Časopis pro pěstování matematiky

Petr Mandl

Vlastnosti difusních procesů určených obecnou laterální podmínkou

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 31--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117412

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

VLASTNOSTI DIFUSNÍCH PROCESŮ URČENÝCH OBECNOU LATERÁLNÍ PODMÍNKOU

PETR MANDL, Praha

(Došlo dne 10. října 1960)

Jsou studovány jednostranně ohraničené difusní procesy, určené operátorem (1) a laterální podmínkou (2). Je ukázáno, jak koeficient $b(x)$ a parametry podmínky (2) určují chování pravděpodobností pro $t \to \infty$.

Práce se zabývá homogenními Markovovými procesy na intervalu $\langle 0, \infty)$. Budiž $P(t, x; A)$ funkce pravděpodobnosti přechodu takového procesu. Potom vztahem

$$u(t, x; f) = \int P(t, x; \mathrm{d}y) f(y)$$

je definována semigrupa transformací v prostoru omezených funkcí na intervalu $\langle 0, \infty)$, která případně může ponechávat invariantním nějaký podprostor, např. prostor všech funkcí spojitých na $\langle 0, \infty\rangle$. Každá taková semigrupa, je-li spojitá, je určena svým infinitesimálním operátorem. Tedy infinitesimální operátor semigrupy určuje také pravděpodobnosti přechodu homogenního Markovova procesu.

Této charakterisace procesu budeme používat a opřeme se o výsledky, obsažené v práci [1] W. FELLERA. (Viz též [6], kde jsou ukázány semigrupy ještě obecnějšího typu.) Soustředíme se na difusní procesy, které jsou popsány takto:

Budiž C prostor všech funkcí, spojitých na (uzavřeném) intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ s normou $\|f\| = \max_x |f|$. Ω_1 budiž operátor v C, definovaný vztahem

$$\Omega_1 f = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f + b(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f, \tag{1}$$

tj. do definičního oboru $\mathscr{D}(\Omega_1)$ operátoru Ω_1 (budeme používat symbolu $\mathscr{D}$ pro definiční obor), patří ty funkce z C, pro něž pravá strana patří do C. Předpokládáme, že $b(x)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle 0, \infty)$, splňující tuto podmínku: Klademe-li $B(x) = \int_0^x b(s)\, \mathrm{d}s$ (tohoto označení budeme v dalším užívat), potom funkce

$$\exp - B(x) \int_0^x \exp B(s)\, \mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \exp B(x) \int_0^x \exp - B(s)\, \mathrm{d}s$$

nejsou integrovatelné na $\langle 0, \infty)$ (tzn. nekonečno je přirozenou hranicí procesu).

Operátor Ω_1 zužme na operátor Ω laterální podmínkou

$$(2) \qquad p\, F(0) = q\, F(\infty) + \tau \int_{0+}^{\infty} F(x)\, \mathrm{d}p(x) - \sigma \Omega_1\, F(x)|_{x=0} + \gamma\, F'(0)\,,$$

kde $p, q, \sigma, \gamma, \tau$ jsou vesměs nezáporná, $p(x)$ je distribuční funkce ($\int_{0+}^{\infty} \mathrm{d}p(x) = 1$).

Do $\mathscr{D}(\Omega)$ patří ty funkce F z $\mathscr{D}(\Omega_1)$, které splňují (2). Operátor Ω (viz [1]) je generátorem silně spojité semigrupy v C v případě, že $\sigma + \gamma > 0$, jinak semigrupy v odpovídajícím podprostoru, vymezeném podmínkou (2). Resolventní operátor takové semigrupy má vyjádření

$$(3) \quad \mathscr{R}_\lambda f(x) = \int_0^{\infty} K^0(x, s) f(s)\, \mathrm{d}s + \eta(x) \left[\sigma\lambda - \gamma\omega + p - \tau \int_0^{\infty} \eta(x)\, \mathrm{d}p(x)\right]^{-1},$$
$$\{\lambda^{-1} q\, f(\infty) + \sigma f(0) + \gamma \int_0^{\infty} \bar{\eta}(s) f(s)\, \mathrm{d}s + \tau \int_0^{\infty} Q_0(s) f(s)\, \mathrm{d}s\}\,.$$

Zde $\eta(x)$ je řešení rovnice (5), pro které $\eta(0) = 1$ a $\eta(\infty) = 0$. $K^0(x, s)$ je Greenova funkce pro proces s absorpční stěnou v 0. Je dána vztahem (8). (Obě funkce budou podrobněji rozebrány v dalším.)

$$\bar{\eta}(s) = \eta(s)\, e^{B(s)}\,, \quad Q_0(s) = \int_0^{\infty} K^0(x, s)\, \mathrm{d}p(x)\,, \quad \omega = \eta'(x)|_{x=0}\,.$$

Závislost na λ není zvláště vyznačena.

Reálným protějškem námi studovaných procesů je Brownův pohyb částice na intervalu $\langle 0, \infty)$, na kterou působí v bodě x síla $b(x)$. Podmínka (2) určuje, co se stane s částicí po dosažení bodu 0.

Resolventní operátor $\mathscr{R}_\lambda f$ představuje Laplaceovu transformaci

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(t, x; \mathrm{d}y) f(y) \exp - \lambda t\, \mathrm{d}t\,.$$

Ze vztahu (3) tedy nahlédneme, že pro proces, určený podmínkou (2) platí:

$$(4) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P(t, x; A)\, \mathrm{d}t = \int_{A - \{\infty\}} K^0(x, s)\, \mathrm{d}s +$$
$$+ \eta(x) \left[\sigma\lambda - \gamma\omega + p - \tau \int_0^{\infty} \eta(x)\, \mathrm{d}p(x)\right]^{-1} .$$
$$.\, \{\lambda^{-1} q\, \chi_A(\infty) + \sigma\, \chi_A(0) + \gamma \int_{A - \{\infty\}} \bar{\eta}(s)\, \mathrm{d}s + \tau \int_{A - \{\infty\}} Q_0(s)\, \mathrm{d}s\}\,.$$

Resolventní operátor procesu definuje také veličinu

$$\int_0^{\infty} P(t, \infty; \{\infty\}) \exp - \lambda t\, \mathrm{d}t = \lambda^{-1}\,,$$

tj. $P(t, \infty; \{\infty\}) \equiv 1$. To lze ověřiti dokázáním vztahu

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty K_\lambda^0(x, y) f(y)\, dy = \lambda^{-1} f(\infty)\,.$$

(Viz též [1], str. 489.)

I. Některá pomocná tvrzení. Nejprve shrneme vlastnosti řešení rovnice

$$\frac{d^2}{dx^2} u + b(x) \frac{d}{dx} u - \lambda u = 0 \tag{5}$$

na intervalu $\langle 0, \infty)$ a pro $\lambda \geqq 0$, které budeme v dalším potřebovat. Definujeme tři důležitá řešení této rovnice ([2]):

$$\begin{aligned} &u_0(s, \lambda)\,, \quad \text{vyhovující podmínkám} \quad u_0(0, \lambda) = 0\,, \quad u_0'(0, \lambda) = 1\,,\\ &u_1(s, \lambda)\,, \quad \text{vyhovující podmínkám} \quad u_1(0, \lambda) = 1\,, \quad u_1'(0, \lambda) = 0 \end{aligned}$$

a nerostoucí subdominantní řešení $u_+(s, \lambda)$.

Bude $u_k(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{kn}(s)\, \lambda^n$ pro $k = 0, 1$, kde funkce u_{kn} jsou určeny vztahy

$$\begin{aligned} u_{kn}(x) &= \int_0^x e^{-B(y)} \int_0^y e^{B(s)}\, u_{kn-1}(s)\, ds\, dy\,,\\ u_{00}(x) &= \int_0^x e^{-B(y)}\, dy\,, \quad u_{10}(x) = 1\,,\\ u_+(x, \lambda) &= u_1(x, \lambda) \int_x^\infty e^{-B(y)}\, u_1(y, \lambda)^{-2}\, dy\,. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že ∞ je přirozenou hranicí procesu a tedy (viz [1]) všechna ohraničená řešení rovnice (5) jsou násobky $u_+(x, \lambda)$. Omezené řešení, rovné 1 pro $x = 0$ budeme označovat $\eta(x, \lambda)$, tj.

$$\begin{aligned} \eta(x, \lambda) &= \left(\int_0^\infty e^{-B(y)}\, u_1(y, \lambda)^{-2}\, dy\right)^{-1} u_1(x, \lambda) \int_x^\infty e^{-B(y)}\, u_1(y, \lambda)^{-2}\, dy = \\ &= u_1(x, \lambda) - u_1(x, \lambda) \left(\int_0^\infty e^{-B(y)}\, u_1(y, \lambda)^{-2}\, dy\right)^{-1} \int_0^x e^{-B(y)}\, u_1(y, \lambda)^{-2}\, dy\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Funkce $K^0(x, s)$ je Greenovou funkcí úlohy

$$\lambda F - \left\{\frac{d^2}{dx^2} F + b \frac{d}{dx} F\right\} = f\,, \quad F(0) = 0 \tag{7}$$

na intervalu $\langle 0, \infty)$. Má toto vyjádření

$$\begin{aligned} K_\lambda^0(x, y) &= u_0(x, \lambda)\, \eta(y, \lambda)\, e^{B(y)} \quad \text{pro} \quad x \leqq y\,,\\ &= \eta(x, \lambda)\, u_0(y, \lambda)\, e^{B(y)} \quad \text{pro} \quad x \geqq y\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Okrajová podmínka úlohy (7) je speciálním případem (2) ($q = \tau = \sigma = \gamma = 0$). Definuje tedy určitý infinitesimální operátor. Pro tento operátor zavedeme označení

Ω_0. Difusní proces, odpovídající operátoru Ω_0 je proces s absorpční stěnou. Budiž $P_0(t, x; A)$ funkce pravděpodobnosti přechodu tohoto procesu. Ze vzorce (4) dostáváme

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_0(t, x; \langle 0, \infty)) \, dt = \int_0^\infty K_\lambda^0(x, y) \, dy .$$

Označme tuto Laplaceovu transformaci $\varphi(x, \lambda)$. Platí

$$\lambda\varphi - \left\{\frac{d^2}{dx^2} \varphi + b \frac{d}{dx} \varphi\right\} = 1 .$$

Tedy $\varphi(x, \lambda) - \lambda^{-1}$ vyhovuje rovnici (5). Jelikož všechna omezená řešení (5) jsou násobky $\eta(x, \lambda)$, musí být $\varphi(x, \lambda) - \lambda^{-1} = c(\lambda) \eta(x, \lambda)$. Z okrajové podmínky v (7) vidíme, že je

(9) $$\varphi(x, \lambda) = \lambda^{-1}(1 - \eta(x, \lambda)) .$$

Z provedených úvah je možno získati toto vyjádření veličiny $\omega(\lambda)$:

(10) $$\omega(\lambda) = - \lambda \varphi'(0, \lambda) = - \lambda \frac{d}{dx} \int_0^\infty K_\lambda^0(x, y) \, dy|_{x=0} =$$

$$= - \lambda \int_0^\infty \eta(s) \, e^{B(s} \, ds = - \lambda \int_0^\infty \bar{\eta}(s) \, ds .$$

Uveďme ještě, že je za předpokladu $\int_0^\infty \exp - B(s) \, ds = \infty$, tj. $\eta(x, 0) \equiv 1$, pro $x \geqq z$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \int_0^z K_\lambda^0(x, y) \, dy = \int_0^z e^{B(y)} \int_0^y e^{-B(s)} \, ds \, dy ,$$

pro $x \leqq z$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \int_0^z K_\lambda^0(x, y) \, dy = \int_0^x e^{-B(y)} \int_y^z e^{B(s)} \, ds \, dy .$$

Vztahy se ověří bezprostředním výpočtem.

V dalším budeme používat označení

$$\int P_0(t, x; dy) f(y) = u_0(t, x; f) .$$

Budeme potřebovati toto lemma:

Lemma 1. *Množina všech $f \in \mathscr{D}(\Omega_0^2)$, které jsou konstantní pro dostatečně velká x je hustá v prostoru všech $f \in C$, splňujících $f(0) = 0$.*

Důkaz. Kdykoliv

$$h(x) = \int_0^x e^{-B(y)}(c + \int_0^y \varphi(z) \, e^{B(z)} \, dz) \, dy ,$$

kde $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ má dvě derivace spojité na $\langle 0, \infty)$ a je rovná nule pro dostatečně velká x, pak $h \in \mathscr{D}(\Omega_0^2)$. Obvyklými metodami lze pak rozborem tohoto výrazu ověřit, že funkce, mající takové vyjádření, jsou husté v prostoru $f \in C$, pro které $f(0) = 0$.

Adjungovaný operátor k operátoru $\mathscr{R}_\lambda^0 f = \int K_\lambda^0(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y$ je operátor $\mathscr{R}_\lambda^{0*} f = \int f(x)\, K_\lambda(x, y)\, \mathrm{d}x$. Je to resolventní operátor semigrupy transformací v prostoru L, což je prostor funkcí, integrovatelných na $\langle 0, \infty)$. Této semigrupě bude odpovídati označení $v_0(t, y; f)$, tj.

$$\mathscr{R}_\lambda^{0*} f(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, v_0(t, y; f)\, \mathrm{d}t\,.$$

Platí

$$v_0(t, y; f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_0^\infty f(x)\, P_0(t, x; \langle 0, y))\, \mathrm{d}x\,.$$

Budiž Ω_1^* operátor v prostoru L, určený vztahem

$$\Omega_1^* f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f - bf \right\}.$$

(Symbol $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ zde značí derivaci absolutně spojité funkce.) Infinitesimálním operátorem semigrupy transformací v_0 je operátor Ω_0^*, což je zúžení operátoru Ω_1^* okrajovou podmínkou $f(0) = 0$.

Lemma 2. *Je*

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1}(1 - \eta(x, \lambda)) = \int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y\,.$$

Této limity je dosaženo monotonně. Dále je

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1}\, \omega(\lambda) = - \int_0^\infty e^{B(x)}\, \mathrm{d}x\,, \quad \omega(0) = - \left(\int_0^\infty e^{-B(x)}\, \mathrm{d}x \right)^{-1}.$$

D ů k a z. Používáme obvyklých konvencí pro počítání s nevlastními čísly. Zabývejme se nejprve veličinou $\omega(\lambda)$. Máme ze vzorce (6)

$$(11) \quad \omega(\lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left\{ \left[\int_0^\infty e^{-B(s)}\, u_1(s, \lambda)^{-2}\, \mathrm{d}s \right]^{-1} u_1(x, \lambda) \int_x^\infty e^{-B(s)}\, u_1(s, \lambda)^{-2}\, \mathrm{d}s \right\}_{x=0} =$$

$$= - \left[\int_0^\infty e^{-B(s)}\, u_1(s, \lambda)^{-2}\, \mathrm{d}s \right]^{-1}.$$

Odtud je okamžitě patrná hodnota $\omega(0)$.

Když je $\int_0^\infty \exp B(s)\, \mathrm{d}s < \infty$, máme ze vzorce (10) a z toho, že za této podmínky $\eta(s, 0) \equiv 1$:

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1}\, \omega(\lambda) = - \lim_{\lambda \to 0+} \int_0^\infty \eta(s, \lambda)\, e^{B(s)}\, \mathrm{d}s = - \int_0^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\,.$$

Limitní přechod za znamením integrace je oprávněn, neboť z (9) plyne, že $\eta(s, \lambda)$ je

Laplace-Stieltjesovou transformací neklesající funkce a závisí tedy na λ monotonním způsobem. Dále podle (6) a (11) platí

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^{-1}(1 - \eta(x, \lambda)) = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda^{-1}(1 - u_1(x, \lambda)) - u_1(x, \lambda)\, \lambda^{-1}\, \omega(\lambda)\,.$$

$$. \int_0^x e^{-B(y)}\, u_1(y, \lambda)^{-2}\, \mathrm{d}y = - \int_0^x e^{-B(y)} \int_0^y e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_0^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s \int_0^x e^{-B(y)}\, \mathrm{d}y = \int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y\,.$$

Přechod k limitě je monotonní, protože podle (9) výraz $\lambda^{-1}(1 - \eta(x, \lambda))$ je Laplaceovou transformací nezáporné funkce.

Poznámka. Z lemmatu 2 a ze vztahu (9) dostáváme

$$\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty P_0(t, x; \langle 0, \infty))\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty t\, \mathrm{d}_t[1 - P_0(t, x; \langle 0, \infty))]\,.$$

Jelikož P_0 odpovídá procesu s absorpční stěnou, výraz nalevo vyjadřuje střední dobu, kterou potřebuje částice, vycházející z x k dosažení hranice 0.

II. V tomto odstavci vyšetříme ty procesy, pro něž v podmínce (2) je buď $\tau + q < p$ nebo $\tau + q = p$, ale $q \neq 0$.

Věta 1. (Viz [1].) $P(t, x; \langle 0, \infty\rangle) \equiv 1$ *právě když* $\tau + q = p$.

Důkaz. Dosaďme do (4) za množinu A interval $\langle 0, \infty\rangle$. Použijeme-li (9) a (10), dostáváme

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P(t, x; \langle 0, \infty\rangle)\, \mathrm{d}t = \lambda^{-1} - \lambda^{-1}\, \eta(x)\, (p - q - \tau)\,. \tag{12}$$

$$. \left(\sigma\lambda - \gamma\omega + p - \tau \int_0^\infty \eta(x)\, \mathrm{d}p(x)\right)^{-1}.$$

Odtud inversí Laplaceovy transformace plyne hledaný výsledek.

V případě $\tau + q < p$ nás bude zajímati otázka, kdy částice zanikne s pravděpodobností 1, tj. kdy $\lim_{t\to\infty} P(t, x; \langle 0, \infty\rangle) = 0$. Jelikož sledovaná funkce je monotonní a má tedy limitu, stačí, ukážeme-li, kdy je

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P(t, x; \langle 0, \infty\rangle)\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Označíme-li $(\int_0^\infty \exp - B(x)\, \mathrm{d}x)^{-1} = \beta$, dostaneme ze (12) s použitím lemmatu 2:

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P(t, x; \langle 0, x\rangle)\, \mathrm{d}t = 1 - \left(1 - \beta \int_0^x e^{-B(s)}\, \mathrm{d}s\right).$$

$$. (p - q - \tau)\left(\gamma\beta + p - \tau \int_0^\infty \left(1 - \beta \int_0^x e^{-B(s)}\, \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}p(x)\right)^{-1}.$$

Výraz napravo je roven nule, právě když $q = \beta = 0$. Tedy platí

Věta 2. *K tomu, aby* $\lim_{t\to\infty} P(t, x; \langle 0, \infty\rangle) = 0$ *pro všechna* $x \neq \infty$ *je nutné a stačí, aby* $\tau < p$, $q = 0$, $\int_0^\infty \exp - B(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Dále platí tato věta:

Věta 3. *Když* $\tau + q = p$ *a* $q \neq 0$, *potom pro všechna* x, $0 \leqq x \leqq \infty$, $\lim_{t\to\infty} P(t, x; \{\infty\}) = 1$, *právě když* $\int_0^\infty \exp - B(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Důkaz. Jelikož $P(t, \infty; \{\infty\}) = 1$, vidíme, že $P(t, x; \{\infty\})$ je neklesající funkce. Stačí tedy vyšetřiti Abelovu limitu. Máme

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x; \{\infty\})\,\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to 0+} \eta(x, \lambda)\, q \left(\sigma\lambda - \gamma\, \omega(\lambda) + p - \right.$$

$$\left. - \tau \int_0^\infty \eta(x, \lambda)\,\mathrm{d}p(x)\right)^{-1} = \left(1 - \beta \int_0^x e^{-B(s)}\,\mathrm{d}s\right) q \left(q + \gamma\beta + \beta\tau \int_0^\infty \int_0^x e^{-B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p(x)\right).$$

Výraz napravo je roven 1 právě když $\beta = 0$.

III. Nyní se budeme zabývati případem $p = \tau \neq 0$. (To jest $q = 0$.) K důkazu použijeme výsledků W. L. Smitha ([4] Th. 1) při zkoumání procesů obnovy. Výsledky zde ve stručnosti uvedeme. Budiž $F(x)$ distribuční funkce nezáporné náhodné veličiny, která není periodická, tj. není soustředěna cele na ekvidistantní síti hodnot. $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x)$ nechť značí jí odpovídající funkci obnovy. (Zde $F^{(n)}$ je n-tá mocnina funkce F ve smyslu konvoluce.) Pak platí tato věta:

Věta 4. (W. L. Smith.) *Když* $K(x)$ *je libovolná funkce, rovná nule pro záporná* x, *omezená, integrovatelná a nerostoucí v* $(0, \infty)$, *pak*

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x K(x - y)\,\mathrm{d}H(y) = \mu^{-1} \int_0^\infty K(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

(*Zde* $\mu = \int_0^\infty x\,\mathrm{d}F(x)$; *když* $\mu = \infty$ *je pravou stranu třeba bráti jako nulu.*)

Z této věty je možno (viz [5], str. 16) získati tento důsledek:

Důsledek. *Nechť* $K(x)$ *má na každém omezeném intervalu konečnou variaci a nechť existuje* $K_1(x)$, *splňující předpoklady věty 4, pro niž* $|K(x)| \leqq K_1(x)$. *Potom*

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x K(x - y)\,\mathrm{d}H(y) = \mu^{-1} \int_0^\infty K(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Důkaz. Není obtížné nahlédnouti s použitím vyjádření funkce s konečnou variací jako rozdílu dvou nerostoucích funkcí, že

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x-\Delta}^x K(x - y)\,\mathrm{d}H(y) = \mu^{-1} \int_0^\Delta K(z)\,\mathrm{d}z \quad (\Delta > 0)\,.$$

Dále

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \left| \int_0^{x-\Delta} K(x - y)\,\mathrm{d}H(y) \right| \leqq \lim_{x\to\infty} \int_0^{x-\Delta} K_1(x - y)\,\mathrm{d}H(y) = \mu^{-1} \int_\Delta^\infty K_1(z)\mathrm{d}z\,.$$

Poslední výraz lze učiniti libovolně malým. Stejně tak lze libovolně zmenšit rozdíl mezi

$$\mu^{-1} \int_0^{\Delta} K(z)\, dz \quad a \quad \mu^{-1} \int_0^{\infty} K(z)\, dz\,.$$

Tedy

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x K(x - y)\, dH(y) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} K(z)\, dz\,.$$

Věta 5. *Budiž $p = \tau \neq 0$. K tomu, aby pravděpodobnostní míra $P(t, x; A)$ na intervalu $\langle 0, \infty)$ konvergovala pro $t \to \infty$ ve smyslu konvergence distribučních funkcí k pravděpodobnostní míře, je nutné a stačí, aby*

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^{\infty} e^{B(s)}\, ds\, dy \right) dp(x) < \infty\,. \tag{13}$$

Limitní pravděpodobnostní míra je dána distribuční funkcí

$$G(z) = \left[\tau \int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^{\infty} e^{B(s)}\, ds\, dy \right) dp(x) + \gamma \int_0^{\infty} e^{B(x)}\, dx + \sigma \right]^{-1}$$

$$\left[\sigma + \gamma \int_0^z e^{B(x)}\, dx + \tau \int_0^z \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^z e^{B(s)}\, ds\, dy \right) dp(x) + \right.$$

$$\left. + \tau(1 - p(z)) \int_0^z e^{B(y)} \int_0^y e^{-B(s)}\, ds\, dy \right] (z > 0)\,.$$

Důkaz. Abychom konvergenci dokázali, stačí, dokážeme-li toto: Pro každou spojitou na $\langle 0, \infty \rangle$ f z nějaké množiny, husté v množině funkcí, anulujících se v nu e platí

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^{\infty} P(t, x; dy) f(y) = \int_0^{\infty} f(y)\, dG(y)\,.$$

To je jednoduchým důsledkem Hellyových vět a toho, že hodnotami integrálů funkcí z uvažované třídy je jednoznačně určena míra podmnožin intervalu $(0, \infty\rangle$. Míra množiny $\{0\}$ je doplněk na jedničku.

Předpokládáme tedy, že $f(0) = 0$. Vyšetřujme nyní resolventní operátor procesu.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P(t, x; dy) f(y)\, dt = \int_0^{\infty} K^0(x, s) f(s)\, ds + \eta(x) \left[\sigma\lambda - \gamma\omega + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \tau \left(1 - \int_0^{\infty} \eta(x)\, dp(x) \right) \right]^{-1} \left[\gamma \int_0^{\infty} \bar{\eta}(s) f(s)\, ds + \tau \int_0^{\infty} Q_0(s) f(s)\, ds \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} K^0(x, s) f(s)\, ds + \frac{\eta(x)}{\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau} \left(1 - \frac{\tau}{\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau} \int_0^{\infty} \eta(x)\, dp(x) \right)^{-1} .$$

$$. \left\{ \gamma \int_0^{\infty} \bar{\eta}(s) f(s)\, ds + \tau \int_0^{\infty} Q_0(s) f(s)\, ds \right\} = \int_0^{\infty} K^0(x, s) f(s)\, ds +$$

$$+ \eta(x)(\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\tau}{\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau} \int_0^{\infty} \eta(x)\, dp(x) \right]^n \right) .$$

$$. \left\{ \gamma \int_0^{\infty} \bar{\eta}(s) f(s)\, ds + \tau \int_0^{\infty} Q_0(s) f(s)\, ds \right\} .$$

Na toto vyjádření chceme použíti Smithových výsledků. Najdeme tedy distribuční funkci, jejíž Laplace-Stieltjesovou transformací je $\tau(\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau)^{-1} \int_0^\infty \eta(x)\, dp(x)$. Nekonečná řada v závorce je pak Laplace-St. transformací funkce obnovy, odpovídající této distribuční funkci. Potom ukážeme, že výrazy v poslední závorce ve (14) jsou Laplaceovými transformacemi vhodných funkcí. (Musíme zde uvažovat Laplaceovy a nikoliv Laplace-Stieltjesovy transformace, protože resolventní operátor je transformací Laplaceovou.) Tím budeme mít $\int_0^\infty P(t, x; dy) f(y)$ vyjádřen pomocí konvolucí vzhledem k funkci obnovy a použijeme věty 4.

Abychom našli vzor $\tau(\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau)^{-1}$, uvažujme proces s pravděpodobnostmi přechodu $\bar{P}$, jehož infinitesimální operátor je zúžení Ω_1 podmínkou

$$\tau\, F(0) = \tau\, F(\infty) - \sigma\Omega_1\, F(x)|_{x=0} + \gamma\, F'(0) .$$

To je speciální případ (2). Potom dostáváme z (4):

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, \bar{P}(t, 0; \{\infty\})\, dt = \lambda^{-1}\, \tau(\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau)^{-1} .$$

Tedy

$$\tau(\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau)^{-1} = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t}\, d\bar{P}(t, 0; \{\infty\}) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t}\, dH_1(t) .$$

Jak bylo ukázáno, $\bar{P}(t, 0; \{\infty\})$ je neklesající funkce a $\lim_{t \to \infty} \bar{P}(t, 0; \{\infty\}) = 1$, když $\int_0^\infty \exp - B(x)\, dx = \infty$. (Viz věta 3.) Ze vztahu (9) máme

$$\lambda^{-1}(1 - \eta(x, \lambda)) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, P_0(t, x; \langle 0, \infty))\, dt .$$

Tedy

$$\eta(x, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, d_t(1 - P_0(t, x; \langle 0, \infty)) \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} \eta(x, \lambda)\, dp(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dH_2(t) ,$$

kde

$$H_2(t) = \int_0^{\infty} [1 - P_0(t, x; \langle 0, \infty))]\, dp(x) .$$

Funkce $H_2(t)$ je spojitá, neboť $P_0(t, x; \langle 0, \infty))$ je spojitou funkcí t. Spojitost $P_0(t, x; \langle 0, \infty))$ je jednoduchým důsledkem spojitosti odpovídající semigrupy.

Z lemmatu 2 a z předchozího dostáváme:

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1} \int_0^{\infty} (1 - \eta(x, \lambda))\, dp(x) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^{\infty} e^{B(s)}\, ds\, dy \right) dp(x) =$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - H_2(t))\, dt = \int_0^{\infty} t\, dH_2(t) .$$

Jelikož P_0 je pravděpodobnost přechodu procesu s absorpční stěnou, je $H_2(t)$ distribuční funkce doby absorpce částice, jejíž počáteční rozložení je dáno distribuční funkcí $p(x)$. Vidíme tedy, že předpoklad učiněný ve větě je předpoklad konečnosti střední doby absorpce takové částice.

Nechť tedy platí (13). Potom musí být $\int_0^\infty \exp B(s)\, ds < \infty$, a tedy $\int_0^\infty \exp - B(s)\,.$ $.\, ds = \infty$. Tedy jednak $\lim_{t\to\infty} H_1(t) = 1$ a z věty 2 také plyne, že $\int_0^\infty P_0(t, x; dy) f(y)$, což je vzor $\int_0^\infty K^0(x, s) f(s)\, ds$ ve vyjádření (14), konverguje k nule.

Veličina $\eta(x) (\sigma\lambda - \gamma\omega + \tau)^{-1}$ je transformací konvoluce

$$G(t) = \tau^{-1} H_1(t) * [1 - P_0(t, x; \langle 0, \infty))]$$

a celý druhý člen ve vyjádření (14) je Laplaceovou transformací konvoluce $G * H *$ $* (G_1 + G_2)$. Zde H je funkcí obnovy, odpovídající distribuční funkci $H_1 * H_2$, G_1 a G_2 jsou funkce, jejichž Laplaceovými transformacemi jsou výrazy v poslední závorce v (14). Funkce $H_1 * H_2$ je spojitá, neboť H_2 je spojitá. Tedy je $H_1 * H_2$ také neperiodická.

Ukážeme nyní, že pro f z nějaké množiny M, husté v množině funkcí, anulujících se v nule, G_1 a G_2 splňují předpoklady důsledku věty 4. Pro všechny takové funkce bude existence $\lim_{t\to\infty} H * G_1$ a $\lim_{t\to\infty} H * G_2$ a tedy také

$$\lim_{t\to\infty} G * H * (G_1 + G_2) = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty P(t, x; dy) f(y)$$

dokázána.

V dalším budeme používati označení, zavedené v odstavci I. Nahlédneme, že za množinu M můžeme voliti množinu všech $f \in \mathscr{D}(\Omega_0^2)$, které jsou konstantní pro dostatečně velká x. Tato množina je hustá v množině funkcí, anulujících se v nule dle lemmatu 1.

Jelikož $\int_0^\infty \exp B(s)\, ds < \infty$, vidíme, že kdykoliv $f(x) \in \mathscr{D}(\Omega_0)$, pak $f(x) \exp B(x) \in$ $\in \mathscr{D}(\Omega_0^*)$ a platí

$$\Omega_0^*(e^B f) = e^B \Omega_0 f\,. \tag{15}$$

Tedy také kdykoliv $f(x) \in \mathscr{D}(\Omega_0^2)$, potom $f(x) \exp B(x) \in \mathscr{D}(\Omega_0^{*2})$. Budiž nyní $f \in M$. Máme

$$\int_0^\infty \bar{\eta}(s) f(s)\, ds = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, d_t \int_0^\infty (1 - P_0(t, s; \langle 0, \infty)))\, e^{B(s)} f(s)\, ds =$$

$$= - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, d_t \int_0^\infty v_0(t, x; e^B f)\, dx\,.$$

Z toho, že $f \exp B \in \mathscr{D}(\Omega_0^{*2})$, plyne, že existují dvě derivace podle t v prostoru L funkce $v_0(t, x; f \exp B)$ a že jsou spojité. Tento bezprostřední důsledek definice infinitesimálního operátoru je znám z teorie semigrup. Odtud plyne, že $\int_0^\infty v_0(t, x; f \exp B)\, dx$ má dvě spojité derivace. Tedy $\int_0^\infty \bar{\eta}(s) f(s)\, ds$ je Laplaceovou transformací funkce

$-\mathrm{d}/\mathrm{d}t \int_0^\infty v_0(t, x; f \exp B)\,\mathrm{d}x$, která má na každém omezeném intervalu konečnou variaci. Dále je

$$\int_0^\infty Q_0(s) f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^\infty u_0(t, x; f)\,\mathrm{d}p(x) \right\} \mathrm{d}t\,.$$

Jelikož $f \in \mathscr{D}(\Omega_0)$, má $u_0(t, x; f)$ derivaci ve smyslu stejnoměrné metriky a spojitou v této metrice. Tedy $\int_0^\infty u_0(t, x; f)\,\mathrm{d}p(x)$ má spojitou derivaci. Vidíme, že také $\int_0^\infty Q_0(s) f(s)\,\mathrm{d}s$ je Laplaceovou transformací funkce, která má na každém omezeném intervalu konečnou variaci.

Zbývá ještě najíti majorantní funkce, aby bylo vyhověno všem předpokladům důsledku věty 4. Položme $\Omega_0^* f \exp B = g$. Máme

$$\left| -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^\infty v_0(t, x; e^B f)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^\infty v_0(t, x; g)\,\mathrm{d}x \right| \leqq \int_0^\infty v_0(t, x; |g|)\,\mathrm{d}x = K_1(t)\,,$$

$K_1(t)$ je nerostoucí;

$$\int_0^\infty K_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^\infty P_0(t, x; \langle 0, \infty)) \, |g(x)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \right) |g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Jelikož f je konstantní pro dostatečně velká x, ze vztahu (15) vidíme, že $g(x) = 0$ pro dostatečně velká x. Tedy $\int_0^\infty K_1(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Dále je

$$\left| \int_0^\infty u_0(t, x; f)\,\mathrm{d}p(x) \right| \leqq \|f\| \int_0^\infty P_0(t, x; \langle 0, \infty))\,\mathrm{d}p(x) = K_2(t)\,,$$

$$\int_0^\infty K_2(t)\,\mathrm{d}t = \|f\| \int_0^\infty \int_0^\infty P_0(t, x; \langle 0, \infty))\,\mathrm{d}p(x)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \|f\| \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_0^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}p(x)\,.$$

Za předpokladu (13) poslední výraz je konečný.

Dokázali jsme pro $f \in M$ existenci $\lim_{t \to \infty} \int_0^\infty P(t, x; \mathrm{d}y) f(y)$, a tedy, jak bylo poznamenáno na začátku důkazu, existenci limity $P(t, x; \langle 0, z))$ ve smyslu konvergence distribučních funkcí. Abychom zjistili limitní distribuční funkci, najdeme:

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda \int_0^\infty P(t, x; \langle 0, z)) \exp - \lambda t\,\mathrm{d}t\,.$$

Je (bez předpokladu (13)):

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x; \langle 0, z))\,\mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to 0+} \left\{ \lambda \int_0^z K^0(x, s)\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$+ \eta(x) \cdot \left[\sigma - \gamma\lambda^{-1}\omega + \tau\lambda^{-1}\left(1 - \int_0^\infty \eta(x)\,\mathrm{d}p(x)\right)\right]^{-1} \left[\sigma + \gamma \int_0^z \bar{\eta}(s)\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \tau \int_0^z Q_0(s)\,\mathrm{d}s \right]\Bigg\} = \left[\tau \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}p(x) + \gamma \int_0^\infty e^{B(x)}\,\mathrm{d}x + \sigma\right]^{-1} .$$

$$\cdot \left[\sigma + \gamma \int_0^z e^{B(x)}\,\mathrm{d}x + \tau \int_0^z \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^z e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}p(x) + \right.$$

$$\left. + \tau(1 - p(z)) \int_0^z e^{B(y)} \int_0^y e^{-B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \right].$$

Zde jsme použili výsledků odstavce I. Vidíme také, že v případě, když

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}p(x) = \infty ,$$

pravá strana je nula, a tedy $P(t, x; \langle 0, z))$ nemůže konvergovat k distribuční funkci nějaké pravděpodobnostní míry na $\langle 0, \infty)$. Tím je důkaz věty ukončen.

IV. V tomto odstavci budeme rozbírat poslední případ, kdy $\tau = p = q = 0$. Použitá metoda je zobecněním metody použité v [3]. Opírá se o vyšetřování adjungované semigrupy. Budiž nejprve $\sigma \neq 0$. Adjungovanou semigrupu není nutno studovat v prostoru všech měr, ale je možno se omezit na prostor $\bar{L}$, což je množina všech dvojic $(g_0, g(x))$, kde g_0 je číslo a $g(x) \in L$,

$$\|(g_0, g(x))\| = |g_0| + \int_0^\infty |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$\bar{L}$ je prostor měr absolutně spojitých na $\langle 0, \infty))$.

Ze vzorce (4) usoudíme, že resolventní operátor adjungované semigrupy převádí prvek $(g_0, g(x))$ v prvek $(G_0, G(x))$ daný vztahy

$$(16)\quad G(x) = \int_0^\infty K_0(s, x)\, g(s)\,\mathrm{d}s + (\sigma\lambda - \gamma\omega)^{-1} \left(g_0 + \int_0^\infty \eta(s)\, g(s)\,\mathrm{d}s\right) \gamma\, \bar{\eta}(x) ,$$

$$G_0 = \sigma(\sigma\lambda - \gamma\omega)^{-1} \left(g_0 + \int_0^\infty \eta(s)\, g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Odtud je možno s použitím tvrzení uvedených v odstavci I ověřiti (viz [1], str. 501), že infinitesimálním operátorem této semigrupy je operátor Ω^*, do jehož definičního oboru patří ty prvky $(g_0, g(x))$, pro které je $g(x) \in \mathcal{D}(\Omega_1^*)$, a platí $\gamma g_0 = \sigma\, g(0)$. Takovým prvkům pak operátor Ω^* přiřazuje prvek $(G_0, G(x))$ daný vztahy

$$G_0 = g'(0) - b(0)\, g(0) , \quad G(x) = \Omega_1^*\, g(x) .$$

Budeme užívat tohoto označení: Zapíšeme-li stručně $\tilde{g} = (g_0, g(x))$, pak $(v_0(t; \tilde{g}), v(t, x; \tilde{g}))$, resp. krátce $\tilde{v}(t; \tilde{g})$, bude ten prvek z $\bar{L}$, který je přiřazen prvku $\tilde{g}$ operátorem semigrupy, odpovídajícím parametru t.

V případě $\sigma = 0$ je možno vyšetřovati adjungovanou semigrupu v prostoru L, který budeme ztotožňovat s podprostorem určeným podmínkou $g_0 = 0$. Resolventní operátor má v tomto případě tvar

$$\mathscr{R}_\lambda^* \, g(x) = \int_0^\infty K_0(s, x) \, g(s) \, \mathrm{d}s - \omega^{-1} \int_0^\infty \eta(s) \, g(s) \, \mathrm{d}s \, \boldsymbol{\eta}(x) \, .$$

Infinitesimálním operátorem semigrupy je zúžení operátoru Ω_1^* okrajovou podmínkou $f'(0) - b(0) f(0) = 0$.

Lemma 3. *Nechť* $\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$; *pak funkce* $w(t, x) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t \int_x^\infty v(t, y; \tilde{g}) \, \mathrm{d}y$ *je spojitá pro* $t \geqq 0$, $x \geqq 0$ *a vyhovuje uvnitř tohoto oboru rovnici*

$$w_{xx} - b w_x = w_t \tag{17}$$

s okrajovou podmínkou

$$\gamma w = \sigma w_x|_{x=0} \, . \tag{18}$$

Je $\lim_{x \to \infty} w(t, x) = 0$ *stejnoměrně na omezených intervalech* t.

Důkaz. Budiž $\sigma \neq 0$. Jednoduché změny, které by bylo třeba učiniti v případě $\sigma = 0$, jsou ihned patrné. Když $\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^*)$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{v}(t; \tilde{g}) = \Omega^* \, \tilde{v}(t; \tilde{g}) = \tilde{v}(t; \Omega^* \tilde{g}) \, ,$$

při čemž derivace existuje v normě prostoru $\bar{L}$. Speciálně tedy pro každý lineární funkcionál Λ v $\bar{L}$ máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Lambda[\tilde{v}(t; \tilde{g})] = \Lambda\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{v}(t; \tilde{g})\right].$$

Odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^\infty v(t, x; \tilde{g}) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \Omega_1^* \, v(t, x; \tilde{g}) \, \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x) \, v(t, x; \tilde{g})|_0^\infty \, .$$

Na druhé straně vzhledem k tomu, že transformace zachovává positivitu a normu nezáporných funkcí (viz věta 1), nahlédneme (v obecném případě rozkladem na kladnou a zápornou část), že

$$g_0 + \int_0^\infty g(x) \, \mathrm{d}x = v_0(t; \tilde{g}) + \int_0^\infty v(t, x; \tilde{g}) \, \mathrm{d}x \, .$$

Tedy je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^\infty v(t, x; \tilde{g}) \, \mathrm{d}x = - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_0(t; \tilde{g}) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x) \, v(t, x; \tilde{g})\right)_{x=0} \, .$$

Z toho všeho plyne, že je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x) \, v(t, x; \tilde{g}) = 0 \, .$$

Máme tedy pro $\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$

$$w(t, x) = \frac{d}{dt}\int_x^\infty v(t, y; \tilde{g})\, dy = \int_x^\infty \Omega_1^*\, v(t, y; \tilde{g})\, dy = -\left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x)\, v(t, x; \tilde{g})\right)$$

a dále

$$w_t = \frac{d}{dt}\int_x^\infty v(t, y; \Omega^*\tilde{g})\, dy = \int_x^\infty \frac{d}{dt} v(t, y; \Omega^*\tilde{g})\, dy = \int_x^\infty \Omega_1^*\, v(t, y; \Omega^*\tilde{g})\, dy =$$

$$= \int_x^\infty \Omega_1^{*2}\, v(t, y; \tilde{g})\, dy = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\, \Omega_1^* v - b\Omega_1^* v\right) = w_{xx} - bw_x\,.$$

Pomocí rozboru posledního vztahu, využívajíce předpokladu $\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$, nahlédneme, že derivace je možno uvažovat v obyčejném smyslu.

Máme dále

$$|w(t_1, x) - w(t_2, x)| = \left|\int_x^\infty v(t_1, y; \Omega^*\tilde{g})\, dy - \int_x^\infty v(t_2, y; \Omega^*\tilde{g})\, dy\right| \leqq$$

$$\leqq \|\tilde{v}(t_1, \Omega^*\tilde{g}) - \tilde{v}(t_2, \Omega^*\tilde{g})\|\,.$$

Odtud plyne, že $w(t, x)$ je spojitá v t stejnoměrně vzhledem k x. Tedy jednak, jelikož je spojitá v x, je w spojitou v (t, x), jednak vztah

$$\lim_{x\to\infty} w(t, x) = \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x)\, v(t, x; \tilde{g})\right) = 0$$

platí stejnoměrně v t z omezených intervalů.

Zbývá ještě dokázati splnění okrajové podmínky. Jsou splněny tyto rovnice ($\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$):

$$\frac{d}{dt} v_0(t; \tilde{g}) = \frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x) v(t, x; \tilde{g})|_{x=0}\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x; \tilde{g}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x)\, v(t, x; \tilde{g})\right),$$

$$\gamma\, v_0(t; \tilde{g}) = \sigma\, v(t, 0; \tilde{g})\,.$$

Derivováním poslední rovnice a dosazením z předchozích rovnic dostáváme okrajovou podmínku, bereme-li v úvahu, že

$$w(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x)\, v(t, x; \tilde{g})\,.$$

Řekneme, že množina $M \subset P$ je *fundamentální* v prostoru P, když lineární kombinace prvků množiny M jsou husté v P. Učiňme dohodu, že pod $\tilde{L}$ budeme rozumět prostor $\tilde{L}$ v případě, kdy $\sigma \neq 0$, a podprostor všech $\tilde{g} = (g_0, g(x)) \in \tilde{L}$, splňujících $g_0 = 0$ v případě, kdy $\sigma = 0$. Když $\sigma = 0$, pak bude $v_0(t; \tilde{g}) \equiv 0$ pro $\tilde{g} \in \tilde{L}$.

Lemma 4. *Budiž $\gamma \neq 0$. Množina všech $(g_0, g(x)) \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$, pro něž $g'(x) - b(x)$ . . $g(x) \leqq 0$ je fundamentální v $\tilde{L}$. Jestliže $\int_0^\infty \exp B(x)\, dx < \infty$, pak také množina* *všech nezáporných* $(g_0, g(x)) \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$, *pro něž* $g'(x) - b(x)\, g(x) \geqq 0$ *je fundamentální v* $\tilde{L}$.

Důkaz. Při důkaze vynecháme některé detaily. Když $\tilde{g} = (\sigma/\gamma,\, h(x) \exp B(x))$, kde

$$h(x) = 1 + c \int_0^x e^{-B(y)}\, \mathrm{d}s + \int_0^x e^{-B(y)} \int_0^y \varphi(z)\, e^{B(z)}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y \quad (c = 0 \text{ pro } \sigma = 0)\,,$$

potom $\Omega^* \tilde{g} = (h'(0), \varphi(x) \exp B(x))$. K tomu, aby $\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$, stačí, aby bylo $h \exp B \in L$, aby φ měla na $\langle 0, \infty)$ dvě derivace spojité, $\varphi(x) = 0$ pro $x \geqq K$ a aby byla splněna okrajová podmínka $\gamma\, h'(0) = \gamma c = \sigma\, \varphi(0)$, tj. $c = \sigma/\gamma\, \varphi(0)$. (V případě $\sigma = 0$ ještě $\varphi'(0) = 0$.) Potom bude

$$h(x) = 1 + \int_0^x e^{-B(y)} \left(\frac{\sigma}{\gamma}\, \varphi(0) + \int_0^y \varphi(z)\, e^{B(z)}\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y\,.$$

Funkce $g(x) = h(x) \exp B(x)$ bude integrovatelná a bude platit $g' - bg \geqq 0$, když $h'(x) \geqq 0$ a $h(x) = 0$ pro $x \geqq K$. To je možno docíliti, volíme-li φ tak, aby bylo $\varphi(0) = 0$ ($\varphi'(0) = 0$ v případě $\sigma = 0$), $\varphi(z) = 0$ pro $z \geqq K$,

$$\int_0^K e^{-B(y)} \int_0^y \varphi(z)\, e^{B(z)}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y = -1\,, \quad \int_0^x \varphi(z)\, e^{B(z)}\, \mathrm{d}z \leqq 0\,, \quad \int_0^K \varphi(z)\, e^{B(z)}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

Rozborem výrazu

$$1 + \int_0^x e^{-B(y)} \int_0^y \varphi(z)\, e^{B(z)}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y$$

je pak možno nahlédnout, že množina takto vyjadřitelných funkcí (volíme-li také různá K), je fundamentální v prostoru L.

Budiž nyní $(f_0, f(x))$ libovolný prvek z $\tilde{L}$ a budiž $\varepsilon > 0$. Nechť pro prvek $(g_0, g(x))$, který je lineární kombinací prvků právě sestrojených, platí $\int_0^\infty |g(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x < \varepsilon/2$. Je-li $f_0 = g_0$, jsme s důkazem hotovy. (Vždy v případě $\sigma = 0$.) Jinak volme funkci $k(x)$ tvaru výše sestrojeného takovou, že $\int_0^\infty |k(x)|\, \mathrm{d}x < \varepsilon/2|C|$, kde C je zvoleno tak, že $\sigma C/\gamma = f_0 - g_0$. Potom prvek $(f_0, g(x) + C\, k(x))$ má od $(f_0, f(x))$ vzdálenost menší než ε.

V případě, kdy $\int_0^\infty \exp B(x)\, \mathrm{d}x < \infty$, nahlédneme, že fundamentální množinu pro důkaz druhé části lemmatu tvoří prvek $(\sigma/\gamma, \exp B(x))$ a prvky tvaru $(0, (1 - h(x))\,.$ $.\exp B(x))$, kde $h(x)$ má tvar, jak byl sestrojen.

Po těchto předběžných úvahách budeme pokračovat ve vyšetřování limitního chování pravděpodobností. Případ $\gamma = 0$ (laterální podmínka $\Omega_1\, F(x)|_{x=0} = 0$) je analogický případu absorpční stěny. Částice, když dorazila do bodu 0, v něm setrvává. Proto platí tato věta analogická větě 2:

Věta 6. *K tomu, aby pro proces určený laterální podmínkou* $\Omega_1\, F(x) = 0|_{x=0}$ *platilo* $\lim_{t \to \infty} P(t, x; \{0\}) = 1$, *je nutné a stačí, aby* $\int_0^\infty \exp - B(x)\, \mathrm{d}x = \infty$.

Důkaz. Je podle vzorce (4)

$$\int_0^\infty P(t, x; \{0\}) \exp - \lambda t \, dt = \eta(x) \lambda^{-1} .$$

Po dosazení $x = 0$ vidíme, že $P(t, 0; \{0\}) = 1$. Tedy $P(t, x; \{0\})$ je neklesající a má pro $t \to \infty$ limitu, která je rovna

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x; \{0\}) \, dt = \eta(0) = 1 - \left(\int_0^\infty e^{-B(s)} \, ds \right)^{-1} \int_0^x e^{B(s)} \, ds .$$

Odtud plyne tvrzení věty.

Věta 7. *Pro každé $\tilde{g} \in \tilde{L}$ existuje $\lim_{t \to \infty} \int_z^\infty v(t, x; \tilde{g}) \, dx$ pro všechna $z \geqq 0$. Existuje tedy také $\lim_{t \to \infty} v_0(t, \tilde{g})$.*

Důkaz. Budiž nejprve $\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$ takové, že $g'(x) - b(x) g(x) \leqq 0$. Z lemmatu 3 vidíme, že

$$\frac{d}{dt} \int_x^\infty v(t, y; \tilde{g}) \, dy = - \left(\frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x) v(t, x; \tilde{g}) \right) = w(t, x)$$

je řešení rovnice (17) s okrajovou podmínkou (18), splňující $w(0, x) \geqq 0$. Jak známo, takové řešení (vezmeme-li ještě v úvahu, že je $\lim_{x \to \infty} w(t, x) = 0$ stejnoměrně na omezených množinách t), je nezáporné pro všechna (t, x). Tedy

$$\frac{d}{dt} \int_x^\infty v(t, y; \tilde{g}) \, dy \geqq 0 ,$$

a proto $\int_x^\infty v(t, y; \tilde{g}) \, dy$ je neklesající funkcí t a $\lim_{t \to \infty} \int_x^\infty v(t, y; \tilde{g}) \, dy$ existuje a je konečná, neboť $|\int_x^\infty v(t, y; \tilde{g}) \, dy| \leqq \|\tilde{g}\|$. Jestliže $\tilde{h}$ je lineární kombinací funkcí $\tilde{g}$ právě požadovaných vlastností, existuje také $\lim_{t \to \infty} \int_x^\infty v(t, y; \tilde{h}) \, dy$. Podle lemmatu 4 tyto lineární kombinace jsou husté v $\tilde{L}$. Máme pak pro libovolné $\tilde{f} \in \tilde{L}$:

$$\left| \int_x^\infty v(t_1, y; \tilde{f}) \, dy - \int_x^\infty v(t_2, y; \tilde{f}) \, dy \right| \leqq \left| \int_x^\infty v(t_1, y; \tilde{f} - \tilde{h}) \, dy \right| +$$

$$+ \left| \int_x^\infty v(t_1, y; \tilde{h}) \, dy - \int_x^\infty v(t_2, y; \tilde{h}) \, dy \right| + \left| \int_x^\infty v(t_2, y; \tilde{f} - \tilde{h}) \, dy \right| \leqq$$

$$\geqq 2\|\tilde{f} - \tilde{h}\| + \left| \int_x^\infty v(t_1, y; \tilde{h}) \, dy - \int_x^\infty v(t_2, y; \tilde{h}) \, dy \right| .$$

Odtud se přesvědčíme, že $\int_x^\infty v(t, y; \tilde{f}) \, dy$ vyhovují Cauchyově podmínce, neboť $\tilde{f}$ můžeme libovolně přiblížit funkci $\tilde{h}$, pro níž limita existuje. Existuje tedy

$$\lim_{t \to \infty} \int_x^\infty v(t, y \tilde{f}) \, dy .$$

Ze vztahu

$$v_0(t;\tilde g) + \int_0^\infty v(t,y;\tilde g)\,\mathrm{d}y = g_0 + \int_0^\infty g(y)\,\mathrm{d}y$$

(viz důkaz lemmatu 3) nahlédneme, že existuje také

$$\lim_{t\to\infty} v_0(t;\tilde g) \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty}\int_0^x v(t,y;\tilde g)\,\mathrm{d}y\,.$$

Věta 7. *Kdykoliv* $\int_0^\infty \exp B(s)\,\mathrm{d}s = \infty$, *pak pro každé* $\tilde g \in \tilde L$, $0 \leqq x < \infty$ *je*

$$\lim_{t\to\infty} v_0(t;\tilde g) = 0 = \lim_{t\to\infty}\int_0^x v(t,y;\tilde g)\,\mathrm{d}y\,.$$

Když $\int_0^\infty \exp B(s)\,\mathrm{d}s < \infty$, *pak je*

$$\lim_{t\to\infty} v_0(t;\tilde g) = \sigma\left(\sigma + \gamma\int_0^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{-1}\left(g_0 + \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^x v(t,y;\tilde g)\,\mathrm{d}y = \gamma\left(\sigma + \gamma\int_0^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{-1}\left(g_0 + \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x\right)\int_0^x e^{B(y)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Důkaz. Existence limit plyne z předchozí věty. Stačí tedy určit jejich hodnotu. Označme $\beta = \left(\int_0^\infty \exp - B(y)\,\mathrm{d}y\right)^{-1}$. Ze vzorce (16) s použitím lemmatu 2 máme:

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} v_0(t;\tilde g)\,\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to 0+}\sigma(\sigma - \gamma\omega\lambda^{-1})^{-1}\left(g_0 + \int_0^\infty \eta(s)\,g(s)\,\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \sigma\,.\left(\sigma + \gamma\int_0^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{-1}\left(g_0 + \int_0^\infty\left(1 - \beta\int_0^x e^{-B(s)}\,\mathrm{d}s\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^x v(t,y;\tilde g)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to 0+}\gamma\,(\sigma - \gamma\omega\lambda^{-1})^{-1}\,.$$

$$.\left(g_0 + \int_0^\infty \eta(s)\,g(s)\,\mathrm{d}s\right)\int_0^x \bar\eta(y)\,\mathrm{d}y = \gamma\left(\sigma + \gamma\int_0^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

$$.\left(g_0 + \int_0^\infty\left(1 - \beta\int_0^x e^{-B(s)}\,\mathrm{d}s\right)g(x)\,\mathrm{d}x\right).\int_0^x\left(1 - \beta\int_0^y e^{-B(s)}\,\mathrm{d}s\right)e^{B(y)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Odtud snadno plyne tvrzení věty, uvážíme-li, že $\beta = 0$, když $\int_0^\infty \exp B(s)\,\mathrm{d}s < \infty$.

Věta říká, že částice uniká do nekonečna, když $\int_0^\infty \exp B(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. Tvrzení věty 8 je možno ještě zesílit:

Věta 9. *Nechť* $\int_0^\infty \exp B(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, *pak pro každé* $\tilde g \in \tilde L$ *je*

$$\lim_{t\to\infty} v(t,x;\tilde g) = \gamma\left(\sigma + \gamma\int_0^\infty e^{B(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{-1} e^{B(x)}\left(g_0 + \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

podle středů prvního řádu.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že integrovatelnost funkcí $v(t, x; \tilde{g})$ je stejnoměrná v t. Nechť

$$\tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2}), \quad \tilde{g} = (g_0, g(x)), \quad g(x) \geqq 0, \quad g'(x) - b(x)\, g(x) \geqq 0 .$$

Z lemmatu 4 plyne, že funkce splňující tyto podmínky tvoří fundamentální množinu. Vyšetřením funkce

$$w(t, x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_x^\infty v(t, y; \tilde{g})\, \mathrm{d}y$$

způsobem použitým při důkaze věty 7 se přesvědčíme, že v tomto případě $\int_x^\infty v(t, y; \tilde{g})\, .$ $.\, \mathrm{d}y$ je nerostoucí funkcí t a tedy

$$\int_x^\infty v(t, y; \tilde{g})\, \mathrm{d}y \leqq \int_x^\infty g(y)\, \mathrm{d}y .$$

Z nezápornosti uvažovaných funkcí plyne rovnoměrná integrovatelnost $v(t, x; \tilde{g})$, která platí i pro $\tilde{h}$ z lineárního obalu množiny funkcí předpokládaných vlastností, který je hustý v $\tilde{L}$.

Jestliže $\tilde{f} \in \tilde{L}$, máme

$$\int_x^\infty |v(t, y; \tilde{f})|\, \mathrm{d}y \leqq \int_x^\infty |v(t, y; \tilde{h})|\, \mathrm{d}y + \|\tilde{f} - \tilde{h}\| .$$

Odtud libovolným přiblížením prvku $\tilde{f}$ prvkem $\tilde{h}$ z lineárního obalu plyne rovnoměrná integrovatelnost $v(t, y; \tilde{f})$.

Budiž $(g_0, g(x)) = \tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega^{*2})$. Dokážeme, že na libovolném intervalu $\langle 0, K\rangle$ má funkce $v(t, x; \tilde{g})$ variaci omezenou nezávisle na t. Položme

$$w(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} v(t, x; \tilde{g}) - b(x)\, v(t, x; \tilde{g}) .$$

Integrováním dostáváme

$$v(t, x; \tilde{g}) - v(t, 0; \tilde{g}) = \int_0^x (w(t, s) + b(s)\, v(t, s; \tilde{g}))\, \mathrm{d}s .$$

Tedy

$$\operatorname{var}_0^K v(t, x; \tilde{g}) = \int_0^K |w(t, s) + b(s)\, v(t, s; \tilde{g})|\, \mathrm{d}s < C ,$$

neboť funkce $w(t, s)$, jakožto řešení rovnice (17) splňující podmínky lemmatu 3, je omezená pro všechna (t, s) a platí

$$\int_0^K |b(s)\, v(t, s; \tilde{g})|\, \mathrm{d}s \leqq \max_{\langle 0,K\rangle} |b(x)| \,.\, \int_0^K |v(t, s; \tilde{g})|\, \mathrm{d}s \leqq \max_{\langle 0,K\rangle} |b(x)|\, \|\tilde{g}\| .$$

Když je $\sigma \neq 0$, z okrajové podmínky $\gamma\, v_0(t; \tilde{g}) = \sigma\, v(t, 0; \tilde{g})$ plyne, že $v(t, 0; \tilde{g})$ je omezená funkce, neboť $|v_0(t; \tilde{g})| \leqq \|\tilde{g}\|$. Budiž $\sigma = 0$. Jelikož je $\int_0^\infty \exp B(x)\, \mathrm{d}x < \infty$, platí pro každé $f \in C$

$$u(t, x; f)\, e^{B(x)} = v(t, x; f e^B) .$$

Zde $u(t, x; f)$ má význam, zavedený na počátku práce. Rovnost lze ověřiti s použitím diferenciálních rovnic, kterým funkce u, v vyhovují, kdykoliv f resp. $f \exp B$ patří do definičního oboru infinitesimálního operátoru a použitím jednoznačnosti těchto úloh (viz [2]). Potom ovšem

$$|v(t, 0; fe^B)| = |u(t, 0; f)| \leqq \max_x |f(x)| .$$

Nechť tedy $\tilde{g}$ je takové, že $\operatorname{var}_0^K v(t, x; \tilde{g})$ pro libovolné konečné K a $|v(t, 0; \tilde{g})|$ jsou omezené. Potom také $v(t, x; \tilde{g})$ je omezená pro $0 \leqq x \leqq K$. Rozložme $v(t, x; \tilde{g})$ na rozdíl dvou neklesajících funkcí na intervalu $\langle 0, K \rangle$:

$$v(t, x; \tilde{g}) = \{\operatorname{var}_0^x v(t, y; \tilde{g}) + \tfrac{1}{2} v(t, x; \tilde{g})\} - \{\operatorname{var}_0^x v(t, y; \tilde{g}) - \tfrac{1}{2} v(t, x; \tilde{g})\} .$$

Z libovolné posloupnosti $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ můžeme podle Hellyovy věty vybrat podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ tak, že obě monotonní složky konvergují v podstatě. Potom ovšem $v(t_{n_k}, x; \tilde{g})$ konverguje skoro všude na intervalu $\langle 0, K \rangle$, a jelikož je omezená, konverguje také podle středů na $\langle 0, K \rangle$. Z věty 8 snadno plyne, že limita je rovna

$$\gamma \left(\sigma + \gamma \int_0^\infty e^{B(s)} \, ds \right)^{-1} e^{B(x)} \left(g_0 + \int_0^\infty g(x) \, dx \right).$$

Jelikož $\{t_n\}$ byla libovolná, vidíme, že $v(t, x; \tilde{g})$ pro $t \to \infty$ konverguje k této funkci podle středů na $\langle 0, K \rangle$. Kombinujeme-li tuto vlastnost s již dokázanou rovnoměrnou integrovatelností, vidíme, že $v(t, x; \tilde{g})$ konverguje podle středů na $\langle 0, \infty)$. Použitím kontraktivnosti transformací $v(t, x; .)$ ověříme, že tvrzení platí pro libovolné $\tilde{g} \in \tilde{L}$.

Poznámka. Omezili jsme se na procesy, ohraničené jednou přirozenou a jednou regulární hranicí. Metody předložené v práci je však možno použít i ke studiu procesů s hranicemi druhých typů. Stejně tak je známo, že použití speciálního typu diferenciálního operátoru (koeficient u druhé derivace identicky rovný 1), není omezením. Můžeme totiž záměnou nezávisle proměnné operátory na tento typ převádět.

Literatura

[1] *Feller W.*: The parabolic differential equation and the associated semi-groups of transformations. Annals of Mathematics *55* (1952), 468–519.

[2] *Hille E.*: The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations. Journal d'Analyse Mathématique *3* (1953–54), 81–196.

[3] *Mandl P.*: Les propriétés limites des répartitions de probabilité des processus de Markov bornés. Transactions of the second Prague conference on information theory. Prague 1960, 329–348.

[4] *W. L. Smith*: Asymptotic Renewal Theorems. Proc. of the Royal. Soc. of Edinburgh *64* (1953), 9–48.

[5] *W. L. Smith*: Regenerative stochastic processes. Proc. of the Royal Soc. of London *232* (1955), 6–31.

[6] *А. Д. Вентцель:* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка. Доклады А. Н. СССР *111* (1956), 269–272.

Резюме

СВОЙСТВА ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ОБЩЕГО ВИДА

ПЕТР МАНДЛ, (Petr Mandl), Прага

Работа посвящена диффузионным процессам на полупрямой $\langle 0, \infty)$, вероятности перехода $P(t, x; A)$ которых определяют в пространстве функций, непрерывных на $\langle 0, \infty\rangle$, полугруппу преобразований $\int P(x, t; \mathrm{d}y) F(y)$, инфинитезимальный оператор которой является сужением оператора $\Omega_1 F = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 F + b(x)\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x F$, условием

$$pF(0) = qF(\infty) + \tau \int_{0+}^{\infty} F(x)\, \mathrm{d}p(x) - \sigma\Omega_1 F(x)|_{x=0} + \gamma F'(0)\,. \tag{2}$$

Здесь p, q, σ, γ, τ — неотрицательные числа, $p(x)$ — функция распределения. Существование таких процессов было доказано В. Фелером в работе [1].

В настоящей работе показано, каким образом предельное поведение вероятностей $P(t, x; A)$ при $t \to \infty$ зависит от коэффициента $b(x)$ в операторе Ω_1 и условия (2). Например, доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. *Пусть $p = \tau \neq 0$. Для того, чтобы вероятностная мера $P(t, x; A)$ на интервале $\langle 0, \infty)$ сходилась в смысле сходимости функций распределения при $t \to \infty$ к некоторой вероятностной мере, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^{\infty} e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}p(x) < \infty\,,$$

где $B(y) = \int_0^y b(s)\, \mathrm{d}s$.

Теорема 9. *Пусть $\tau = p = q = 0$, $\int_0^{\infty} e^{B(x)}\, \mathrm{d}x < \infty$. Тогда для всякого начального распределения вероятностей, которое абсолютно непрерывно внутри $(0, \infty)$, плотность распределения в этом интервале сходится для $t \to \infty$ в среднем к функции*

$$\gamma(\sigma + \gamma \int_0^{\infty} e^{B(s)}\, \mathrm{d}s)^{-1}\, e^{B(x)}\,.$$

Zusammenfassung

EIGENSCHAFTEN DER DIFFUSIONSPROZESSE, WELCHE DURCH EINE RANDBEDINGUNG ALLGEMEINER FORM BESTIMMT SIND

PETR MANDL, Praha

Die Arbeit ist den Diffusionsprozessen auf der Halbgeraden $\langle 0, \infty)$ gewidmet, deren Übergangswahrscheinlichkeiten $P(t, x; A)$ im Raume der auf dem Intervalle $\langle 0, \infty\rangle$ stetigen Funktionen eine Halbgruppe von Transformationen $\int P(x, t; \mathrm{d}y) F(y)$ definieren, deren infinitesimaler Operator eine Verengung des Operators

$$\Omega_1 F = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F + b(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F$$

durch die Bedingung

$$p\, F(0) = q\, F(\infty) + \tau \int_{0+}^{\infty} F(x)\, \mathrm{d}p(x) - \sigma \Omega_1\, F(x)|_{x=0} + \gamma\, F'(0) \tag{2}$$

darstellt. Hier $p, q, \sigma, \gamma, \tau$ sind nichtnegative Zahlen, $p(x)$ ist eine Verteilungsfunktion. Die Existenz solcher Prozesse wurde von W. FELLER in der Arbeit [1] bewiesen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, auf welche Weise hängt das Grenzverhalten für $t \to \infty$ der Wahrscheinlichkeiten $P(t, x; A)$ von dem Koeffizienten $b(x)$ in dem Operator Ω_1 und von der Bedingung (2) ab. Es sind zum Beispiel folgende Sätze bewiesen:

Satz 5. *Es sei $p = \tau \neq 0$. Für die Konvergenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes $P(t, x; A)$ auf dem Intervalle $\langle 0, \infty)$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaße im Sinne der Konvergenz der Verteilungsfunktionen für $t \to \infty$ ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-B(y)} \int_y^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}p(x) < \infty\,,$$

wo $B(y) = \int_0^y b(s)\, \mathrm{d}s$.

Satz 9. *Es sei $\tau = p = q = 0$, $\int_0^\infty e^{B(x)}\, \mathrm{d}x < \infty$. Dann für jede Anfangsverteilung, welche im Innern von $(0, \infty)$ absolut stetig ist, strebt die Dichte der Verteilung in diesem Intervalle für $t \to \infty$ im Mittel gegen die Funktion*

$$\gamma(\sigma + \gamma \int_0^\infty e^{B(s)}\, \mathrm{d}s)^{-1}\, e^{B(x)}\,.$$