Václav Havel

Sur la solution strictement positive d'un système d'équations linéaires homogènes

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 22--30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117411`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

SUR LA SOLUTION STRICTEMENT POSITIVE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES HOMOGÈNES

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Reçu le 9 septembre 1960)

Dans ce Mémoire, on étudie certaines conditions caractérisant des systèmes d'équations linéaires homogènes â la solution strictement positive. Pour formuler ces conditions, on se sert en général de l'interprétation hyperspatiale: traces minimales, répartition des ensembles ponctuels sur une hypersphère, projections sur les hyperplans des coordonnées, systèmes d'hyperplans passant par le sous-espace donné.

Nous allons commencer par quelques notions préliminaires. Par le symbole E_d nous désignerons l'espace euclidien réel à d dimensions, muni d'une base orthonormale d'origine O. L'enveloppe linéaire sera dénotée par l'emploi de parenthèses pointues $\langle\, , \rangle$; les coordonnées des points seront aussi écrites sous forme de colonnes. L'ensemble des points de E_d dont toutes les coordonnées sont positives sera appelé ortant positif de l'espace E_d; l'hypersphère (prise comme hypersurface) dans E_d ayant O pour son centre et de rayon 1 sera dite unitaire.

Une suite finie (non-vide) de points de l'espace E_m, différents du point O, sera appelée système. Le rang d'un système de points $A_1, \ldots, A_n$ sera défini comme la dimension du sous-espace $\langle O, A_1, \ldots, A_n \rangle$. Nous entendrons par sous-système donné $A_1, \ldots, A_n$ toute sous-suite non-vide $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ dela suite donnée $A_1, \ldots, A_n$, $i_1 < \ldots < i_m$, $m \leqq n$.

Le système donné sera dit simple si son rang égale au nombre de ses points moins un. Le système $A_1, \ldots, A_n$ sera dit admissible si l'équation $A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n = O$ admet une solution strictement positive, c'est-à-dire telle que $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$.

Première interprétation. On peut associer à tout système

$$\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}\,, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{1}$$

un sous-espace linéaire $\alpha \subset E_n$, donné par l'équation

$$A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n = 0 \tag{2}$$

c'est-à-dire par le système d'équations

$$(3) \qquad a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

À tout sous-système $\mathfrak{A}' = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n'}}\}$ il est possible de faire correspondre, dans le sous-espace $E_{n'}$ engendré par l'i_1-ème, ..., l'$i_{n'}$-ème axe de l'espace E_n, le sous-espace $\alpha' = \alpha \cap E_{n'}$, appelé trace du sous-espace α dans $E_{n'}$. Un sous-système $\mathfrak{A}'$ simple est alors caractérisé par le fait que α' est une droite. On peut l'exprimer encore de la façon suivante: l'ensemble de toutes les traces du sous-espace α peut être partiellement ordonné par la relation de contenance; les traces se réduisant à l'origine correspondent alors à l'élément minimum (élément zéro). Les sous-systèmes simples correspondent aux éléments qui recouvrent cet élément zéro. Le système donné (1) est admissible si et seulement si le sous-espace correspondant α a avec l'ortant positif P de l'espace E_n au moins un point commun.

Deuxième interprétation. Au système (1) donné, il correspond dans l'espace E_m un ensemble de polygones de sommets $O, A_1x_1, A_1x_1 + A_2x_2, \ldots, A_1x_1 + \ldots + A_nx_n = O$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont toutes les solutions strictement positives de l'équation (2) et les vecteurs $OA_1, \ldots, OA_n$ déterminent l'orientation des côtés de ces polygones. Le système donnée (1) est donc admissible si et seulement si l'ensemble de polygones en question n'est pas vide, c'est-à-dire s'il existe au moins un polygone ayant des cotés de directions orientées préscrites $OA_1, \ldots, OA_n$.

Dans ce qui suit, nous allons étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système donné (1) soit admissible.

Théorème 1. *Si le système donné (1) est admissible, alors chacun de ses points est situé dans un sous-système admissible simple. Le système donné (1) est admissible s'il existe en lui des sous-systèmes admissibles simples dont l'union forme un système de rang égal au rang du système (1).*

(Par l'union des systèmes donnés $\{A_1^i, \ldots, A_{n_i}^i\}$, $i = 1, \ldots, m$, nous comprenons le système

$$\{A_1^1, \ldots, A_{n_1}^1, A_1^2, \ldots, A_{n_2}^2, \ldots, A_1^m, \ldots, A_{n_m}^m\}\,.)$$

Notre théorème a été énoncé et démontré au travail [2]. La démonstration que nous allons en faire ici reprend la méthode de [2] pour la partie a), tandis que, quant à la seconde partie b), notre procédé diffère de celui de [2]; il paraît être plus simple et plus concis.

Démonstration. a) Supposons que, pour le système donné (1) de rang r, il existe des sous-systèmes admissibles simples dont l'union $\mathfrak{A}'$ est aussi un système de rang r. Si le système (1) est lui-même simple, il n'y a rien à démontrer. Nous allons donc nous borner au cas où le système (1) n'est pas simple. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que le système $\mathfrak{A}'$ est formé par les n' premiers points du système (1). Au système $\mathfrak{A}'$, il correspond un sous-espace $\alpha' \subset E_n$ qui a, dans le sous-espace σ engendré par les n' premiers axes des coordonnées, la même trace que α. En vertu de nos hypothèses sur $\mathfrak{A}'$, il existe un point $A' \in \alpha' \cap \sigma$ de coordonnées $x_1' > 0, \ldots,$

$x'_{n'} > 0$, $x'_{n'+1} = 0, \ldots, x'_n = 0$. Ensuite, il existe dans α un point A^* de coordonnées $x_1^*, \ldots, x_n^*$; $x_{n'+1}^* > 0, \ldots, x_n^* > 0$; les grandeurs inconnues $x_{n'+1}, \ldots, x_n$ sont en raison du rang du système $\mathfrak{A}'$, des paramètres libres, pour toute solution $x_1, \ldots, x_n$ du système (3). Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le point $A' + \varepsilon A^*$ sera alors situé dans α aussi bien que dans l'ortant positif P de l'espace E_n. On a donc $\alpha \cap P \neq \emptyset$.

b) Supposons que le système donné (1) de rang r soit admissible; le sous-espace correspondant α a donc avec P au moins un point commun. Si le système (1) est simple, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que le système (1) ne soit pas simple. Pour tout axe des coordonnées o il y a un sous-espace des coordonnées $\sigma_o \supset o$ tel que la trace $\alpha \cap \sigma_o$ a une intersection non-vide avec l'ortant positif de l'espace σ_o. En effet, s'il existe un indice l ($l = 1, \ldots, n$) tel que la trace du sous-espace α dans chaque sous-espace des coordonnées σ qui contient le l-ème axe des coordonnées est disjointe avec l'ortant positif de l'espace σ, alors le sous-espace α est nécessairement contenu dans le l-ème hyperplan des coordonnées (opposé au l-ème axe), de sorte que $\alpha \cap P = \emptyset$ ce qui est en contradiction avec la relation $\alpha \cap P \neq \emptyset$ que nous avons supposée. — Ensuite on procède par récurrence: on remplace le couple E_n, α par σ_o, $\alpha \cap \sigma_o$, et l'on répète le raisonnement précédent, etc. Après un nombre fini de pas consécutifs nous arrivons forcément à un couple dont le premier élément est un certain sous-espace des coordonnées passant par l'axe o, tandis que son second élément est une droite passant par l'origine et ayant une demi-droite commune avec l'ortant positif du sous-espace mentionné. D'après la première interprétation, chacun des points du système donné (1) est donc contenu dans un sous-système admissible simple. La démonstration est ainsi achevée.

Nous dirons que le système (1) est normalisé, lorsque la relation $a_{1i}^2 + \ldots + a_{mi}^2 = 1$ est valable pour tout $i = 1, \ldots, n$, et que $\dim \langle O, A_1, \ldots, A_n \rangle = m < n$.

Théorème 2. *Un système normalisé donné* (1) *est admissible si et seulement s'il n'est contenu dans aucun hémisphère fermé de l'hypersphère unitaire de l'espace E_m.*

La démonstration du théorème 2 sera basée sur le suivant lemme.

Lemme 1. *Un système normalisé simple donné* (1) *est admissible si et seulement s'il n'est contenu dans aucun hémisphère fermé de l'hypersphère unitaire de l'espace E_m.*

Démonstration du lemme. Sous les hypothèses du lemme nous avons pour les solutions du système (3):

$$x_i = c(-1)^i \det |A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n|$$

où c est un paramètre réel, d'ailleurs quelconque.

a) Supposons que le système donné ne soit pas admissible, ce qui signifie que chacune de ses solutions est soit de la forme $x_{i_1} > 0$, $x_{i_2} < 0$, pour certains i_1, i_2 (cas a_1), soit il existe une solution pour laquelle $x_p = 0$ pour un certain p (cas a_2).

a_1) Soit donc $x_1, \ldots, x_n$ une solution du système (3), soit $x_{i_1} > 0$, $x_{i_2} < 0$. Soient ensuite $i_3, \ldots, i_n$ les nombres (rangés dans l'ordre de grandeur) obtenus des nombres $1, \ldots, n$ par suppression des nombres i_1, i_2. On a alors $\operatorname{sg} \det |A_{i_1} A_{i_3} \ldots A_{i_n}| = \operatorname{sg} \det |A_{i_2} A_{i_3} \ldots A_{i_n}|$, quelle que soit la parité des nombres i_1, i_2; ensuite $\det |A_{i_k} A_{i_3} \ldots A_{i_n}| = 0$ pour $k = 3, \ldots, n$ de sorte que le système (1) est situé au même hémisphère fermé de l'hypersphère unitaire.

a_2) Soit $x_1, \ldots, x_n$ une solution du système (3); $x_p = 0$, ce qui signifie que les points $A_1, \ldots, A_{p-1}, A_{p+1}, \ldots, A_n$ sont dépendants. Le système (1) étant simple, il est possible de choisir $n - 2$ points indépendants parmi les points $A_1, \ldots, A_{p-1}, A_{p+1}, \ldots, A_n$. Alors $\langle O, A_1, \ldots, A_{p-1}, A_{p+1}, \ldots, A_n \rangle$ est un hyperplan qui divise l'hypersphère unitaire en deux hémisphères fermés. Le point A_p est situé à l'intérieur d'un d'eux (les points $A_1, \ldots, A_{p-1}, A_{p+1}, \ldots, A_n$ se trouvent, bien entendu, sur la frontière de cet hémisphère).

b) Supposons par contre qu'il existe un hémisphère fermé σ de l'hypersphère unitaire telle que le système (1) se trouve dans σ. Mais alors, il existe une permutation $i_1, \ldots, i_n$ des indices $1, \ldots, n$ et un hémisphère fermé σ^* de l'hypersphère unitaire, tels que le système (1) se trouve dans σ^* et que les points $A_{i_3}, \ldots, A_{i_n}$ se trouvent sur la frontière de l'hémisphère σ^*; le point A_{i_1} est à l'intérieur de σ^* et le point A_{i_2} est soit sur la frontière de l'hémisphère σ^* soit à son intérieur. En reprenant les raisonnements des cas a_2) et a_1) en sens inverse, nous établissons l'existence d'une solution $x_1, \ldots, x_n$ du système (3) telle que $x_{i_1} = 0$, ou bien $x_{i_1} \neq 0$, $x_{i_2} \neq 0$, $\operatorname{sg} x_{i_1} = - \operatorname{sg} x_{i_2}$. Notre lemme est ainsi démontré.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. a) Supposons que le système donné (1) se trouve dans un hémisphère fermé σ de l'hypersphère unitaire. Cela signifie (en vertu du lemme 1) que le système (1) qui, dans nos hypothèses, est de rang m, ne contient aucun sous-système admissible simple de rang m. L'union de tous les sous-systèmes admissibles simples de rang plus petit que m est un système de rang plus petit que m également: en effet, tout sous-système admissible simple $\mathfrak{A}'$ de rang plus petit que m est contenu forcément dans la frontière de l'hémisphère σ, car dans le cas contraire on aurait $\mathfrak{A}' \subset \sigma \cap \langle O, \langle \mathfrak{A}' \rangle \rangle$, le système $\mathfrak{A}'$ serait donc contenu dans un hémisphère fermé à $m - 2$ dimensions de l'hypersphère unitaire, ce qui entraînerait en vertu du lemme 1 la non-admissibilité du système $\mathfrak{A}'$ (contradiction). De la relation $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \sigma$ il résulte donc que le système (1) n'est pas admissible.

On peut obtenir le même résultat sans faire intervenir les sous-systèmes simples. Soit donc de nouveau $\mathfrak{A} \subset \sigma$. Alors pour n'importe quel choix des valeurs $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$, l'ensemble des points $A_1 d_1, A_1 d_1 + A_2 d_2, \ldots, A_1 d_1 + \ldots + A_n d_n$, se trouve dans un semi-espace dont la frontière contient celle de l'hémisphère σ, et dont l'intérieur contient l'intérieur de l'hémisphère σ. Compte tenu du rang du système (1), on voit que le point $A_1 d_1 + \ldots + A_n d_n$ se trouve même á l'intérieur du semi-espace mentionné, de sorte que, d'après la deuxième interprétation, le système (1) n'est pas admissible.

b) Supposons maintenant par contre que le système (1) ne soit pas admissible. D'après notre théorème 1 cela signifie qu'aucun sous-système simple de rang m n'est admissible et tant qu'il existe des sous-systèmes admissibles simples de rang plus petit que m, leur union $\mathfrak{P}$ est aussi un système de rang plus petit que m. Choisissons maintenant un ensemble de points indépendants $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{m-1}}$ tels que $\mathfrak{P} \subset \varrho = \langle O, A_{i_1}, \ldots, A_{i_{m-1}} \rangle$. L'ensemble de tous les points de $\mathfrak{A}$ situés dans ϱ soit désigné par $\mathfrak{R}_1$, le reste des points de $\mathfrak{A}$ formera l'ensemble $\mathfrak{R}_2$. Vu le rang du système (1), nous avons $\mathfrak{R}_2 \neq \emptyset$. Si $\mathfrak{R}_2$ ne contient qu'un seul point, alors $\mathfrak{A}$ est contenu dans un des deux hémisphères fermés découpés sur l'hypersphère unitaire par l'hyperplan ϱ (le point appartenant à $\mathfrak{R}_2$ est à l'intérieur, les autres points de $\mathfrak{A}$ sur la frontière de cet hémisphère). S'il y a deux points $A_\xi, A_\eta, A_\xi \neq A_\eta$ contenus dans $\mathfrak{R}_2$, alors le système des points $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{m-1}}, A_\xi, A_\eta$ n'est pas admissible; il est de rang m, de sorte que, d'après le lemme 1, il est contenu dans l'hémisphère fermé $\sigma_{\xi,\eta}$, l'un des deux hémisphères fermés découpés sur l'hypersphère unitaire par l'hyperplan ϱ. Il en découle facilement que $\sigma_{\xi,\eta}$ est le même hémisphère fermé pour tous les choix possibles des points $A_\xi \neq A_\eta$ de $\mathfrak{R}_2$. Cela achève la démonstration.

c) Nous allons revenir encore une fois sur la démonstration de l'implication de la partie b), cette fois-ci cependant seulement pour $m = 1$ et $m = 2$. Nous allons nous servir à présent avec avantage de la deuxième interprétation. Dans ce qui suit, il sera bon de supposer que les points du système (1) soient tous différents (cela ne restreint évidemment pas la généralité). Soit $m = 1$. Si le système (1) contient deux points, et deux seuls, de coordonnées 1 et -1 respectivement, il sera évidemment admissible. – Soit $m = 2$. Choisissons notre système (1) de cette façon-ci: $A_1 = (1, 0)$; les deuxièmes coordonnées des points $A_2, \ldots, A_p$ sont positives; les deuxièmes coordonnées des points $A_{p+1}, \ldots, A_{n-1}$ sont négatives; ensuite ou bien $A_n = (-1, 0)$ ou bien la deuxième coordonnée du point A_n est non-nulle. D'après les suppositions, nous avons $1 < p < n$, et le choix fait ne restreint pas la généralité. Si $A_n = (-1, 0)$, prenons des nombres positifs $x_2, \ldots, x_{n-1}$ tels que le point $A_2x_2 + \ldots + A_{n-1}x_{n-1}$ ait sa deuxième coordonnée nulle et prenons deux nombres positifs x_1, x_n tels que le point $(A_2x_2 + \ldots + A_{n-1}x_{n-1}) + (A_1x_1 + A_nx_n)$ coïncide avec l'origine; un tel choix des nombres $x_1, \ldots, x_n$ étant toujours possible. Si $A_n \neq (-1, 0)$, alors nous prenons des nombres positifs arbitraires $x_3, \ldots, x_p, x_{p+2}, \ldots, x_n$, nous construisons le point $A^* = A_3x_3 + \ldots + A_px_p + A_{p+2}x_{p+2} + \ldots + A_nx_n$ et nous choisissons des valeurs positives x_1, x_2, x_{p+1} telles que le point $A^* + (A_1x_1 + A_2x_2 + A_{p+1}x_{p+1})$ coïncide avec l'origine; il existe toujours de telles valeurs x_1, x_2, x_{p+1} (nous n'entrons pas dans les détails). La démonstration est par là achevé.

Remarque. On peut obtenir l'assertion du théorème 2 pour $m = 3$ à partir d'un résultat de W. Fenchel (Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, *39* (1930), p. 183–185), cf. aussi le problème de K. Löwner cité dans le livre Pólya-Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* II, Berlin 1925, p. 165, soit p. 391. – A l'aide de la deuxième interprétation, notre théorème 2 résout le problème de l'existence d'un polygone dans E_m, les directions orientées de ses côtés étant données. Pour $m = 2$, ce problème a été formulé (avec la condition éventuelle supplémentaire de simplicité du polygone) par E. Čech. Une solution incomplète a été présentée par M. A. Rényi (*Časopis pro pěstování matematiky*, *78* (1953), 305–306), la solution complète a été donnée, dans le cadre des études plus générales, par M. K. Čulík (ibidem, *80* (1955), 415–426) et par l'auteur du présent article (ibidem, *81* (1956), 405–409). Dans l'article de M. K. Čulík, la condition de simplicité intervient déjà d'une manière nette. Le problème de l'existence des polygones simples (dans le plan et dans l'espace) a été abordé aussi dans la thèse [3] de M. V. Polák qui ya – entre autres – résumé ses résultats préparés à être publiés dans *Časopis pro pěstování matematiky* et dans *Matematicko-fyzikálny časopis* SAV.

Théorème 3,1. *Supposons que le système donné* (1) *soit de rang* m *où* $1 < m < n$ *et qu'aucune des équations* $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ *ne découle du système* (3). *Ensuite, désignons par* (3_i) *le système obtenu de* (3) *par l'élimination de l'inconnue* x_i; $i = 1, \ldots, n$. *Le système* (3) *a une solution strictement positive si et seulement si chaque système* (3_i) *a une solution strictement positive* $(i = 1, \ldots, n)$.

Nous y ajoutons tout d'abord quelques remarques:

a) Le système (3_i) n'est déterminé, bien entendu, qu'à l'équivalence près. Comme nous avons $A_i \neq O$ pour $i = 1, \ldots, n$, il existe au moins une coordonnée a_{ji} du point A_i qui soit non-nulle. Nous calculons x_i à partir de la j-ème équation du système (3) et nous le substituons dans les autres équations; nous obtenons de cette façon les équations du système (3_i):

$$\sum_{l=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n} (a_{ji}a_{kl} - a_{ki}a_{jl})\, x_l = 0\,, \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m\,.$$

La suite des vecteurs-colonnes de ce système peut ne pas former un système, car elle peut contenir des vecteurs nuls, mais elle devient système si nous en écartons les vecteurs nuls. Il serait d'ailleurs facile d'établir une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de vecteurs nuls, mais nous n'allons pas entrer dans les détails à ce sujet.

b) Si le système donné (3) contient une équation $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, alors, bien entendu, il n'existe pas de solutions strictement positives de ce système.

c) Si le système (3) se réduit à une seule équation, alors une solution strictement positive existe si et seulement s'il y a parmi les coefficients de l'équation au moins un qui soit positif et au moins un qui soit négatif. La démonstration en est évidente.

d) En exploitant le théorème 3,1 et les remarques précédentes, il est possible de réduire le problème de l'existence d'une solution strictement positive du système donné (3) au problème de l'existence d'un certain ensemble d'équations linéaires homogènes dont chacune en particulier a une solution strictement positive.

Lemme 2. *Soit* $2\ (< n)$ *le rang du système normalisé donné* (1). *Désignons par* (3_i) *l'équation obtenue de* (3) *par l'élimination de l'inconnue* x_i, $i = 1, \ldots, n$. *Le système* (3) *a une solution strictement positive si et seulement si chacune des équations* (3_i), $i = 1, \ldots, n$, *a une solution strictement positive.*

Démonstration. Ecrivons les équations du système donné (3) sous la forme suivante (cf. notre remarque a)):

$$(4) \qquad x_1 \cos \varphi_1 + \ldots + x_n \cos \varphi_n = 0\,, \quad x_1 \sin \varphi_1 + \ldots + x_n \sin \varphi_n = 0\,.$$

En éliminant l'inconnue x_i, nous obtenons l'équation

$$(4) \qquad x_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_i) + \ldots + x_n \sin(\varphi_n - \varphi_i) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

D'après la remarque c), l'équation (4) a une solution strictement positive si et seulement s'il y a parmi les coefficients $\sin(\varphi_1 - \varphi_i), \ldots, \sin(\varphi_n - \varphi_i)$ au moins un qui soit positif et au moins un qui soit négatif, c'est-à-dire s'il y a parmi les angles orientés $\varphi_1 - \varphi_i, \ldots, \varphi_n - \varphi_i$ au moins un angle convexe et au moins un angle non-convexe. On peut exprimer la même condition en disant que les points $A_1 = (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1)$, $\ldots, A_n = (\cos \varphi_n, \sin \varphi_n)$ dans E_2 ne doivent pas être situés dans un même demi-cercle fermé du cercle unitaire du plan E_2. Le reste de la démonstration découle maintenant immédiatement de notre théorème 2.

Théorème 3,2. *Soit α un sous-espace à $n - m$ dimensions de l'espace E_n, $1 < m < n$, contenant l'origine et qui n'est contenu dans aucun hyperplan des coordonnées. Soit π_i la projection d'un sous-espace $\pi \subset E_n$ dans le i-ème hyperplan des coordonnées; soit P, ou P_i resp., l'ortant positif dans E_n, ou dans le i-ème hyperplan respectif, $i = 1, \ldots, n$. Alors la relation $\alpha \cap P \neq \emptyset$ a lieu si et seulement si toutes les relations $\alpha_i \cap P_i \neq \emptyset$ ont lieu pour $i = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. a) Supposons les hypothèses du théorème vérifiées et supposons que le sous-espace α contient le l-ème axe des coordonnées ($l = 1, \ldots, n$). Alors évidemment $\alpha \cap P \neq \emptyset$ si et seulement si $\alpha_l \cap P_l \neq \emptyset$.

b) Supposons que les hypothèses du théorème soient vérifiées, mais que le sous-espace α ne contienne aucun axe des coordonnées. Le cas de $m = 2$ a été déjà envisagé au lemme 2, où l'hypothèse du système normalisé ne restreint pas la généralité. Soit donc $m > 2$ et $\alpha \cap P = \emptyset$. Par le sous-espace α on peut faire passer un sous-espace β à $n - 2$ dimensions tel que $\beta \cap P = \emptyset$. En vertu du lemme 2, il existe un indice l ($l = 1, \ldots, n$) tel que $\beta_l \cap P_l = \emptyset$, donc aussi $\alpha_l \cap P_l = \emptyset$. Remarquons que le cas où α est une droite ($m = n - 1$) peut encore s'étudier facilement à l'aide des cosinus directeurs.

c) S'il existe dans α un point dont toutes les coordonnées sont positives, alors la projection de ce point dans le i-ème hyperplan des coordonnées est aussi un point dont toutes les coordonnées sont positives à l'exception de la i-ème; donc, c'est un point situé dans l'ortant positif de cet hyperplan (pour tout $i = 1, \ldots, n$).

d) La condition $m > 1$ est essentielle, car pour tout hyperplan $\varrho \subset E_n$ passant par l'origine et ne contenant aucun axe des coordonnées (c'est-à-dire même dans le cas où $\varrho \cap P = \emptyset$) ϱ_i coïncide avec le i-ème hyperplan des coordonnées, de sorte que l'on a $\varrho_i \cap P_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

e) Il n'est pas possible de remplacer, dans l'énoncé du théorème, la condition: $\alpha_i \cap P_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, par une condition plus faible: $\alpha_l \cap P_l \neq \emptyset$ pour deux indices l ($l = 1, \ldots, n$) différents au moins. En effet, prenons dans E_4 un plan ϱ passant par l'origine et les points $A = (1, 1, 1, -1)$, $B = (1, 1, -1, 0)$. Il est aisé de voir que ce plan n'est contenu dans aucun hyperplan des coordonnées (et qu'il ne contient non plus aucun axe des coordonnées). De plus, on a $\varrho \cap P = \emptyset$. Le point $C = A - 2(A - B) = (1, 1, -3, 1)$ se trouve évidemment dans ϱ. La quatrième projection du point A, c'est le point $(1, 1, 1, 0) \in P_4$, la troisième projection du point C, c'est le point $(1, 1, 0, 1) \in P_3$. Nous avons donc $\varrho \cap P = \emptyset$ et, malgré cela, $\varrho_3 \cap P_3 \neq \emptyset$, $\varrho_4 \cap P_4 \neq \emptyset$.

La démonstration du théorème 3,1 découle du théorème 3,2, que nous venons de démontrer, à l'aide de la première interprétation: en effet, le système (3) détermine en vertu du théorème 3,1 le sous-espace α de dimension $n - m < n - 1$; le système (3_i) — avec l'équation $x_i = 0$ — détermine le sous-espace α_i du théorème 3,2. Cela entraîne déjà tout le reste.

Théorème 4,1. *Le système donné* (3) *a une solution strictement positive si et seulement si toute combinaison linéaire des équations du système* (3) *a une solution strictement positive* (cf. l'article [1]).

Et voici une version géométrique équivalente:

Théorème 4,2. *Soit α un sous-espace à $n - m$ dimensions de l'espace E_n ($1 < m < n$), passant par l'origine. Soit P l'ortant positif de l'espace E_n. Alors $\alpha \cap P \neq \emptyset$ si et seulement si $\varrho \cap P \neq \emptyset$ pour tout hyperplan $\varrho \supset \alpha$.*

Démonstration. Si $\alpha \cap P \neq \emptyset$, alors $\alpha \subset \varrho$ entraîne évidemment $\varrho \cap P \neq \emptyset$. Si $\alpha \cap P = \emptyset$, il est facile de trouver un hyperplan $\varrho^* \supset \alpha$ tel que $\varrho^* \cap P = \emptyset$. Cela entraîne le reste de la démonstration.

Littérature

[1] *E. Stiemke*: Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen. Math. Ann. *76* (1915), 340—342.

[2] *С. Н. Черников:* О строго ненулевых решениях системы линейных уравнений. Успехи мат. наук, т. XI, (1956), *2(68)*, 223—228.

[3] *V. Polák*: Některé problémy z teorie mnohoúhelníků a mnohostěnů. Thèse. Faculté des Sciences de l'Université Purkyně de Brno, 1961.

[4] *C. Davis*: Theory of positive linear dependence. Amer. Journ. Math. *76* (1954), 733—746.

Výtah

O STRIKTNĚ POZITIVNÍM ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH ROVNIC

VÁCLAV HAVEL, Brno

V článku jsou kromě známých teorémů o existenci striktně pozitivního řešení soustavy lineárních homogenních rovnic (E. STIEMKE [1], C. H. Черников [2]) odvozeny tyto dvě věty:

V E_m existuje polygon s předepsanými orientovanými směry stran $OA_1, \dots, OA_n$ ($|OA_1| = \dots = |OA_n| = 1$) právě tehdy, když množina bodů $A_1, \dots, A_n$ není obsažena v žádné uzavřené polosféře hypersféry o středu v počátku O a poloměru 1.

Daný podprostor $\alpha \subset E_n$ dimense d ($1 \leqq d < n - 1$) má s pozitivním ortantem prostoru E_n neprázdný průnik právě tehdy, má-li pro každé $i = 1, \dots, n$ projekce podprostoru α do i-té souřadnicové nadroviny s pozitivním ortantem této nadroviny neprázdný průnik.

Резюме

О СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

Помимо известных теорем о существовании строго положительного решения системы линейных однородных уравнений (Э. Штимке [1], С. Н. Черников [2]), в настоящей статье выводятся следующие две теоремы:

В E_m существует многоугольник с предписанными ориентированными направлениями сторон $OA_1, \dots, OA_n$ ($|OA_1| = \dots = |OA_n| = 1$) тогда и только тогда, если множество точек $A_1, \dots, A_n$ не содержится ни в какой замкнутой полусфере гиперсферы единичного радиуса с центром в начале координат O.

Данное подпространство $\alpha \subset E_n$ размерности d ($1 \leqq d < n - 1$) имеет с положительным ортантом пространства E_n непустое пересечение тогда и только тогда, если для любого $i = 1, \dots, n$ проекция подпространства α на i-ую координатную гиперплоскость имеет с положительным ортантом этой гиперплоскости непустое пересечение.