2)) < \mu + \|u(\xi^*)\| - \sup_{\eta \geqq t_2} \varphi(\|\dot{u}(\eta) - X(\eta, u(\eta))\|, \lambda(\|u(\eta)\|)) \leqq \\ \leqq \mu + \sup_{\xi \geqq t_1} \|v(\xi)\| - \sup_{\eta \geqq t_1} \varphi(\|\dot{v}(\eta) - X(\eta, v(\eta))\|, \lambda(\|v(\eta)\|)) \leqq \mu + V(t_1, y(t_1)) .$$

Так как число μ было взято произвольно, отсюда следует

$$V(t_1, y(t_1)) \geqq V(t_2, y(t_2)) .$$

4. Функция $V(t, x)$ непрерывна. Это свойство, как покажем далее, легко следует из следующей леммы.

Лемма 2. *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *и точки* $[t_0, x_0]$, $x_0 \neq 0$ *существует число* $h_0 > 0$ *так, что для всех* $0 \leqq h < h_0$

$$(2,8) \quad |V(t_0 - h, q(-h)) - V(t_0 + h, q(h))| < \varepsilon \quad \text{где} \quad q(h) = X(t_0, x_0)\, h + x_0 .$$

Доказательство леммы 2 проведем в нескольких этапах. Возьмем прежде всего $h_1 > 0$ так, чтобы $\min\limits_{|t-t_0|\leqq h_1} \lambda(\|q(t-t_0)\|) = \alpha > 0$ далее возьмем $h_2 > 0$ так, чтобы

$$\|X(t_0, x_0) - X(t, q(t-t_0))\| < \alpha \quad \text{для} \quad |t-t_0| \leqq h_2 .$$

Возьмем $h_3 = \min(h_1, h_2)$ и положим $m(t) = q(t-t_0)$. Функция $m(t)$ безусловно принадлежит системе $\mathscr{S}$ и выполняет в интервале $|t-t_0| \leqq h_3$ соотношение

$$\|\dot{m}(t) - X(t, m(t)\| = \|X(t_0, x_0) - X(t, q(t-t_0))\| < \alpha \leqq \lambda(\|q(t-t_0)\|) = \\ = \lambda(\|m(t)\|) .$$

По доказанному уже пункту 3 функция $V(t, m(t))$ не возрастает, и имеем

$$(2,9) \qquad V(t_0 - h, m(t_0 - h)) - V(t_0 + h, m(t_0 + h)) = \\ = V(t_0 - h, q(-h)) - V(t_0 + h, q(h)) \geqq 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq h < h_3 .$$

Итак, в дальнейшем достаточно доказать неравенство

$$(2,10) \qquad V(t_0 - h, q(-h)) - V(t_0 + h, q(h)) < \varepsilon \quad \text{для} \quad 0 \leqq h < h_0 .$$

При доказательстве этого неравенства нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3. *Для любого числа $\omega > 0$ и точки $[t_0, x_0]$, $x_0 \neq 0$ существуют числа $\Delta t_1 > 0$, $\Delta t_2 > 0$ так, что все функции из системы $\mathscr{S}$, для которых*

$$(2,11) \quad \|y(t_1) - x_0\| < \Delta t_1, \quad |t_1 - t_0| < \Delta t_1, \quad \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq 2\lambda(\|y(t)\|) ,$$

удовлетворяют также неравенству $\|y(t) - x_0\| < \omega$ для $t \in \langle t_1, t_0 + \Delta t_2\rangle$.

Доказательство. Положим $M = \max \|X(t, x)\|$, $t \in \langle t_0 - \omega, t_0 + \omega\rangle$, $\|x - x_0\| \leqq \omega$. Далее положим

$$(2,12) \qquad C = \max_{0 \leqq \eta \leqq \|x_0\| + \omega} \lambda(\eta), \ \Delta t_1 = \omega \min\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1 + 2C + M}, 1\right),$$

$$\Delta t_2 < \omega \min\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2C + M}, 1\right).$$

Предположим, что существует функция $y(t)$, не удовлетворяющая лемме 3, т. е.

$$\|y(t_1) - x_0\| < \Delta t_1, |t_1 - t_0| < \Delta t_1, \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq 2\lambda(\|y(t)\|) ,$$

$$(2,13) \qquad \|y(t^*) - x_0\| = \omega \quad \text{для} \quad t^* \in \langle t_1, t_0 + \Delta t_2\rangle .$$

Не меняя обозначений, возьмем первое такое t^*, т. е. $\|y(t) - x_0\| < \omega$ для $t \in \langle t_1, t^*)$. Из неравенства (2,11) следует: для $t \in \langle t_1, t^*)$ имеет место неравенство $\|\dot{y}(t)\| \leqq 2C + M$. Отсюда

$$\|y(t^*) - y(t_1)\| \leqq (2C + M)|t^* - t_1| \leqq (2C + M)\,\Delta t_1 + (2C + M)\,\Delta t_2 .$$

Опять согласно первому неравенству (2,11) имеем

$$\|y(t^*) - x_0\| < (1 + 2C + M)\,\Delta t_1 + (2C + M)\,\Delta t_2 < \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega\,.$$

Последнее неравенство справедливо ввиду (2,12) и противоречит неравенству (2,13), чем и доказывается лемма 3. Кроме леммы 3 нам понадобится еще следующая лемма:

Лемма 4. *Для каждого числа* $L > 0$ *существует число* $A(L) > 0$ $(A(L) > L)$ *так, что для всех функций из системы* $\mathcal{S}$, *для которых* $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq 2\lambda(\|y(t)\|)$,

(2,14) $\|y(t_0)\| < L, \sup\limits_{\xi \geqq t_0} \|y(\xi)\| - \sup\limits_{\eta \geqq t_0} \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\|, \lambda(\|y(\eta)\|)) \geqq \frac{1}{2}\|y(t_0)\|$

имеет место соотношение

(2,15) $2\lambda(\|y(t)\|) - \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \geqq \dfrac{\lambda(\|y(t)\|)}{1 + A(L) - \frac{1}{2}\|y(t_0)\|} \geqq \dfrac{\lambda(\|y(t)\|)}{1 + A(L)}.$

Доказательство. Число $A(L)$ подберем так, чтобы $\delta_1(A(L)) > L$; по лемме 1 будет $\|y(t)\| < A(L)$ для $t \geqq t_0$. Неравенство (2,14) можно тогда переписать в виде

$$\tfrac{1}{2}\|y(t_0)\| \leqq A(L) - \sup_{\eta \geqq t_0} \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\|, \lambda(\|y(\eta)\|))\,;$$

по определению функции φ имеем

$$\frac{\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| - \lambda(\|y(t)\|)}{2\lambda(\|y(t)\|) - \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\|} \leqq A(L) - \frac{1}{2}\|y(t_0)\|\,,$$

и получим без труда неравенство (2,15). Лемма 4 доказана.

Докажем теперь неравенство (2,10). Возьмем точку $[t_0, x_0]$, $x_0 \neq 0$ и произвольное число $\omega > 0$. По лемме 3 существуют числа $\Delta t_1 > 0$, $\Delta t_2 > 0$. Далее возьмем достаточно малое число $h_4 > 0$ так, чтобы $h_4 < \Delta t_1$, $h_4 + \sqrt{h_4} < \Delta t_2$. По определению функции $V(t, x)$ можно из системы $\mathcal{S}$ выбрать функцию $u^h(\xi)$ такую, что $u^h(t_0 - h) = q(-h)$ и

(2,16)
$$V(t_0 - h, q(-h)) - \sup_{\xi \geqq t_0 - h} \|u^h(\xi)\| + \\ + \sup_{\eta \geqq t_0 - h} \varphi(\|\dot{u}^h(\eta) - X(\eta, u^h(\eta))\|, \lambda(\|u^h(\eta)\|)) < h$$

для любого $0 < h < h_4$, а так как $V(t, x) \geqq \|x\|$, можно требовать, чтобы $u^h(\xi)$ удовлетворяли неравенству (2,14).

К функциям $u^h(\xi)$ мы определим функции $v^h(\xi)$ так:

(2,17)
$$v^h(\xi) = u^h(\xi) \quad \text{для} \quad \xi \geqq t_0 + h + \sqrt{h}\,,$$

(2,18)
$$v^h(\xi) = q(h) + [u^h(t_0 + h + \sqrt{h}) - q(h)]\,\frac{\xi - t_0 - h}{\sqrt{h}} \quad \text{для}$$
$$\xi \in (t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h})\,.$$

Для того, чтобы функцию $v^h(\xi)$ можно было бы использовать при определении V в точке $[t_0 + h, q(h)]$, нужно доказать, что

$$v^h(\xi) \in \mathscr{S}, \ \|\dot{v}^h(\xi) - X(\xi, v^h(\xi))\| < 2\lambda(\|v^h(\xi)\|).$$

В силу (2,17) неравенство

$$\|\dot{v}^h(\xi) - X(\xi, v^h(\xi))\| < 2\lambda(\|v^h(\xi)\|)$$

выполняется для $\xi \geqq t_0 + h + \sqrt{h}$. Это неравенство нужно доказать и для $\xi \in (t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h})$. С этой целью сделаем оценку выражения

$$\|\dot{v}^h(\xi) - X(\xi, v^h(\xi))\| - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\|,$$

где μ взято так, что в точке μ функция $\|\dot{u}^h(t) - X(t_0, x_0)\|$ имеет максимум на интервале $t_0 - h \leqq t \leqq t_0 + h + \sqrt{h}$ (μ зависит и от h). Имеем

(2,19)
$$\|\dot{v}^h(t) - X(t, v^h(t))\| - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\| \leqq$$
$$\leqq \|\dot{v}^h(t) - X(t_0, x_0)\| - \|\dot{u}^h(\mu) - X(t_0, x_0)\| + 2\psi(h, \omega),$$

где $\psi(h, \omega)$ определено выражением $\psi(h, \omega) = \max \|X(t, x) - X(\tau, y)\|$, $t_0 - h \leqq$ $\leqq t \leqq t_0 + h + \sqrt{h}$, $\|x - x_0\| \leqq \omega$, $\|y - x_0\| \leqq \omega$, $t_0 - h \leqq \tau \leqq t_0 + h + \sqrt{h}$, и, конечно, $\psi(h, \omega) \to 0$ для $h \to 0$, $\omega \to 0$.

Положим

$$s^h(t) = v^h(t) - X(t_0, x_0)(t - t_0 - h) + u^h(t_0 - h) - v^h(t_0 + h),$$
$$r^h(t) = u^h(t) - X(t_0, x_0)(t - t_0 + h) \quad \text{для} \quad t \in \langle t_0 - h, t_0 + h + \sqrt{h}\rangle.$$

Далее имеем $r^h(t_0 - h) = s^h(t_0 + h) = u^h(t_0 - h)$ и

$$s^h(t) = [r^h(t_0 + h + \sqrt{h}) - r^h(t_0 - h)]\frac{t - t_0 - h}{\sqrt{h}} + r^h(t_0 - h).$$

Правая часть неравенства (2,19) равна

(2,20)
$$\|\dot{s}^h(t)\| - \|\dot{r}^h(\mu)\| + 2\psi(h, \omega) \leqq \frac{1}{\sqrt{h}}\|r^h(t_0 + h + \sqrt{h}) - r^h(t_0 - h)\| -$$
$$- \|\dot{r}^h(\mu)\| + 2\psi(h, \omega) \leqq \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{t_0 - h}^{t_0 + h + \sqrt{h}} \|\dot{r}^h(\tau)\| \, d\tau - \|\dot{r}^h(\mu)\| + 2\psi(h, \omega) \leqq$$

(и в силу выбора числа μ)

(2,21)
$$\leqq \frac{1}{\sqrt{h}}\|\dot{r}^h(\mu)\|(2h + \sqrt{h}) - \|\dot{r}^h(\mu)\| + 2\psi(h, \omega) \leqq \|\dot{r}^h(\mu)\| 2\sqrt{h} + 2\psi(h, \omega) =$$
$$= \|\dot{u}^h(\mu) - X(t_0, x_0)\| 2\sqrt{h} + 2\psi(h, \omega) \leqq \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\| 2\sqrt{h} +$$
$$+ 2\psi(h, \omega)(1 + \sqrt{h}) \leqq 4\lambda(\|u^h(\mu)\|\sqrt{h} + 2\psi(h, \omega)(1 + \sqrt{h}) \leqq$$
$$\leqq 4w(\omega)\sqrt{h_4} + 2\psi(h_4, \omega)(1 + \sqrt{h_4}),$$

где $w(\omega) = \max \lambda(\eta)$ для $|\eta - \|x_0\|| \leqq \omega$, $w(\omega)$ ограничена при $\omega \to 0$. Итак, в общем получаем

$$(2,22) \qquad \|\dot{v}^h(t) - X(t, v^h(t))\| - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\| \leqq 4w(\omega)\sqrt{h_4} + \\ + 2\psi(h_4, \omega)(1 + \sqrt{h_4}).$$

Из неравенства (2,22) и леммы 4 (где мы положим $L = \|x_0\| + \|X(t_0, x_0)\| h_4$) следует

$$(2,23) \quad \|\dot{v}^h(t) - X(t, v^h(t))\| \leqq 2\lambda(\|u^h(\mu)\|)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1 + A(L)}\right) + 4w(\omega)\sqrt{h_4} + \\ + 2\psi(h_4, \omega)(1 + \sqrt{h_4}) \leqq 2\lambda(\|v^h(t)\|) - \frac{\lambda(\|u^h(\mu)\|)}{1 + A(L)} + 2\chi(\omega) + 4w(\omega)\sqrt{h_4} + \\ + 2\psi(h_4, \omega)(1 + \sqrt{h_4})$$

для $t \in (t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h})$, где $\chi(\omega) = \max |\lambda(\alpha) - \lambda(\beta)|$ для $|\alpha - \|x_0\|| \leqq \omega$, $|\beta - \|x_0\|| \leqq \omega$. (По лемме 3 имеем $\|u^h(t) - x_0\| \leqq \omega$ для $t \in \langle t_0 - h, t_0 + h + \sqrt{h}\rangle$, а ввиду (2,18) и $\|v^h(t) - x_0\| \leqq \omega$ для $t \in \langle t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h}\rangle$.) Неравенство (2,23) можно продолжить, а именно:

$$(2,24) \qquad \leqq 2\lambda(\|v^h(t)\|) - \frac{\lambda(\|x_0\|)}{1 + A(L)} + \frac{\chi(\omega)}{1 + A(L)} + 2\chi(\omega) + \\ + 4w(\omega)\sqrt{h_4} + 2\psi(h_4, \omega)(1 + \sqrt{h_4}).$$

Наверное будет $\chi(\omega) \to 0$ для $\omega \to 0$. Так как $A(L)$ – неотрицательная функция, все члены этого выражения, начиная с третьего, стремятся к нулю. Наоборот, для достаточно малого h_4 будет $L = \|x_0\| + \|X(t_0, x_0)\| h_4$ меньше, чем, напр., $\|x_0\| + 1$, и следовательно, $A(L) \leqq A(\|x_0\| + 1)$. Итак, для второго члена имеет, очевидно, место (для достаточно малых h_4) неравенство

$$-\frac{\lambda(\|x_0\|)}{1 + A(L)} \leqq -\frac{\lambda(\|x_0\|)}{1 + A(\|x_0\| + 1)} < 0.$$

Для достаточно малых h_4 и ω будут все члены (2,24), начиная с третьего, меньше, чем $\lambda(\|x_0\|)[2 + 2A(\|x_0\| + 1)]^{-1}$, откуда

$$(2,25) \qquad \|\dot{v}^h(t) - X(t, v^h(t))\| \leqq 2\lambda(\|v^h(t)\|) - \frac{1}{2}\frac{\lambda(\|x_0\|)}{1 + A(\|x_0\| + 1)}$$

для $t \in (t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h}$. Так как $v^h(t)$ обладают непрерывными производными всюду кроме конечного числа точек, в которых они имеют производные справа и слева, то будет $v^h(t) \in \mathscr{S}$.

Функции $v^h(t)$ можно использовать при оценке функции $V(t, x)$. Выражение $\varphi(\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\|, \lambda(\|y(t)\|))$ мы будем далее кратко обозначать через $\varphi\{y(t)\}$. В точке $[t_0 + h, q(h)]$ имеем

$$V(t_0 + h, q(h)) \geqq \sup_{\xi \geqq t_0 + h} \|v^h(\xi)\| - \sup_{\eta \geqq t_0 + h} \varphi\{v^h(\eta)\}.$$

В силу неравенства (2,16) будет

$$(2,26) \qquad V(t_0 - h, q(-h)) - V(t_0 + h, q(h)) \leqq h + \sup_{\xi \geqq t_0 - h} \|u^h(\xi)\| -$$
$$- \sup_{\xi \geqq t_0 + h} \|v^h(\xi)\| - \sup_{\eta \geqq t_0 - h} \varphi\{u^h(\eta)\} + \sup_{\eta \geqq t_0 + h} \varphi\{v^h(\eta)\} .$$

По известному неравенству

$$\max(a, c) - \max(b, c) = \max(a - b, 0) = [a - b]^+$$

и ввиду того, что из леммы 3 следует $\|u^h(t) - x_0\| < \omega$ для $t \in \langle t_0 - h, t_0 + h + \sqrt{h}\rangle$ и $\|v^h(t) - x_0\| < \omega$ для $t \in \langle t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h}\rangle$, неравенство (2,26) можно продолжить, а именно

$$(2,27) \quad \leqq h + 2\omega + [\sup_{\eta \in \langle t_0 + h,\, t_0 + h + \sqrt{h}} \varphi\{v^h(\eta)\rangle - \sup_{\eta \in \langle t_0 - h,\, t_0 + h + \sqrt{h}} \varphi\{u^h(\eta)\rangle]^+ .$$

Число η_1 подберем так, чтобы дункция $\varphi\{v^h(\eta)\}$ имела максимум в точке η_1 на интервале $\langle t_0 + h, t_0 + h + \sqrt{h}\rangle$, а число μ возьмем так, как в неравенстве (2,19). Выражение (2,27) оценим

$$\leqq h + 2\omega + [\varphi\{v^h(\eta_1)\} - \varphi\{u^h(\mu)\}]^+ ,$$

а по определению функции φ будет

$$(2,28) \qquad \leqq h + 2\omega +$$
$$+ \frac{|\lambda(\|u^h(\mu)\|) - \lambda(\|v^h(\eta_1)\|)| \cdot \|\dot{v}^h(\eta_1) - X(\eta_1, v^h(\eta_1)\|)}{(2\lambda(\|v^h(\eta_1)\|) - \|\dot{v}^h(\eta_1) - X(\eta_1, v^h(\eta_1))\|)(2\lambda(\|u^h(\mu)\|) - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\|)} +$$
$$+ \frac{2\lambda(\|v^h(\eta_1)\|)}{(2\lambda(\|v^h(\eta_1)\|) - \|\dot{v}^h(\eta_1) - X(\eta_1, v^h(\eta_1))\|)(2\lambda(\|u^h(\mu)\|) - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\|)} \cdot$$
$$\cdot [\|\dot{v}^h(\eta_1) - X(\eta_1, v^h(\eta_1))\| - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\|]^+ .$$

Из леммы 3 следуют важные для дальнейшего соотношения

$$(2,29) \qquad \|v^h(\mu) - x_0\| < \omega, \|v^h(\eta_1) - x_0\| < \omega$$

Первый член в числителе первой дроби $|\lambda(\|u^h(\mu)\|) - \lambda(\|v^h(\eta_1)\|)|$ можно оценить выражением $2\chi(\omega)$. Так как $\chi(\omega) \to 0$ для $\omega \to 0$, достаточно доказать, что остальная часть дроби ограничена. Второй член в числителе (первой дроби) можно согласно (2,25) оценить числом $2\lambda(\|v^h(\eta_1)\|)$ и далее при помощи $2\lambda(\|x_0\|) + 2\chi(\omega)$.

Первую часть знаменателя можно опять-таки, согласно (2,25), оценить снизу выражением $\lambda(\|x_0\|)[2 + 2A(\|x_0\| + 1)]^{-1}$. Вторую часть знаменателя можно оценить снизу при помощи леммы 4 выражением $\lambda(\|u^h(\mu)\|)(1 + A(L))^{-1}$, которое в силу (2,29) можно оценить снизу при покощи выражения $\lambda(\|x_0\|) - \chi(\omega)$. Отсюда видно, что первая дробь стремится к нулю с $\omega \to 0$. У второй дроби можно выражение

$$[\|\dot{v}^h(\eta_1) - X(\eta_1, v^h(\eta_1))\| - \|\dot{u}^h(\mu) - X(\mu, u^h(\mu))\|]^+$$

оценить с помощью (2,22), откуда следует, что этот член стремится к нулю с $\omega \to 0$, $h_4 \to 0$. Ограниченность остальной части второй дроби доказывается также, как и для первой дроби. Итак, мы доказали, что все выражение (2,28) стремится к нулю с $h_4 \to 0$, $\omega \to 0$. Из неравенств (2,26)–(2,28) следует, что выражение $V(t_0 - h, q(-h)) - V(t_0 + h, q(h))$ стремится к нулю, если $h_4 \to 0$, $\omega \to 0$ $(0 < h < h_4)$.

Таким образом лемма 2 доказана и можно перейти к доказательству непрерывности функции $V(t, x)$.

Возьмем точку $[t_0, x_0]$, $x_0 \neq 0$. К любому числу $\varepsilon > 0$ можно по лемме 2 подобрать h_0 так, что (2,8) справедливо для $0 \leqq h \leqq h_0$. Возьмем далее какую-либо точку $[\tau, x]$, $t_0 - h < \tau < t_0 + h$ и положим

$$u(t) = q(-h_0) + (x - q(-h_0)) \frac{t - t_0 + h_0}{\tau - t_0 + h_0} \quad \text{для} \quad t \in \langle t_0 - h_0, \tau \rangle ,$$

$$u(t) = x + (q(h_0) - x) \frac{t - \tau}{t_0 + h_0 - \tau} \quad \text{для} \quad t \in (\tau, t_0 + h_0\rangle$$

Имеем

$$(2,30) \quad \|\dot{u}(t) - X(t, u(t))\| \leqq \|\dot{u}(t) - X(t_0, x_0)\| + \|X(t_0, x_0) - X(t, u(t))\| \leqq$$
$$\leqq \|X(t_0, x_0)\| \frac{|\tau - t_0|}{h_0 - |\tau - t_0|} + \frac{1}{h_0 - |\tau - t_0|} \|x - x_0\| + \|X(t_0, x_0) - X(t, u(t))\|$$

для $t \in \langle t_0 - h, t_0 + h\rangle$. Обозначим через v_1 минимум, а через v_2 максимум чисел $\|q(-h_0)\|$, $\|q(h_0)\|$, $\|x_0\| - \delta$, $\|x_0\| + \delta$. Если взять точку $[\tau, x]$ так, чтобы $\|x - x_0\| < \delta$, $|\tau - t_0| < \delta$ и $\delta > 0$ было настолько малым, что (2,30) (h_0 фиксировано) меньше, чем $\min\limits_{v_1 \leqq \eta \leqq v_2} \lambda(\eta)$, то будет

$$\|\dot{u}(t) - X(t, u(t))\| < \lambda(\|u(t)\|) ;$$

согласно пункту 3 функция $V(t, u(t))$ не возрастает с t, т. е.

$$V(t_0 - h_0, q(-h_0)) = V(t_0 - h_0, u(t_0 - h_0)) \geqq V(\tau, u(\tau)) = V(\tau, x) \geqq$$
$$\geqq V(t_0 + h_0, u(t_0 + h_0)) = V(t_0 + h_0, q(h_0)) .$$

Ввиду неравенства (2,8) будет (предыдущее неравенство справедливо в частности для $[\tau, x] \equiv [t_0, x_0]$)

$$|V(\tau, x) - V(t_0, x_0)| < \varepsilon .$$

Этим самым мы доказали, что в каждой точке $[t_0, x_0]$, $x_0 \neq 0$ функция V непрерывна. В точках $[t_0, 0]$ непрерывность функции V следует из того, что она равномерно ограничена. Итак, теорема 2 доказана.

Далее нам, однако, понадобится утверждение, что условие 3 этой теоремы выполняется и для функций $y(t)$, которые лишь абсолютно непрерывны. Это утверждение выражается следующей леммой.

Лемма 5. *Пусть $V(t, x)$ — функция, построенная в теореме 2; тогда $V(t, y(t))$ — — невозрастающая с t функция, если $y(t)$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению*

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|) \quad \text{почти для всех } t\,,$$

где α — постоянное, $0 < \alpha < 1$.

Доказательство проведем от противного. Пусть существуют числа $t_1 < t_2$ так, что

$$V(t_1, y(t_1)) < V(t_2, y(t_2))\,.$$

Так как $y(t)$ непрерывна, существует $\max\limits_{\langle t_1, t_2\rangle} \|y(t)\| = M$ и, следовательно, почти всюду будет

$$\|\dot{y}(t)\| \leqq \sup_{\substack{\langle t_1, t_2\rangle \\ \|x\| \leqq M}} \|X(t, x)\| + \alpha \sup_{\|x\| \leqq M} \lambda(\|x\|) = K\,.$$

Возьмем число $\varepsilon > 0$ и обозначим $\nu(\varepsilon) = \max \|X(t, x) - X(t, y)\|$ для $\|x - y\| \leqq$ $\leqq 2K\varepsilon$, $\|x\| \leqq L$, $\|y\| \leqq L$, $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, и

$$\psi(\varepsilon) = \max |\lambda(\|x\|) - \lambda(\|y\|)| \quad \text{для} \quad \|x - y\| \leqq 2K\varepsilon,\ \|x\| \leqq L,\ \|y\| \leqq L,$$

где $L = M + 2K(t_2 - t_1)$. Ясно, что $\nu(\varepsilon) \to 0$, $\psi(\varepsilon) \to 0$ для $\varepsilon \to 0$. Для выбранного числа $\varepsilon > 0$ существует открытое множество N такое, что $\dot{y}(t)$ непрерывна на $\langle t_1, t_2\rangle - N$ и что $\mu(N) < \varepsilon$. N состоит из счетного количества интервалов, которые мы обозначим через I_n. Для ε существует $\sigma < \varepsilon$ так, что $\|X(\tau_1, x) -$ $- X(\tau_2, y)\| < \varepsilon$, если $\|x - y\| \leqq 2K\sigma$ и $|\tau_1 - \tau_2| \leqq \sigma$, $\|x\| \leqq L$, $\|y\| \leqq L$, $\tau_1, \tau_2 \in \langle t_1, t_2\rangle$. Разделим теперь интервал I_n при помощи конечного числа точек t_n^i так, чтобы

$$I_n = (t_n^0, t_n^{k_n}),\ t_n^0 < t_n^1 < \ldots < t_n^{k_n},\ t_n^{i+1} - t_n^i < \sigma\,;$$

в t_n^i существует производная $\dot{y}(t)$ и

$$\|\dot{y}(t_n^i) - X(t_n^i, y(t_n^i))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t_n^i)\|)\,.$$

Функцию $\dot{z}(t)$ мы определим так, что $\dot{z}(t) = \dot{y}(t)$ для $t \in \langle t_1, t_2\rangle - N$. $\dot{z}(t_n^i) =$ $= \dot{y}(t_n^i)$ и $\dot{z}(t)$ — линейная на интервалах (t_n^i, t_n^{i+1}) функция. Функция $\dot{z}(t)$ непрерывна. Положим

$$z(t) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t} \dot{z}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Очевидно,

$$\|z(t) - y(t)\| \leqq \min(2K\varepsilon, 2K(t_2 - t_1)) \tag{2,31}$$

а также $\|z(t)\| \leqq L$. Оценим $\|\dot{z}(t) - X(t, z(t))\|$:

1. $t \in \langle t_1, t_2\rangle - N$, тогда

$$\|\dot{z}(t) - X(t, z(t))\| \leqq \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| + \|X(t, y(t)) - X(t, z(t))\| \leqq$$

и ввиду неравенства (2,31) будет

$$\leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|) + \nu(\varepsilon) \leqq \alpha\lambda(\|z(t)\|) + \alpha\psi(\varepsilon) + \nu(\varepsilon) < \lambda(\|z(t)\|),$$

при достаточно малом ε $(\alpha < 1)$.

2. $t \in N$, тогда

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(t_n^i) + \frac{\dot{y}(t_n^{i+1}) - \dot{y}(t_n^i)}{t_n^{i+1} - t_n^i}(t - t_n^i) \quad \text{для} \quad t \in (t_n^i, t_n^{i+1}),$$

и, следовательно,

$$\|\dot{z}(t) - X(t, z(t))\| \leqq \|\dot{z}(t) - X(t_n^i, y(t_n^i))\| + \|X(t_n^i, y(t_n^i)) -$$
$$- X(t, y(t))\| + \|X(t, y(t)) - X(t, z(t))\| \leqq \|\dot{z}(t) - X(t_n^i, y(t_n^i))\| + \varepsilon + \nu(\varepsilon) \leqq$$
$$\leqq \left\|\dot{y}(t_n^i) + \frac{\dot{y}(t_n^{i+1}) - \dot{y}(t_n^i)}{t_n^{i+1} - t_n^i}(t - t_n^i) - X(t_n^i, y(t_n^i))\right\| + \varepsilon + \nu(\varepsilon) \leqq .$$

Далее, согласно неравенству

$$\max_{t_1 \leqq t \leqq t_2} \|a + bt\| \leqq \max(\|a + bt_1\|, \|a + bt_2\|) \quad (a, b \text{ — векторы})$$

имеет место

$$\leqq \max(\|\dot{y}(t_n^i) - X(t_n^i, y(t_n^i))\|, \|\dot{y}(t_n^{i+1}) - X(t_n^i, y(t_n^i))\| + \varepsilon + \nu(\varepsilon) \leqq$$
$$\leqq \max[\alpha\lambda(\|y(t_n^i)\|), \alpha\lambda(\|y(t_n^{i+1})\|) + \varepsilon] + \varepsilon + \nu(\varepsilon) \leqq$$
$$\leqq \max[\alpha\lambda(\|y(t)\| + \alpha\psi(\varepsilon), \alpha\lambda(\|y(t)\|) + \alpha\psi(\varepsilon) + \varepsilon] + \varepsilon + \nu(\varepsilon) =$$
$$= \alpha\lambda(\|y(t)\|) + \alpha\psi(\varepsilon) + 2\varepsilon + \nu(\varepsilon) \leqq \alpha\lambda(\|z(t)\|) + 2\alpha\psi(\varepsilon) + 2\varepsilon + \nu(\varepsilon).$$

Так как $\alpha < 1$, можно взять ε настолько малым, чтобы

$$\|\dot{z}(t) - X(t, z(t))\| < \lambda(\|z(t)\|);$$

итак, имеем

$$V(t_1, z(t_1)) \geqq V(t_2, z(t_2)).$$

Согласно (2,31) $z(t)$ сходятся равномерно к $y(t)$ для $\varepsilon \to 0$. Из предыдущего неравенства следует $V(t_1, y(t_1)) \geqq V(t_2, y(t_2))$, что противоречит предположению.

В дальнейших рассуждениях нам понадобится система функций $y(t)$, которые мы здесь назовем **обобщенными функциями**.

Определение. Пусть дана последовательность конечного числа интервалов (замкнутых) $I_k = \langle t_k^1, t_k^2 \rangle$, $k = 1, \dots n$, $0 \leqq t_k^1 \leqq t_k^2 < \infty$ и один интервал $I_{n+1} = \langle t_{n+1}^1, \infty)$. Тогда $n + 1$ функций $y_k(t)$, каждая из которых определена и абсолютно непрерывна на интервале I_k, мы назовем в их совокупности **обобщенной функцией**. k-м скачком обобщенной функции мы назовем выражение

$$\|y_{k+1}(t_{k+1}^1) - y_k(t_k^2)\| + |t_k^2 - t_{k+1}^1|$$

и обозначим его через $\Delta_k(y)$, $k = 1, 2, \dots n$. Для различных обобщенных функций интервалы I_k могут быть различными, и мы их обозначим через $I_k(y)$. Мы скажем, что обобщенная функция удовлетворяет почти всюду соотношению $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \lambda(\|y(t)\|)$, если $\|\dot{y}_k(t) - X(t, y_k(t))\| \leqq \lambda(\|y_k(t)\|)$ имеет место для каждой функции $y_k(t)$ почти всюду на $I_k(y)$.

Теперь уже можно сформулировать теорему, имеющую, однако, скорее вспомогательный характер.

Теорема 3. *Пусть решение $x \equiv 0$ уравнения (1) глобально устойчиво* ППДВ; *тогда можно найти функцию $\psi(t, x)$, определенную и непрерывную на области $t \geqq 0$, $x \neq 0$ так, что справедливо утверждение:*

Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ так, что для всех обобщенных функций $y(t)$, для которых почти всюду

$$(3{,}1) \quad \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|), \quad \|y(t_1^1)\| < \delta(\varepsilon) \quad и \quad \sum_{k=1}^{n} \psi(t_k^2, y(t_k^2))\, \Delta_k(y) < 1\,,$$

(t_k^2 — концевые точки интервалов $I_k(y)$), имеет место неравенство

$$(3{,}2) \qquad \|y(t)\| < \varepsilon \quad для \quad t \geqq t_0\,.$$

Кроме того, $\delta(\varepsilon) > 0$ можно подобрать к данному $\varepsilon > 0$ так, что $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$.

Доказательство этой теоремы мы снова разделим на несколько лемм. В этих леммах мы будем большей частью рассматривать такие обобщенные функции, которые от обычных функций отличаются лишь тем, что имеют конечное число разрывов. Другими словами, мы будем рассматривать только такие обобщенные функции, у которых $t_k^2 = t_{k+1}^1$ для любого k (t_k^2 — концевая точка интервала I_k, а t_k^1 — начальная точка интервала I_k). Систему таких функций мы обозначим через $\mathscr{M}$. Голоря, что для функции из системы $\mathscr{M}$ выполняется какое-либо неравенство для всех t, мы подразумеваем под этим, что в точках разрыва функции $y(t)$ неравенство справедливо для обоих значений функции.

Лемма 6. *Пусть $0 \leqq T_1 < T_2 < \infty$, $0 < H < \infty$ — какие-либо числа, а $V(t, x)$ — функция, определенная теоремой 2. К любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\sigma > 0$ такое, что для всех функций из системы $\mathscr{M}$, определенных на $\langle T_1, T_2 \rangle$ и удовлетворяющих неравенствам*

$$(3{,}3) \qquad \|y(t)\| \leqq H\,, \quad \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)$$

почти всюду в $\langle T_1, T_2 \rangle$ и $\sum\limits_1^n \Delta_k(y) \leqq \sigma$, имеет место

$$(3{,}4) \quad V(t_2, y(t_2)) \leqq V(t_1, y(t_1)) + \varepsilon \quad для\ любых \quad t_1, t_2 \in \langle T_1, T_2 \rangle,\ t_1 \leqq t_2\,.$$

Доказательство проведем от противного. Пусть существует число $\bar{\varepsilon} > 0$ так, что для каждого $\sigma_n = 2^{-n}$ существует функция $y_{(n)}(t)$ из системы $\mathscr{M}$, удовлетворяющая почти всюду в $\langle T_1, T_2 \rangle$ неравенствам (3,3), причем существует пара чисел $t_n^*, t_n^{**} : t_n^* < t_n^{**}$

$$(3{,}5) \qquad V(t_n^{**}, y_{(n)}(t_n^{**})) > V(t_n^*, y_{(n)}(t_n^*)) + \bar{\varepsilon}\,.$$

Возьмем $T_4 = \liminf_{n\to\infty} t_n^{**}$. Из последовательности выделим подпоследовательность (с тем же обозначением) так, чтобы $t_n^{**} \to T_4$. Далее возьмем $T_3 = \limsup_{n\to\infty} t_n^*$ и снова выделим, не меняя обозначения, подпоследовательность так, чтобы $t_n^* \to T_3$. Ясно, что $T_3 \leqq T_4$. Положим $M \doteq \max \|X(t, x)\|$ для $t \in \langle T_1, T_2 \rangle$, $\|x\| \leqq H$. Из неравенства

$$\|\dot{y}_{(n)}(t) - X(t, y_{(n)}(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y_{(n)}(t)\|)$$

следует

$$\|\dot{y}_{(n)}(t)\| \leqq \|X(t, y_{(n)}(t))\| + \alpha\lambda(\|y_{(n)}(t)\|) \leqq M + U\alpha$$

на интервале $I_k(y_{(n)})$ почти всюду, где $U = \max_{0 \leqq \eta \leqq H} \lambda(\eta)$, и далее на интервале $I_k(y_{(n)})$

$$(3,6) \qquad \|y_{(n)}(t_2) - y_{(n)}(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_{(n)}(\tau)\, d\tau \right\| \leqq (M + U\alpha)\, |t_2 - t_1| \,.$$

Итак, функции $y_{(n)}(t)$ являются липшицевскими на каждом интервале $I_k(y_{(n)})$ с постоянной $M + U\alpha$.

Далее мы определим вспомогательные функции

$$(3,7) \qquad \hat{y}_n(t) = y_{(n)}(t) + \sum_{T_1 \leqq t_k^2 < t} [y_{(n)}(t_k^2 - 0) - y_{(n)}(t_{k+1}^1 + 0)]$$

(t_k^2 — концевые точки интервалов $I_k(y_{(n)})$, которые принадлежат функциям $y_{(n)}(t)$). Функции $\hat{y}_n(t)$ наверное непрерывны, а так как $y_{(n)}(t)$ были липшицевскими на интервалах $I_k(y_{(n)})$, см. (3,6), то и $\hat{y}_n(t)$ будут липшицевскими с той же постоянной

$$(3,8) \qquad \|\hat{y}_n(t_2) - \hat{y}_n(t_1)\| \leqq (M + U\alpha)\, |t_2 - t_1| \,.$$

Из неравенства (3,7) нетрудно вывести

$$(3,9) \qquad \|\hat{y}_n(t) - y_{(n)}(t)\| \leqq \sum_{T_1 \leqq t_k^2 < t} \|y_{(n)}(t_k^2 - 0) - y_{(n)}(t_{k+1}^1 + 0)\| = \sum_{T_1 \leqq t_k^2 < t} \Delta_k(y_{(n)}) \leqq \sigma_n < 1 \,.$$

Функции $\hat{y}_n(t)$, следовательно, равномерно ограничены

$$(3,10) \qquad \|\hat{y}_n(t)\| \leqq H + 1 \,.$$

Итак, из функций $\hat{y}_n(t)$ можно выделить подпоследовательность (не меняя обозначения), которая на интервале $\langle T_1, T_2 \rangle$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $y(t)$ Из неравенства (3,8) следует

$$(3,11) \qquad \|y(t_2) - y(t_1)\| \leqq (M + U\alpha)\, |t_2 - t_1| \,,$$

то есть функция $y(t)$ абсолютно непрерывна. Далее имеем

$$(3,12) \qquad \|y(t) - y_{(n)}(t)\| \leqq \|y(t) - \hat{y}_n(t)\| + \|\hat{y}_n(t) - y_{(n)}(t)\| \leqq \leqq \|y(t) - \hat{y}_n(t)\| + \sum \Delta_k(y_{(n)}) \leqq \|y(t) - \hat{y}_n(t)\| + \frac{1}{2^n}.$$

Из этого неравенства следует, что функции $y_{(n)}(t)$ сходятся равномерно к $y(t)$. Так как $t_n^* \to T_3$ и $t_n^{**} \to T_4$, отсюда и из (3,5) следует

$$V(T_4, y(T_4)) \geqq V(T_3, y(T_3)) + \bar{\varepsilon}\,. \tag{3,13}$$

С другой стороны, однако, мы предполагаем, что функции $y_{(n)}(t)$ удовлетворяют соотношению (3,3), то есть, что в каждом интервале $I(y_{(n)})$ выполняется почти всюду неравенство

$$\|\dot{y}_{(n)}(t) - X(t, y_{(n)}(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y_{(n)}(t)\|)\,.$$

Так как

$$y_{(n)}(t_2 - 0) - y_{(n)}(t_1 - 0) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_{(n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \tag{3,14}$$
$$+ \sum_{t_1 \leqq t_k^2 < t_2} [y_{(n)}(t_{k+1}^1 + 0) - y_{(n)}(t_k^2 - 0)]\,,$$

то в силу (3,14) будет

$$\|y_{(n)}(t_2 - 0) - y_{(n)}(t_1 - 0) - \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, y_{(n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\| \leqq$$
$$\leqq \left\|\int_{t_1}^{t_2} [\dot{y}_{(n)}(\tau) - X(\tau, y_{(n)}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\right\| + 2^{-n} \leqq \int_{t_1}^{t_2} \alpha\lambda(\|y_{(n)}(\tau)\|)\,\mathrm{d}\tau + 2^{-n}\,.$$

Так как функции $y_{(n)}(t)$ сходятся равномерно к $y(t)$ на интервале $\langle T_1, T_2\rangle$, в предыдущем неравенстве можно перейти к пределу для $n \to \infty$ и получить

$$\|y(t_2) - y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \alpha\lambda(\|y(\tau)\|)\,\mathrm{d}\tau$$

для любых двух точек $T_1 \leqq t_1 < t_2 \leqq T_2$. Ввиду (3,11) функция $y(t)$ абсолютно непрерывна и для любого t, при котором $y(t)$ имеет производную, можно вывести

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)\,.$$

По лемме 5 функция $V(t, y(t))$ не возрастает с t, что противоречит неравенству (3,13). Неравенство (3,4) доказано. ∎

Лемма 7. *Пусть $0 < c < \infty$, $0 \leqq t < \infty$ — какие-либо числа. К этим двум числам можно подобрать числа $\Delta t > 0$, $\sigma > 0$ так, что для всех функций из системы $\mathscr{M}$, для которых справедливо утверждение: существует τ так, что*

$$\|y(\tau)\| \leqq c\,, \quad \tau \in \langle t - \Delta t, t + \Delta t\rangle\,,$$
$$\|\dot{y}(\xi) - X(\xi, y(\xi))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(\xi)\|) \tag{3,15}$$

почти всюду и $\sum \Delta_k(y) < \sigma$, имеет место соотношение

$$\|y(\xi)\| < c + 1 \quad \textit{для} \quad \xi \in \langle \tau, t + \Delta t\rangle\,. \tag{3,16}$$

Доказательство. Возьмем $M = \max \|X(\xi, x)\|$ для $\xi \in \langle t-1, t+1\rangle$, $\|x\| \leqq c+1$. Числа Δt, σ подберем так, чтобы

$$(3{,}17) \qquad 2(\alpha Z + M)\,\Delta t + \sigma < 1, \Delta t < 1, \quad \text{где} \quad Z = \max_{0 \leqq \eta \leqq c+1} \lambda(\eta)\,.$$

Докажем, что эти числа удовлетворяют требованиям леммы 7. Допустим противное: пусть существует функция $y(\xi)$ из $\mathscr{M}$, для которой почти всюду справедливо (3,15), существует число τ такое, что $\tau \in \langle t - \Delta t, t + \Delta t\rangle$ $\|y(\tau)\| \leqq c$, причем существует $\tau^* \in (\tau, t + \Delta t\rangle$ такое, что

$$(3{,}18) \qquad \max\left(\|y(\tau^* - 0)\|, \|y(\tau^* + 0)\| \geqq c + 1\,.\right.$$

Пусть $\bar{\tau}$ — инфимум таких чисел. Если $\bar{\tau}$ лежит внутри какого-либо $I(y)$, должно быть

$$(3{,}19) \qquad \|y(\bar{\tau})\| = c + 1\,.$$

Если же $\bar{\tau}$ — правая крайняя точка $I_k(y)$, то должно быть

$$(3{,}20) \qquad \|y(\bar{\tau} - 0)\| + \Delta_k y \geqq c + 1\,.$$

Далее имеем

$$(3{,}21) \qquad \|y(\xi)\| < c + 1 \quad \text{для} \quad \tau \leqq \xi < \bar{\tau}\,,$$

и будет, очевидно, $t - \Delta t < \bar{\tau} \leqq t + \Delta t$, $\bar{\tau} > \tau$. Ввиду неравенства (3,15) почти всюду будет

$$\|\dot{y}(\xi)\| \leqq \|X(\xi, y(\xi))\| + \alpha\lambda(\|y(\xi)\|)\,.$$

Ввиду определения M, Z и (3,21) имеем $\|\dot{y}(\xi)\| \leqq M + Z\alpha$ для почти всех $\xi \in \langle \tau, \bar{\tau}\rangle$. Далее, ввиду равенства (3,14) будет

$$\|y(\bar{\tau} - 0)\| \leqq \|y(\tau - 0)\| + (M + Z\alpha)(\bar{\tau} - \tau) + \sum \Delta_k(y) \leqq c + \\ + 2(M + Z\alpha)\,\Delta t + \sigma < c + 1\,.$$

Если $\bar{\tau}$ лежит внутри некоторого интервала $I_k(y)$, то это неравенство противоречит (3,19)

Пусть $\bar{\tau}$ — правая крайняя точка какого-либо интервала $I_k(y)$; тогда ввиду (3,14) будет

$$\|y(\bar{\tau} - 0)\| + \Delta_k(y) \leqq \|y(\tau - 0)\| + (M + Z\alpha)(\bar{\tau} - \tau) + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_i(y) + \Delta_k(y) \leqq c + 2(M + Z\alpha)\,\Delta t + \sigma < c + 1\,.$$

Это неравенство противоречит (3,20), чем и доказывается лемма 7.

Из лемм 6 и 7 мы теперь выведем следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть $d > 0$ — какое-либо число. К каждому числу $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}d$, можно найти последовательность чисел $\sigma_n > 0$ так, что для всех функций из системы $\mathscr{M}$, для которых почти всюду справедливо*

$$(3{,}22) \quad \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)\,, \; U_2(\|y(t_1^1)\|) \leqq d - \varepsilon \; \text{и} \sum_{n \leqq t_i^2 \leqq n+1} \Delta_i(y) \leqq \sigma_n\,,$$

(о функции U_2 см. теорему 2),

имеет место

$$\|y(t)\| < d \quad \textit{для} \quad t \geqq t_1^1 . \tag{3,23}$$

Доказательство: Согласно лемме 7 (если положить $c = d$) для каждого $t \geqq 0$ существует окрестность $(t - \Delta t, t + \Delta t)$ и число σ с указанными там свойствами. Эти окрестности образуют покрытие полупрямой $\langle 0, \infty)$, и из ницх можно выделить счетное число окрестностей (мы их обозначим через J_k, а соответственное σ обозначим через σ_k^1) так, что каждое компактное подмножество $\langle 0, \infty)$ покрывается лишь конечным числом окрестностей J_k. Возьмем числа $\varepsilon_k > 0$ так, чтобы $\sum \varepsilon_k = \varepsilon$. По лемме 6 (где мы возьмем $(T_1, T_2) = J_k, H = d + 1$), можно найти число $\sigma_k^2 \leqq \sigma_k^1$ так, что из (3,3) следует (3,4) (где вместо ε возьмем ε_k). Докажем теперь утверждение:

Если обобщенная функция из системы $\mathscr{M}$ удовлетворяет почти всюду неравенствам

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|),\ U_2(\|y(t_1^1)\|) \leqq d - \varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_{t_s^2 \in J_k} \Delta_s(y) \leqq \sigma_k^2 , \tag{3,24}$$

то $\|y(t)\| < d$ для $t \geqq t_1^1$.

Возьмем первый интервал J_s, содержащий t_1^1. Согласно лемме 7, с учетом (3,24), $\sigma_s^2 \leqq \sigma_s^1$ и в силу выбора числа σ_s^1 имеет место $\|y(t)\| < d + 1$ для $t \in J_s$, $t \geqq t_1^1$. Итак, по лемме 6 будет

$$\|y(t)\| \leqq V(t, y(t)) \leqq V(t_1^1, y(t_1^1)) + \varepsilon_1 \leqq U_2(\|y(t_1^1)\|) + \varepsilon_1 \leqq d - \varepsilon + \varepsilon_1 < d$$

для всех $t \in J_s$, $t \geqq t_1^1$. Аналогичное рассуждение проведем для интервала J_{s+1}. Так как $J_s \cap J_{s+1} \neq 0$, существует τ так, что $\|y(\tau)\| < d$, $\tau \in J_{s+1}$. В силу неравенства

$$\sum_{t_k^2 \in J_{s+1}} \Delta_s(y) \leqq \sigma_{s+1}^2 \leqq \sigma_{s+1}^1$$

мы получим согласно лемме 7

$$\|y(t)\| < d + 1 \quad \text{для} \quad t \geqq \tau,\ t \in J_{s+1} ,$$

а согласно лемме 6 будет

$$\|y(t)\| \leqq V(t, y(t)) \leqq V(\tau, y(\tau)) + \varepsilon_2 \leqq V(t_1^1, y(t_1^1)) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqq$$
$$\leqq U_2(\|y(t_1^1)\|) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqq d - \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < d \quad \text{для} \quad t \in J_{s+1},\ t \geqq \tau .$$

Это рассуждение можно провести для всех интервалов J_k, $k = s, s + 1, s + 2, \ldots$. В качестве числа σ_n возьмем наименьшее из всех чисел σ_k^2, соответствующих интервалам J_k, которые покрывают интервал $\langle n, n + 1\rangle$. Этим и завершается доказательство леммы 8.

В следующей лемме мы используем обобщенные функции так, как они были введены в определении 5.

Лемма 9. *Пусть дано число* $d > 0$. *Для каждого* $\varepsilon > 0, 0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{4}d$, *существует последовательность чисел* σ_n *так, что для обобщенных функций* $y(t)$, *для которых почти всюду справедливо*

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|) , \quad U_2(\|y(t_1^1)\|) \leqq d - 2\varepsilon , \quad \sum_{n \leqq t_k^2 \leqq n+1} \Delta_k(y) \leqq \sigma_n ,$$

имеет место неравенство

$$\|y_s(t)\| < d \quad \textit{для} \quad t \in I_s(y), \quad s = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Возьмем некоторую фиксированную последовательность $\sigma_n^{(2)}$, где $\sigma_n^{(1)}$ — последовательность, выбранная по лемме 8. Числа $\sigma_n^{(2)}$ должны выполнять условия

$$(3{,}25) \qquad \sigma_n^{(2)} < \tfrac{1}{2}, \left(M_n + \alpha\lambda(d) + 1\right)\left(\sigma_{n-1}^{(2)} + \sigma_n^{(2)} + \sigma_{n+1}^{(2)}\right) < \min\left(\sigma_n^{(1)}, r\right),$$

где $r > 0$ удовлетворяет условию: если $U_2(\Theta) \leqq d - 2\varepsilon$, то $U_2(\Theta + r) \leqq d - \varepsilon$ и $M_n = \max \|X(t, x)\|$ для $\|x\| \leqq d + 1$, $n - 1 \leqq t \leqq n + 2$. Докажем от противного, что последовательность $\sigma_n^{(2)}$ удовлетворяет условиям леммы 9. Итак, пусть существует обобщенная функция $y(t)$, удовлетворяющая условиям леммы 9, причем однако

$$(3{,}26) \qquad \max\left(\|y_k(t^* - 0)\|, \|y_k(t^* + 0)\|\right) \geqq d.$$

Не меняя обозначений, выберем число t^* так, чтобы оно попало в интервал $I_k(y)$ с наименьшим индексом и имело в этом интервале наименьшее значение. Далее рассмотрим $y(t)$, определенные только на интервалах $I_1, I_2, \ldots\ I_k = \langle t_k^1, t^* \rangle$, в которых $\|y_l(t)\| < d$ для $l = 1, \ldots k - 1$ и для $t \in I_k(y)$, $t < t^*$. Обобщенную функцию $y(t)$ мы будем аппроксимировать некоторой функцией $\hat{y}(t)$ из системы $\mathscr{M}$. Изменим прежде всего интервалы определения I_k обобщенной функции $y(t)$. Положим $J_k = \langle t_k^1, \infty)$. Если пересечение I_{k-1} с J_k пусто, то положим

$$J_{k-1} = \langle t_{k-1}^1, \varrho_{k-1} \rangle, \ \varrho_{k-1} \geqq t_{k-1}^2$$

так, чтобы J_{k-1} имел непустое пересечение с J_k. В случае, если уже I_{k-1} имеет непустое пересечение с J_k, положим $J_{k-1} = I_{k-1}$. Аналогично, если $I_l \cap \bigcup_{s=l+1}^{k} J_s = \emptyset$, то положим $J_l = \langle t_l^1, \varrho_l \rangle$, $\varrho_l \geqq t_l^2$ так, чтобы было $J_l \cap \bigcup_{s=l+1}^{k} J_s \neq \emptyset$. Если же $I_l \cap \bigcup_{s=l+1}^{k} J_s \neq \emptyset$, то положим $J_l = I_l$. Теперь к каждому $t \in \bigcup_{l=1}^{k} J_l$ подберем наибольший индекс l такой, что $t \in J_l$. Если одновременно будет $t \in I_l$, то положим

$$(3{,}27) \qquad \hat{y}(t) = y_l(t).$$

Если же $t \notin I_l = \langle t_l^1, t_l^2 \rangle$, то должно быть $t > t_l^2$, и мы положим

$$(3{,}28) \qquad \hat{y}(t) = x(t),$$

где $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее равенству $x(t_l^2) = \hat{y}(t_l^2)$. Функция $\hat{y}(t)$ теперь определена на некоторой полупрямой $\bigcup_{s=1}^{k} J_s \subset \langle 0, \infty)$ и имеет лишь конечное число разрывов первого рода. Мы видим, что она принадлежит системе $\mathscr{M}$. Точки разрыва функции $\hat{y}(t)$ мы обозначим через $\hat{t}_k$.

Пусть $\hat{t}_k \in \langle n, n + 1 \rangle$; дадим оценку $\Delta_k(\hat{y})$. Докажем неравенство

$$\Delta_k(\hat{y}) \leqq (M_n + \alpha\lambda(d) + 1) \sum \Delta_p(y) . \tag{3,29}$$

Суммирование в правой части производится по следующим индексам p: Пусть $(\hat{t}_k - \zeta, \hat{t}_k + \zeta)$ – достаточно малый интервал, содержащий точку $\hat{t}_k$. Если $\hat{y}(t) = y_{n_1}(t)$ (см. (3,27)) или $\hat{y}(t) = x(t)$ (см. (3,28)), где $x(t)$ является продолжением $y_{n_1}(t)$ для $t \in (\hat{t}_k - \zeta, \hat{t}_k)$ и если $\hat{y}(t) = y_{n_2}(t)$ для $t \in (\hat{t}_k, \hat{t}_k + \zeta)$, то $p = n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2 - 1$. Ввиду первого неравенства (3,25) точки t_p^2, $p = n_1, \ldots, n_2 - 1$ не могут лежать вне интервала $\langle n - 1, n + 2 \rangle$. В силу определения $\hat{y}(t)$ точки $\hat{t}_k$ не могут быть в интервале (t^*, ∞), значит, $\|y(t)\| < d$.

Для доказательства неравенства (3,29) нам понадобится следующее вспомогательное неравенство:

$$\begin{aligned} \|y(\tau_2 + 0) - y(\tau_1 - 0)\| \leqq {} & (M_n + \alpha\lambda(d) + 1) \sum \Delta_p(y) + \\ & + (M_n + \alpha\lambda(d))(\tau_2 - \tau_1) , \end{aligned} \tag{3,29$_1$}$$

где $\tau_1, \tau_2 \in \langle n, n + 1 \rangle$, $\tau_1 \leqq \tau_2$. Притом мы снова предполагаем, что суммирование производится по индексам $p = n_1, \ldots n_2 - 1$, где (как и выше) n_1 найдено так, что $\hat{y}(t) = y_{n_1}(t)$ в малой окрестности слева от точки τ_1 (или $\hat{y}(t) = x(t)$, где $x(t)$ является продолжением $y_{n_1}(t)$), а n_2 найдено так, что $\hat{y}(t) = y_{n_2}(t)$ в малой окрестности справа от точки τ_2. Далее мы еще предполагаем, что для всех t_p^1, $p = n_1 + 1, \ldots, n_2$ имеет место $t_p^1 \geqq \tau_1$. Здесь, как и выше, точки t_p^2 лежат в интервале $\langle n - 1, n + 2 \rangle$.

Доказательство неравенства (3,29$_1$) мы проведем индукцией по числу скачков, фигурирующих в сумме неравенства (3,29$_1$). В случае $n_1 = n_2 - 1$ (т. е. при наличии одного скачка) справедливость неравенства (3,29$_1$) очевидна. Сформулируем теперь условие индукции: неравенство (3,29$_1$) справедливо, если сумма распространяется на q членов и если докажем, что оно справедливо и для суммы $q + 1$ членов. Итак, предположим, что $n_2 - n_1 = q + 1$. Возьмем первую точку интервала $J_{n_2 - 1}$, то есть $t_{n_2-1}^1$. По условию индукции будет $t_{n_2-1}^1 \geqq \tau_1$.

Разделим теперь доказательство на две части:

1. $t_{n_2-1}^1 \leqq t_{n_2}^1$ $(\tau_2 \in I_{n_2} \subset J_{n_2})$.

Так как для точек $y(\tau_1 - 0)$, $y(t_{n_2-1}^1)$ условия индукции выполняются, будет

$$\begin{aligned} \|y(t_{n_2-1}^1) - y(\tau_1 - 0)\| \leqq {} & (M_n + \alpha\lambda(d) + 1) \sum_{p=n_1}^{n_2-2} \Delta_p(y) + \\ & + (M_n + \alpha\lambda(d))(t_{n_2-1}^1 - \tau_1) . \end{aligned} \tag{3,29$_2$}$$

Для точек $y(t_{n_2-1}^1)$, $y(\tau_2 + 0)$ условия индукции также выполняются. Так как

$\tau_1 \leqq t^1_{n_2-1} \leqq \tau_2$, из неравенства $(3{,}29_2)$ и подобного же неравенства для $y(t^1_{n_2-1})$, $y(\tau_2 + 0)$ нетрудно получить требуемое неравенство $(3{,}29_1)$ для $q + 1$.

2. $t^1_{n_2-1} > t^1_{n_2}$.

Как и выше, справедливо $(3{,}29_2)$. Для $\|y(\tau_2 + 0) - y(t^1_{n_2-1})\|$ нам придется, однако, использовать более точную оценку, а именно

$$(3{,}29_3) \qquad \|y(\tau_2 + 0) - y(t^1_{n_2-1})\| \leqq \Delta_{n_2-1}(y) + (M_n + \alpha\lambda(d)\,\Theta + \\ + (M_n + \alpha\lambda(d))(\tau_2 - t^1_{n_2}), \quad \text{где} \quad \Theta = t^2_{n_2-1} - t^1_{n_2-1}.$$

При выводе неравенства нужно воспользоваться тем обстоятельством, что

$$\|\dot{y}(t)\| \leqq \|X(t, y(t))\| + \alpha\lambda(\|y(t)\|) \leqq M_n + \alpha\lambda(d).$$

В силу неравенств $(3{,}29_2)$, $(3{,}29_3)$ имеем

$$\|y(\tau_2 + 0) - y(\tau_1 - 0)\| \leqq \|y(\tau_2 + 0) - y(t^1_{n_2-1})\| + \|y(t^1_{n_2-1}) - y(\tau_1 - 0)\| \leqq \\ \leqq \Delta_{n_2-1}(y) + (M_n + \alpha\lambda(d))\,\Theta + (M_n + \alpha\lambda(d))(\tau_2 - t^1_{n_2}) + (M_n + \alpha\lambda(d) + 1)\,. \\ .\sum_{p=n_1}^{n_2-2} \Delta_p(y) + (M_n + \alpha\lambda(d))(t^1_{n_2-1} - \tau_1) \leqq (M_n + \alpha\lambda(d) + 1)\sum_{p=n_1}^{n_2-2} \Delta_p(y) + \\ + \Delta_{n_2-1}(y) + (M_n + \alpha\lambda(d))\,|\Delta t_{n_2-1}| + (M_n + \alpha\lambda(d))(\tau_2 - \tau_1) \leqq \\ \leqq (M_n + \alpha\lambda(d) + 1)\sum_{p=n_1}^{n_2-1} \Delta_p(y) + (M_n + \alpha\lambda(d))(\tau_2 - \tau_1).$$

При выводе этих неравенств используется еще то обстоятельство, что

$$\Theta + (t^1_{n_2-1} - t^1_{n_2}) = t^2_{n_2-1} - t^1_{n_2} = |\Delta t_{n_2-1}|$$

является временной длиной скачка $\Delta_{n_2-1}(y)$ и что по определению скачка $|\Delta t_{n_2-1}| \leqq \Delta_{n_2-1}(y)$.

Таким образом мы доказали неравенство $(3{,}29_1)$. В силу определения функции $\hat{y}(t)$ в неравенстве (3,29) должно быть $t^1_p \geqq \hat{t}_k$ для $p = n_1 + 1, \ldots, n_2$ и неравенство (3,29) следует из $(3{,}29_1)$ предельным переходом $\tau_1 \to \hat{t}_k$, $\tau_2 \to \hat{t}_k$. Возьмем теперь все $\hat{t}_k \in \langle n, n + 1\rangle$ и сделаем оценку

$$(3{,}30) \qquad \sum_{\hat{t}_k \in \langle n,n+1\rangle} \Delta_k(\hat{y}) \leqq (M_n + \alpha\lambda(d) + 1)\sum \Delta_p(y)\,;$$

притом мы суммируем по индексам, которые определяются аналогично предыдущим случаям. И здесь согласно первому неравенству (3,25) все t^2_p, рассматриваемые в (3,30), должны лежать в интервале $\langle n - 1, n + 2\rangle$, а $\hat{t}_k$ не могут быть в интервале (t^*, ∞) (по определению $\hat{y}(t)$). Неравенство (3,30) можно продолжить (см (3,25)); тогда получим

$$(3{,}31) \qquad \sum_{\hat{t}_k \in \langle n,n+1\rangle} \Delta_k(\hat{y}) \leqq (M_n + \alpha\lambda(d) + 1)\sum \Delta_p(y) \leqq \\ \leqq (M_n + \alpha\lambda(d) + 1)(\sigma^{(2)}_{n-1} + \sigma^{(2)}_n + \sigma^{(2)}_{n+1}) \leqq \sigma^{(1)}_n\,.$$

Наверное имеет место соотношение

$$\|\hat{y}(t^1_1) - y(t^1_1)\| \leqq \sum_{t_k^2 \in \langle s-1,s+2\rangle} \Delta_k(y) \leqq (M_s + \alpha\lambda(d) + 1)(\sigma^{(2)}_{s-1} + \sigma^{(2)}_s + \sigma^{(2)}_{s+1}) \leqq r\,,$$

где $t_1^1 \in \langle s, s+1 \rangle$, а согласно второму неравенству в (3,25) тогда будет

$$U_2(\|\hat{y}(t_1^1)\|) \leqq d - \varepsilon .$$

Пользуясь леммой 8 (см (3,31)), получим

$$\|\hat{y}(t)\| < d \quad \text{для} \quad t \in \langle t_1^1, t^* \rangle ;$$

это неравенство противоречит, однако, предположению (3,26) (согласно (3,27) $y_k(t^*) = \hat{y}(t^*)$).

Доказательство теоремы 3. Возьмем теперь последовательность чисел $d_m = 2^m$. По лемме 9 (мы берем $\varepsilon_m = \frac{1}{4}d_m$) мы знаем, что существуют последовательности σ_n^m (возьмем $\sigma_n^m < 2^{m-2}$) так, что для обобщенных функций, для которых почти всюду

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|), \quad U(\|y(t_1^1)\|) \leqq d_{m-1}, \sum_{n \leqq t_k^2 \leqq n+1} \Delta_k(y) \leqq \sigma_n^m ,$$

имеет место $\|y_l(t)\| < d_m$ для всех t, l. Каждому числу σ_n^m поставим в соответствие область

$$G_n^m = E(t, x; n \leqq t \leqq n + 1, d_{m-2} \leqq \|x\| \leqq d_m)$$

Функцию $\psi(t, x)$ возьмем так, чтобы она была непрерывной в области $t \geqq 0$, $x \neq 0$ и чтобы $\psi(t, x) > 1/\sigma_n^m$ в G_n^m.

Теперь остается доказать, что из предположений

$$(3,32) \qquad \|y(t_1^1)\| \leqq d_{m-1}, \sum_k \psi(t_k^2, y_k(t_k^2)) \Delta_k(y) < 1 ,$$
$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)$$

почти всюду, следует $\|y_l(t)\| < d_m$ Исходим из противного. Пусть существует обобщенная функция $y(t)$, удовлетворяющая соотношению (3,32), причем, однако, существует t^{**} так, что

$$(3,33) \qquad \|y_l(t^{**})\| \geqq d_m$$

(не меняя обозначений мы и здесь подберем t^{**} так, чтобы оно входило в интервал с наименьшим индексом и имело в этом интервале наименьшее значение). Итак, последний интервал будет $I_k = \langle t_k^1, t^{**} \rangle$. Далее мы можем еще выбрать индекс s и число $t^* \in I_s(y)$ так, чтобы было

$$(3,34) \qquad d_m \geqq \|y_l(t)\| \geqq d_{m-2} \quad \text{для} \quad l = s+1, .., k \quad \text{и для} \quad l = s, t \geqq t^*$$
$$\text{и} \quad \|y_s(t^*)\| \leqq d_{m-1} .$$

Из второго неравенства (3,32) следует

$$\sum_{n \leqq t_k^2 \leqq n+1} \psi(t_k^2, y_k(t_k^2)) \Delta_k(y) < 1 .$$

По определению функции $\psi(t, x)$ и согласно (3,34) имеем $\sum_{n \leqq t_k^2 \leqq n+1} \Delta_k(y) \leqq \sigma_n^m$, а пользуясь леммой 9 получим $\|y_l(t)\| < d_m$ и, в частности, $\|y_k(t^{**})\| < d_m$.

Последнее неравенство противоречит предположению (3,33), чем и доказывается теорема 3.

При помощи теоремы 3 уже нетрудно построить локально липшицевскую функцию Ляпунова.

Теорема 4. *Пусть решение* $x \equiv 0$ *уравнения* (1) *глобально устойчиво* ППДВ. *Тогда существует функция* $V(t, x)$ *локально липшицевская в области* $t \geqq 0$, $x \neq 0$ *такая, что*

1. $V(t, x) \geqq \|x\|$,
2. $V(t, x)$ *допускает бесконечно малый высший предел,*
3. $V(t, y(t))$ — *невозрастающая с* t *функция, если* $y(t)$ *является абсолютно непрерывной функцией, для которой почти всюду*

$$\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \tfrac{1}{2}\alpha\lambda(\|y(t)\|)\,,$$

где α *есть число,* $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Функцию $V(t, x)$ мы построим так:

$$V(t, x) = \sup_{\substack{y(\xi)\\ y(t_1{}^1) = x}} \{[\sup_{\substack{\xi \in \Sigma I_k(y)\\ k}} \|y(\xi)\| - \sup_{\substack{\eta \in \Sigma I_k(y)\\ k}} \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\|\,, \tag{4,1}$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha\lambda(\|y(t)\|))] \cdot [1 - \sum_1^n \psi(t_k^2, y(t_k^2))\,\Delta_k(y)]^+\}\,,$$

где первый супремум берем из множества всех обобщенных функций, для которых $t_1^1 = t$. Выражение $\|y(\xi)\|$ означает $\max \|y_l(\xi)\|$ для всех l, для которых $\xi \in I_l(y)$, и t_k^i являются крайними точками интервалов $I_k(y)$.

1. Множество обобщенных функций, по которому мы берем выше супремум непусто. В качестве $y(\xi)$ можно взять решение уравнения (1), $x(t) = x$, отсюда следует $V(t, x) \geqq \|x\|$.

2. Для обобщенных функций, для которых выражение (4,1) имеет смысл, должны выполняться неравенства

$$\sum \psi(t_k^2, y(t_k^2))\,\Delta_k(y) < 1,\ \|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)\,;$$

в силу теоремы 3 функция $V(t, x)$ будет существовать и допускает бесконечно малый высший предел.

3. Так же, как и в теореме 2, докажем, что функция $V(t, y(t))$ будет невозрастающей с t функцией, если $y(t)$ удовлетворяет условиям пункта 3 теоремы 4.

4. Пусть $[t_0, x_0]$, $x \neq 0$ — какая-либо точка. Возьмем ε-окрестность Ω этой точки так, что $\varepsilon < \|x_0\|$. Положим $M = \max \psi(t, x)$, $[t, x] \in \Omega$. Пусть $[t_1, x_1] \in \Omega$ и $[t_2, x_2] \in \Omega$. Для любого $\eta > 0$ существует обобщенная функция $y(t)$ такая, что имеет место $t_1^1 = t_1$, $y_1(t_1^1) = x_1$,

$$V(t_1, x_1) - \{[\sup_{\xi \in \sum_1^n I_k} \|y(\xi)\| - \sup_{\eta \in \sum_1^n I_k} \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\|\,, \tag{4,2}$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha\lambda(\|y(\eta)\|))] \cdot [1 - \sum_1^n \psi(t_k^2, y(t_k^2))\,\Delta_k y]^+\} < \eta\,.$$

Дадим определение обобщенной функции $z(t)$: Пусть интервалами определения обобщенной функции $y(t)$ будут $I_1, \ldots, I_n$. Интервалами определения обобщенной функции $z(t)$ будут $I_0 = \langle t_2, t_2 \rangle$ (вырожденный интервал), $I_1, \ldots, I_n$; положим $z(t_2) = x_2$, $z(t) = y(t)$ для $t \in I_k$, $k = 1, \ldots, n$. Очевидно, будет

$$V(t_2, x_2) \geqq \{ \sup_{\xi \in \sum_0^n I_k} \|z(\xi)\| - \sup_{\eta \in \sum_0^n I_k} \varphi(\|\dot{z}(\eta) - X(\eta, z(\eta))\| ,$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha\lambda(\|z(\eta)\|))] \cdot [1 - \sum_0^n \psi(t_k^2, z(t_k^2)) \Delta_k(z)]^+\} .$$

Ввиду (4,2) имеет место $\varphi\{y(\eta)\} = \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(\eta, y(\eta))\|, \frac{1}{2}\alpha\lambda(\|y(\eta)\|))$,

$$(4,3) \qquad V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq [\sup \|y(\xi)\| - \sup \varphi\{y(\eta)\}] \cdot$$
$$[1 - \sum_1^n \psi(t_k^2, y(t_k^2)) \Delta_k(y)]^+ - [\sup \|z(\xi)\| - \sup \varphi\{z(\eta)\}] \cdot$$
$$\cdot [1 - \sum_0^n \psi(t_k^2, z(t_k^2)) \Delta_k(z)]^+ + \eta .$$

Очевидно, будет $\sup \|z(\xi)\| \geqq \sup \|y(\xi)\|$ и $\varphi\{y(\eta)\} = \varphi\{z(\eta)\}$.

Неравенство (4,3) можно, следовательно, продолжить и мы получим

$$\leqq [\sup \|y(\xi)\| - \sup \varphi\{y(\eta)\}] \cdot [\sum_0^n \psi(t_k^2, z(t_k^2)) \Delta_k(z) - \sum_1^n \psi(t_k^2, y(t_k^2)) \cdot \Delta_k(y)] + \eta .$$

В силу определения функции $z(t)$ будет $\Delta_l(z) = \Delta_l(y)$ для $l = 1, \ldots, n$ и $\Delta_0(z) = \|x_2 - x_1\| + |t_2 - t_1|$ и, следовательно,

$$\leqq \sup \|y(\xi)\| \cdot M(\|x_2 - x_1\| + |t_2 - t_1|) + \eta \leqq AM(\|x_2 - x_1\| + |t_2 - t_1| + \eta .$$

Дело в том, что по теореме 3 имеем $\|y(\xi)\| \leqq A$, если $\|y_1(t_1^1)\| < \delta_1(A)$. Так как число η было произвольно,

$$V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2) \leqq AM(\|x_2 - x_1\| + |t_2 - t_1|) .$$

Так как точки $[t_1, x_1]$ и $[t_2, x_2]$ можно поменять местами, будет

$$|V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)| \leqq AM(\|x_2 - x_1\| + |t_2 - t_1|) ,$$

чем и доказывается теорема 4.

Подобно тому, как и в работе [5], можно при помощи сформулированных и доказанных в ней теорем об аппроксимировании и сглаживании построить функцию $V^*(t, x)$, обладающую частными производными всех порядков по всем переменным, глобально положительно определенную допускает бесконечно малый высший предел и невозрастающую вдоль абсолютно непрерывных функций, для которых $\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| \leqq \frac{1}{2}\alpha'\lambda(\|y(t)\|)$. При доказательстве теоремы об аппроксимировании и сглаживании необходимо несколько уменьшить функцию $\frac{1}{2}\alpha\lambda(\|y(t)\|)$, а именно так, что мы взяли меньшее значение коэффициента α'. Достаточно доказать, что эта функция удовлетворяет условиям 3 теоремы 1.

Возьмем какую-либо точку $[t_0, x_0]$ и предположим, что

$$\sum\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_i}\right)^2 > 0 .$$

Возьмем далее линейную функцию

$$y(t) = \left\{X(t_0, x_0) + [\tfrac{1}{2}\alpha\lambda(\|x_0\|) - \mu] \cdot \left[\sum_1^n \left(\frac{\partial V^*}{\partial x_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial V^*}{\partial x}\right\}(t - t_0) + x_0 .$$

Для функции $y(t)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}\|\dot{y}(t) - X(t, y(t))\| &\leqq \|\dot{y}(t) - X(t_0, x_0)\| + \|X(t_0, x_0) - X(t, y(t))\| = \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha'\lambda(\|x_0\|) - \mu + \|X(t_0, x_0) - X(t, y(t))\| < \tfrac{1}{2}\alpha'\lambda(\|y(t)\|)\end{aligned}$$

на достаточно малом интервале $\langle t_0, t_0 + h\rangle$, если взять надлежащее значение $\mu > 0$. Это значит, что $V^*(t, y(t))$ не возрастает с t на $\langle t_0, t_0 + h\rangle$, то есть

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t}(t, y(t))\Big|_{t=t_0} &= \frac{\partial V^*}{\partial t}\Big|_{t=t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^*}{\partial x_i}\dot{y}_i(\tau) = \\ &= \frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} + [\tfrac{1}{2}\alpha'\lambda(\|y(t)\|) - \mu]\left[\sum\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq 0 .\end{aligned}$$

Так как μ было сколь угодно малое число,

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{2}\alpha'\lambda(\|x_0\|)\left[\sum\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \leqq 0 .$$

Если же $\sum(\partial V^*/\partial x_i)^2 = 0$, то вместо $y(t)$ мы возьмем решение $x(t)$ уравнения (1), проходящее через точку $[t_0, x_0]$. Из того обстоятельства, что $V^*(t, x(t))$ не возрастает, легко вытекает доказываемое неравенство. Функция $V^*(t, x)$, которую мы получили из теоремы 4 с использованием теоремы об аппроксимировании и сглаживании, удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

АВТОНОМНЫЙ СЛУЧАЙ

В автономном случае нетрудно доказать, что построенная в теореме 2 функция V не зависит от t. Для двух точек $[t_1, x]$, $[t_2, x]$ с равными координатами x можно сопоставить друг другу функции, по которым мы берем супремум в определении функции V. Если $y(t)$ — функция, которую можно использовать при определении функции V в точке $[t_1, x]$, то функцию $z(t) = y(t - t_2 + t_1)$ можно использовать при определении функции V в точке $[t_2, x]$, причем

$$\sup_{\xi \geqq t_1} \|y(\xi)\| = \sup_{\xi \geqq t_2} \|z(\xi)\| ,$$

$$\sup_{\eta \geqq t_1} \varphi(\|\dot{y}(\eta) - X(y(\eta))\|, \tfrac{1}{2}\alpha'\lambda(\|y(\eta)\|)) = \sup_{\eta \geqq t_2} \varphi(\|\dot{z}(\eta) - X(\eta, z(\eta))\|, \tfrac{1}{2}\alpha'\lambda(\|z(\eta)\|)) .$$

О построенной таким образом функции известно, однако, только то, что она непрерывна, но можно построить и локально липшицевскую функцию V. При этом мы воспользуемся модифицированной теоремой 3. Докажем, что в автономном случае можно взять функцию ψ, не зависящую от t. С этой целью докажем прежде всего, что в лемме 8 можно числа σ_n выбрать независимо от n. По лемме 8 можно, действительно, к данному $T > 0$, t_0 подобрать $\sigma^{(1)}(t_0)$ так, что из предположений $y(t) \in \mathscr{M}$, почти всюду в $\langle t_0, t_0 + T\rangle$

$$\|\dot{y}(t) - X(y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)\,, \tag{5,1}$$
$$U_2(\|y(t_0)\|) \leqq d - \varepsilon \quad \text{и} \sum_{n \leqq t_i^2 \leqq n+1} \Delta_i(y) \leqq 2\sigma^{(1)}(t_0)$$

следует $\|y(t)\| < d$ для $t \in \langle t_0, t_0 + T\rangle$. (Достаточно взять $\sigma^{(1)}(t_0) = \frac{1}{2}\min \sigma_n$ для всех индексов n, для которых $n \leqq t_0 + T$, $n + 1 \geqq t_0$.) Так как $X(x)$ не зависит от t, число $\sigma^{(1)}(t_0)$ не зависит от t_0. Действительно, если бы существовало t_1 и $y(t) \in \mathscr{M}$ так, что почти всюду в $\langle t_1, t_1 + T\rangle$ было бы

$$\|\dot{y}(t) - X(y(t))\| \leqq \alpha\lambda(\|y(t)\|)\,,$$
$$U_2(\|y(t_1)\|) \leqq d - \varepsilon, \sum_{n \leqq t_i^2 \leqq n+1} \Delta_i(y) \leqq 2\sigma^{(1)}(t_0)\,,$$

причем $\|y(t^*)\| \geqq d$ для некоторого $t_1 < t^* \leqq t_1 + T$, то функция $z(t) = y(t + t_1 - t_0)$ выполняла бы предположения (5,1), причем $\|z(t^* - t_1 + t_0)\| \geqq d$. В дальнейшем мы будем брать $T \geqq 2$. Возьмем

$$\chi_1 = \min_{U_2^{-1}(d-2\varepsilon) \leqq \eta \leqq d} \lambda(\eta),\ \chi_2 = \max_{U_2^{-1}(d-2\varepsilon) \leqq \eta \leqq d} \lambda(\eta)\,, \tag{5,2}$$

где $U_2^{-1}(\eta)$ — функция обратная к $U_2(\eta)$ (в качестве $U_2(\eta)$ можно взять строго монотонную функцию). Число $q > 0$ возьмем так, чтобы было

$$\|X(x) - X(y)\| < \tfrac{1}{3}\alpha\chi_1 \quad \text{для} \quad \|x - y\| \leqq q,\ \|x\| \leqq d,\ \|y\| \leqq d \quad \text{и} \tag{5,3}$$

$$\sigma^{(2)} < \tfrac{1}{2}\min\left(\sigma^{(1)}, \tfrac{1}{3}\alpha\chi_1, q\right),\ \alpha_1 < \tfrac{1}{3}\alpha\frac{\chi_1}{\chi_2}\,. \tag{5,4}$$

Докажем, что для функции $y(t) \in \mathscr{M}$, для которой почти всюду

$$\|\dot{y}(t) - X(y(t))\| \leqq \alpha_1\lambda(\|y(t)\|),\ U_2(\|y(t_1^1)\|) \leqq d - \varepsilon, \sum_{n \leqq t_i^2 \leqq n+1} \Delta_i(y) \leqq \sigma^{(2)} \tag{5,5}$$

имеет место $\|y(t)\| < d$ для всех $t \geqq t_1^1$.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует t^* такое, что $\|y(t^*)\| \geqq d$. Пусть t^* — наименьшее такое число; тогда имеет место или $\|y(t^* + 0)\| = d$ или $\|y(t^* - 0) + \Delta_{t^*}(y)\| \geqq d$ и $\|y(t)\| < d$ для $t \in \langle t_1^1, t^*)$. Далее можно, очевидно, подобрать такое число $t_0 \geqq 0$, что $U_2(\|y(t_0)\|) < d - \varepsilon$ и $U_2(\|y(t)\|) \geqq d - 2\varepsilon$ для $t \in \langle t_0, t^*\rangle$. По предположению о T и $\sigma^{(1)}$ имеем $t^* \geqq t_0 + T$.

Дадим определение функции $z(t)$: Пусть $\langle n - 1, n + 2\rangle \subset \langle t_0, t_0 + t^*\rangle$, тогда определяем $z(t)$ для $t \in \langle n, n + 1\rangle$

$$w(t) = y(t + 0) + \sum_{n < t_k^2 \leqq t} \left(y(t_k^2) - y(t_{k+1}^1)\right),$$

и

$$z(t) = w(t) + [y(n+1) - w(n+1)]\,(t-n)\,,$$

если же $n+1 = t_k^2$, то $y(n+1)$ берем равной $y(t_{k+1}^1)$. Далее возьмем наименьшее целое число s_1 так, что $t_0 \leqq s_1$.Ввиду того, что $T \geqq 2$, будет $\langle t_0, s_1+1\rangle \subset \subset \langle t_0, t^*\rangle$. Определим

$$w(t_0) = y(t+0),\ w(t) = y(t+0) + \sum_{t_k^2 \leqq t} \left(y(t_k^2) - y(t_{k+1}^1)\right) \quad \text{для} \quad t \in (t_0, s_1+1\rangle$$

и

$$z(t) = w(t) + [y(s_1+1) - w(s_1+1)]\,(t-t_0)\,.$$

Аналогично найдем наибольшее целое число $s_2 \leqq t^*$ и положим

$$w(s_2-1) = y(s_2-1+0),\ w(t) = y(t+0) + \sum_{s_2-1 < t_k^2 \leqq t} \left(y(t_k^2) - y(t_{k+1}^1)\right)$$

и

$$z(t) = w(t) + [y(t^*) - w(t^*)]\,(t - s_2 + 1)$$

(если в t^* функция y имеет скачок $t^* = t_k^2$, то $y(t^*) = y(t_{k+1}^1) = y(t_k^2) + \Delta_k(y)$). Тогда $z(t)$ будет абсолютно непрерывной функцией, для которой

$$(5{,}6) \qquad \|y(t) - z(t)\| \leqq 2\sigma^{(2)},\ z(t_0) = y(t_0),\ z(t^*) = y(t^*)\,.$$

Возьмем наименьшее t^{**}, для которого $\|z(t^{**})\| = d$. Очевидно, будет $t_0 < < t^{**} \leqq t^*$. Для $t \in (t_0, t^{**})$ получим согласно (5,2)–(5,6),

$$(5{,}7) \qquad \begin{aligned} &\|\dot z(t) - X(z(t))\| \leqq \|\dot y(t) - X(y(t))\| + \|\dot z(t) - \dot y(t)\| + \|X(y(t)) - \\ &- X(z(t))\| \leqq \alpha_1 \lambda(\|y(t)\|) + 2\sigma^{(2)} + \max_{\|x-y\| \leqq 2\sigma^{(2)}} \|X(x) - X(y)\| \leqq \\ &\leqq \alpha_1 \chi_2 + 2\sigma^{(2)} + \tfrac{1}{3}\alpha\chi_1 \leqq \alpha\chi_1 \leqq \alpha\lambda(z(t)\|)\,. \end{aligned}$$

Согласно (5,6), будет

$$(5{,}8) \qquad U_2(\|z(t_0)\|) = U_2(\|y(t_0)\|) < d - \varepsilon \quad \text{и} \quad \|z(t^{**})\| = d\,.$$

По лемме 8 из (5,7) и из неравенства из (5,8) следует $\|z(t)\| < d$ для $t \geqq t_0$ ($z(t)$ — абсолютно непрерывная функция!), что противоречит равенству из (5,8).

Таким образом мы завершили доказательство того, что в автономном случае можно взять число σ независимо от n.

Отсюда уже нетрудно вывести, что и в лемме 9 можно взять σ независимо от n. Действительно, неравенства (3,25) перейдут в неравенства

$$\sigma^{(2)} < \tfrac{1}{2},\ 3(M + \alpha\lambda(d) + 1)\,\sigma^{(2)} < \min\left(\sigma^{(1)}, r\right),$$

где $M = \max \|X(x)\|$ для $\|x\| \leqq d + 1$.

В доказательстве теоремы 3 заменим области G_n^m областями $G^m = E(t, x;\ t \geqq \geqq 0,\ d_{m-2} \leqq \|x\| \leqq d_m)$, а $\psi(x)$ подберем так, чтобы $\psi(x) > 1/\sigma^m$ в G^m. Отсюда уже легко следует, что в автономном случае функция V, построенная в теореме 4 не зависит от t, С аналогичным рассуждением мы уже встретились в начале этого параграфа. В данном случае однако, к сожалению, нельзя использовать теорему об аппроксимировании для доказательства существования функции, обладающей непрерывными частными производными. Тем не менее, только что построенная функция достаточна для доказательства следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть правая часть дифференциального уравнения* (1) *не зависит от t и пусть решение $x \equiv 0$ локально устойчиво ППДВ; тогда $x \equiv 0$ будет интегрально устойчивым* (*локально*).

Доказательство. Правые части дифференциального уравнения можно модифицировать так, чтобы в некоторой области $\|x\| \leqq K (K > 0)$ они остались без изменения и чтобы притом $x \equiv 0$ было глобально устойчивым ППДВ. Согласно проведенным выше рассуждениям существует непрерывная функция $V(x)$ положительно определенная, не возрастающая вдоль интегральных кривых (1') (модифицированное уравнение (2)) и локально липшицевская в области $x \neq 0$. Наверное можно найти липшицевскую монотонно возрастающую функцию $\varphi(\eta)$, $\varphi(0) = 0$ такую, что $\varphi(V(x))$ будет локально липшицевской и в окрестности точки 0. Условия положительной определенности и того, что $V_1 = \varphi(V(x))$ не возрастает вдоль решений (1') выполняются автоматически. В области $\|x\| \leqq K$ функция V_1 является, следовательно, липшицевской с некоторой постоянной L. По теореме 1 (см [6]) решение $x \equiv 0$ интегрально устойчиво локально. Так как дифференциальные уравнения (1') совпадают с исходными (1) в области $\|x\| \leqq K$, то $x \equiv 0$ будет интегрально устойчивым (локально) и относительно исходной системы (1).

Эта теорема не обязательно справедлива для глобальной устойчивости. Нетрудно привести пример того, что из глобальной устойчивости ППДВ (даже такой, что $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \delta_i(\varepsilon) = \infty$, $i = 1, 2$) не следует глобальная интегральная устойчивость. Связи между устойчивостью ППДВ и интегральной устойчивостью в неавтономном случае была посвящена работа [6]. Приведем еще несколько следствий теоремы 1.

Теорема 6. *Если существует функция $V(t, x)$ с непрерывными частными производными, определенная на $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$ и такая, что*

1. *$V(t, x)$ — глобально положительно определенная функция,*
2. *$V(t, x)$ — допускает бесконечно малый высший предел,*
3. *$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t, x)$ — отрицательно определенная функция,*
4. *существует непрерывная функция $\varphi(\eta) > 0$ для $\eta > 0$ такая, что*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x)\right| \leqq \varphi(\|x\|),$$

то решение $x \equiv 0$ глобально устойчиво ППДВ.

Замечание 3. Если, кроме того, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ — глобально отрицательно определенная функция и $\limsup_{\eta \to \infty} \varphi(\eta) < \infty$, то $\lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_2(\varepsilon) = \infty$.

Доказательство очевидно. Функция $V(t, x)$ удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 1 и из условий 3, 4 следует существование функции $U(\eta)$ такой, что выполняется и условие 3 теоремы 1.

Одновременно мы теперь получили известный критерий устойчивости ППДВ: Если существует функция $V(t, x)$ с непрерывными частными производными, определенная в области $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$, удовлетворяющая условиям 1, 2, 3 теоремы 6 и обладающая ограниченными частными производными, то $x \equiv 0$ устойчиво ППДВ (глобально).

В автономном случае мы получим еще более простое утверждение: Если существует положительно определенная функция $V(x)$ с непрерывными частными производными, производная которой по полю $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ является отрицательно определнной функцией, то $x \equiv 0$ устойчиво ППДВ (локально). Если же V — глобально положительно определенная функция и $\partial V/\partial x_i$ ограничены, то $x \equiv 0$ глобально устойчиво ППДВ.

Литература

[1] *Четаев Н. Г.:* Об устойчивых траекториях динамики. Учен. зап. Казанского гос. ун-та, кн *4*, вып. 1.

[2] *Артемьев Н. А.:* Осуществимые движения. Изв. АН СССР, сер. матем., *3*, 1939.

[3] *Дубошин Г. Н.:* К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т. *XIV*, вып. 1, 1940.

[4] *Малкин И. Г.:* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Прикл. матем. и мех., т. *VIII*, № 3, 1944.

[5] *Курцвейль Я.:* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехосл. мат. журнал, *6 (81)*, 1956, 455—484.

[6] *Вркоч И.:* Интегральная устойчивость. Чехосл. мат. журнал, т. *9 (84)*, 1959, 71—126.

Výtah

STABILITA PŘI TRVALE PŮSOBÍCÍCH PORUCHÁCH

IVO VRKOČ, Praha

V této práci je charakterisována stabilita při trvale působících poruchách (viz definice 1 nebo 2) pomocí ljapunovských funkcí. Je dokázaná věta:

Věta 1. *Nechť pro rovnici* (1) *existuje funkce* $V(t, x)$ *definovaná v oblasti* $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$, *kde má spojité parciální derivace prvního řádu, taková, že*

1. *$V(t, x)$ jest globálně positivně definitní,* 2. *$V(t, x)$ jest stejnoměrně ohraničená,* 3. *existuje spojitá funkce $U(\eta)$ pro $\eta \geqq 0$, $U(\eta) > 0$ pro $\eta > 0$ tak, že*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + U(\|x\|) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2} \leqq 0 \,, \quad kde \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \,.$$

Pak řešení $x = 0$ rovnice (1) je stabilní při trvale působících poruchách (globálně).

Naopak, nechť řešení $x = 0$ rovnice (1) je stabilní při trvale působících poruchách (globálně), pak existuje funkce $V(t, x)$ splňující výše uvedené požadavky a kromě toho má parciální derivace všech řádů podle všech proměnných.

V autonomním případě je sestrojena funkce V nezávislá na t, která je globálně positivně definitní, lipschitzovská na každé kompaktní množině a nerostoucí podél absolutně spojitých funkcí (vektorových) $y(t)$, které splňují

$$\|\dot{y}(t) - X(y(t))\| \leqq \frac{\alpha}{2} \lambda(\|y(t)\|)$$

skoro všude. Přitom $\lambda(\eta)$ je jistá spojitá funkce $\lambda(0) = 0$, $\lambda(\eta) > 0$ pro $\eta > 0$. Funkce $V(x)$ je použita při důkazu této věty:

Věta 5. *Nechť pravá strana diferenciální rovnice (1) nezávisí na t a nechť řešení $x = 0$ je stabilní při trvale působících poruchách; pak řešení $x = 0$ je integrálně stabilní (lokálně).*

Jako důsledek věty 1 je uvedena tato věta:

Věta 6. *Jestliže existuje funkce $V(t, x)$ se spojitými parciálními derivacemi definovaná na $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$ taková, že*

1. *$V(t, x)$ je globálně positivně definitní,* 2. *$V(t, x)$ je stejnoměrně ohraničená,* 3. *$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ je negativně definitní,* 4. *existuje spojitá funkce $\varphi(\eta) > 0$ pro $\eta > 0$ taková, že*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x)\right| \leqq \varphi(\|x\|) \,,$$

pak řešení $x = 0$ je stabilní při trvale působících poruchách (globálně).

Z této věty již snadno obdržíme známé kritérium stability při trvale působících poruchách:

Jestliže existuje funkce $V(t, x)$ se spojitými parciálními derivacemi definovaná v oblasti $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$ a taková, že splňuje podmínky 1, 2, 3 z věty 6 a jejíž parciální derivace $\partial V/\partial x_i$ jsou omezené, pak řešení $x = 0$ je stabilní při trvale působících poruchách (globálně).

Summary

STABILITY UNDER PERSISTENT DISTURBANCES

IVO VRKOČ, Praha

Stability under persistent disturbances (see Definitions 1 or 2) is characterised using Lyapounov functions. The following theorem is proved:

Theorem 1. *Given the equation (1), let there exists a function $V(t, x)$ defined for $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$ and with continuous first partials, and such that*

1. *$V(t, x)$ is globally positive definite,* 2. *$V(t, x)$ is uniformly bounded, and* 3. *there exists a function $U(\eta)$ continuous for $\eta \geqq 0$, positive for $\eta > 0$, so that*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + U(\|x\|) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2} \leqq 0\,, \quad \text{where} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i\,.$$

Then the solution $x = 0$ of (1) is stable under persistent disturbances.

Conversely, if the solution $x = 0$ of (1) is globally stable under persistent disturbances, then there exists a function $V(t, x)$ with the properties listed above, which moreover possesses all partial derivatives of all orders.

In the autonomous case there is constructed a function V independent of t, globally positive definite, Lipschitzian on every compact set, and non-increasing along every absolutely continuous (vector) function $y(t)$ which almost everywhere satisfies

$$\|\dot{y}(t) - X(y(t))\| \leqq \frac{\alpha}{2} \lambda(\|y(t)\|)\,.$$

Here $\lambda(\eta)$ is a certain continuous function with $\lambda(0) = 0$, $\lambda(\eta) > 0$ for $\eta > 0$. This function $V(x)$ is used to prove the

Theorem 5. *Let the right-hand side of equation (1) be independent of t; let the solution $x = 0$ be stable under persistent disturbances. Then the solution $x = 0$ is (locally) integrally stable.*

The following theorem is a consequence of Theorem 1.

Theorem 6. *Let there exist a function $V(t, x)$ with continuous partials on $t \geqq 0$ $-\infty < x_i < \infty$ and such that*

1. *$V(t, x)$ is globally positive definite,* 2. *$V(t, x)$ is uniformly bounded,* 3. *$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ is negative definite,* 4. *there exists a continuous function $\varphi(\eta) > 0$ for $\eta > 0$ such that*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x)\right| \leqq \varphi(\|x\|)\,.$$

Then the solution $x = 0$ is (globally) stable under persistent disturbances.

From this theorem there easily follows the well-known criterion for stability under persistent disturbances:

If there exists a function $V(t, x)$ with continuous partial derivatives in $t \geqq 0$, $-\infty < x_i < \infty$, satisfying condition 1, 2 and 3 of Theorem 6 and with bounded $\partial V/\partial x_i$, then the solution $x = 0$ is (globally) stable under persistent disturbances.