Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

# O SPEKTRÁLNÍM ROZKLADU HERMITOVSKÉHO OPERÁTORU

JAROSLAV KURZWEIL, Praha
(Došlo dne 24. listopadu 1959)

Je podán elementární důkaz věty o spektrálním rozkladu hermitovského operátoru.

Buď $H$ Hilbertův prostor, $A$ hermitovský operátor (tj. omezený, symetrický, definovaný na $H$). Naším cílem je dokázat, že k reálnému $\lambda$ lze přiřadit podprostor $H_\lambda$ tak, že platí ($\alpha$) $H_{\lambda_1} \subset H_{\lambda_2}$, jakmile $\lambda_1 \leqq \lambda_2$, ($\beta$) $H_\lambda = (0)$, jakmile $\lambda < -\|A\|$, $H_\lambda = H$, jakmile $\lambda \geqq \|A\|$, ($\gamma$) $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$. Při tom $E_\lambda$ je projekční operátor na $H_\lambda$ a $\int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ je (riemannovská) limita částečných součtů typu $\sum_{i=1}^{k} \tau_i(E_{\lambda_i} - E_{\lambda-1})$, $(\lambda_0 \leqq \tau_1 \leqq \lambda_1 \leqq \ldots \leqq \tau_k \leqq \lambda_k, \quad \lambda_0 < -\|A\|, \quad \lambda_k \geqq \|A\|)$. To je tzv. věta o rozkladu hermitovského operátoru. Tato věta a zvláště její důsledek, věta o rozkladu samoadjungovaného operátoru, má ústřední postavení pro řadu t. zv. vlastních úloh a proto je účelné nalézti důkaz pokud možno elementární.

Výchozím bodem našeho důkazu je Murrayovo lemma. Tohoto lemmatu k důkazu věty o rozkladu po prvé použil W. F. EBERLEIN [1]; jeho důkaz je uveden také v monografii [2]. Eberlein vychází z toho, že $(p(A)\, x, y)$ při pevných $x, y \in H$ je lineární (omezený) funkcionál na množině polynomů $p(\lambda)$, a užívá Rieszovy věty o representaci lineárního funkcionálu v $C\langle 0, 1\rangle$ a vět z teorie míry. V našem důkazu vyjdeme od bezprostřední definice tzv. spektrální funkce.

**Murrayovo lemma.** *Je-li $p(\lambda)$ polynom, pak* $\|p(A)\| \leqq \max\limits_{|\lambda| \leqq \|A\|} |p(\lambda)|$.

Z teorie matic plyne, že lemma platí, má-li $H$ konečnou dimensi. Nechť $H$ nemá konečnou dimensi a nechť $n$ je stupeň polynomu $p(\lambda)$. Zvolme $u \in H$; nechť $S$ znamená podprostor konečné dimense, který obsahuje vektory $u$, $Au, \ldots, A^n u$, a nechť $P$ je projektor na $S$, $A' = PAP$. Zřejmě

$$p(A')\, u = p(A)\, u\,, \quad \|A'\| \leqq \|A\|\,,$$
$$\|p(A)\, u\| = \|p(A')\, u\| \leqq \max_{|\lambda| \leqq \|A'\|} |p(\lambda)| \leqq \max_{\lambda \leqq \|A\|} |p(\lambda)|\,.$$

Lemma je dokázáno.

Důkaz věty o rozkladu. Je-li $f(\lambda)$ spojitá v $E_1$ a $p_n(\lambda)$ posloupnost polynomů, které na intervalu $\langle -\|A\|, \|A\|\rangle$ stejnoměrně konvergují k $f(\lambda)$, pak podle lematu posloupnost $p_n(A)$ konverguje a tak můžeme definovat $f(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A)$.

**Definice.** Nechť $H_\lambda$ (pro $\lambda \in E_1$) je množina všech $x \in H$, která mají tuto vlastnost: Je-li $f(\sigma)$ spojitá v $E_1$, $f(\sigma) = 0$ pro $\sigma \leqq \lambda$, pak $f(A)\, x = 0$. Nyní platí:

1. $H_\lambda$ je lineární podprostor, $H_{\lambda_1} \subset H_{\lambda_2}$, je-li $\lambda_1 \leqq \lambda_2$.

2. $H_{\|A\|} = H$, $H_\lambda = (0)$ pro $\lambda < -\|A\|$, neboť je-li $f(\sigma) = 0$ pro $\sigma \leqq \lambda$, $f(\sigma) = 1$ pro $\sigma \geqq -\|A\|$, pak $f(A) = E$.[1])

3. $x \in H$, $f(\sigma) = 0$ pro $\sigma \geqq \lambda \Rightarrow f(A)\, x \in H_\lambda$ (z definice).

4. $x \in H_\lambda$, $f(\sigma) = 1$ pro $\sigma \leqq \lambda \Rightarrow f(A)\, x = x$, neboť $(E - f(A))\, x = 0$ podle definice.

5. $x \perp H_\lambda$, $f(\sigma) = 1$ pro $\sigma \geqq \lambda \Rightarrow f(A)\, x = x$.
(Nechť $y \in H$, pak $((E - f(A))\, x, y) = (x, (E - f(A))\, y) = 0$ podle 3.)

6. $\lambda_2 - \lambda_1$, $x \in H_{\lambda_2} - H_{\lambda_1}$,[2]) $f(\sigma) = 1$ pro $\lambda_1 \leqq \sigma \leqq \lambda_2 \Rightarrow f(A)\, x = x$. (Položme $f(\sigma) = f_1(\sigma)\, f_2(\sigma)$, kde $f_2(\sigma) = 1$ pro $\sigma \leqq \lambda_2$, $f_1(\sigma) = 1$ pro $\sigma \geqq \lambda_1$; pak plyne 6 z 4 a 5.)

7. $\lambda_2 > \lambda_1$, $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, $x \in H_{\lambda_2} - H_{\lambda_1} \Rightarrow \|Ax - \lambda x\| \leqq (\lambda_2 - \lambda_1)\, \|x\|$. (Zvolme $\varepsilon < 0$ a spojitou funkci $f(\sigma)$ tak, aby bylo $f(\sigma) = 0$ pro $\sigma \leqq \lambda_1 - \varepsilon$ a pro $\sigma \geqq \lambda_2 + \varepsilon$, $f(\sigma) = 1$ pro $\lambda_1 \leqq \sigma \leqq \lambda_2$, $0 \leqq f(\sigma) \leqq 1$ pro všechna $\sigma$. Podle 6 je $f(A)\, x = x$, tedy $(A + \lambda E)\, f(A)\, x = Ax - \lambda x$, podle Murrayova lemmatu je

$$\|(A - \lambda E)\, f(A)\, x\| \leqq \max_\sigma |\sigma - \lambda|\, |f(\sigma)|\, \|x\| \leqq (\lambda_2 - \lambda_1 + 2\varepsilon)\, \|x\|) \,.$$

8. $E_\lambda A = A E_\lambda$, kde $E_\lambda$ je projektor na $H_\lambda$. (Z definice plyne $x \in H_\lambda \Rightarrow Ax \in H_\lambda$ a odtud $x \perp H_\lambda \Rightarrow Ax \perp H_\lambda$.)

9. Nechť $\lambda_0 < -\|A\|$, $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k = \|A\|$, $\tau_i \in \langle \lambda_{i-1}, \lambda_i \rangle$. Pak

$$\|A - \sum_{i=1}^{k} \tau_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\| \leqq \max_{i=1,2,\ldots,k} |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \,.$$

(Pro každé $x \in H$ platí

$$Ax - \sum_{i=1}^{k} \tau_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\, x = \sum_{i=1}^{k} (A - \tau_i E)(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})\, x$$

a 9 plyne z 7.) V bodě 9 je dokázána věta o spektrálním rozkladu operátoru $A$.

---

[1]) $E$ znamená identický operátor.
[2]) $H_{\lambda_2} - H_{\lambda_1}$ je orthogonální doplněk $H_{\lambda_1}$ v $H_{\lambda_2}$.

*Literatura*

[1] *W. F. Eberlein*: A Note on the Spectral Theorem, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946), 328–331.

[2] *K. Maurin*: Metody przestrzeni Hilberta, Warszawa, PWN 1959.


## Резюме

## О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА


ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ, Прага



Дается элементарное доказательство теоремы о спектральном разложении эрмитова оператора. Пусть $A$ — эрмитов оператор в пространстве Гильберта $H$ (т. е. ограниченный симметрический оператор, определенный на $H$). Если $f(\sigma)$ — непрерывная функция для $\sigma \in (-\infty, \infty)$, то на основании леммы Муррея (см. [1] или [2]) мы определяем $f(A) = \lim_{n \to \infty} p_n(A)$, где $p_n(\sigma)$ — последовательность многочленов, которые равномерно сходятся к $f(\sigma)$ на интервале $\langle -\|A\|, \|A\|\rangle$. Пусть $H_\lambda$ — множество таких $x \in H$, что $f(A)\,x = 0$, как только $f(\sigma) = 0$ для $\sigma \leqq \lambda$. $H_\lambda$ является линейным подпространством. Пусть $E_\lambda$ — проектор на $H_\lambda$. В пунктах 2—9 доказывается, что $E_\lambda$ есть спектральная мера и что $A = \int_I \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$.


## Résumé

## SUR LA DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'UN OPÉRATEUR HERMITIEN


JAROSLAV KURZWEIL, Praha



On donne une démonstration élémentaire du théorème sur la décomposition spectrale d'un opérateur hermitien. Soit $A$ un opérateur hermitien dans l'espace $H$ de Hilbert (c'est-à-dire un opérateur symétrique borné défini sur $H$). Si $f(\sigma)$ est une fonction continue pour $\sigma \in (-\infty, \infty)$, alors, en nous appuyant sur le lemme de Murray (voir [1] ou [2]), nous définissons $f(A) = \lim_{n \to \infty} p_n(A)$, $\{p_n(\sigma)\}$ étant une suite de polynomes tendant uniformément vers $f(\sigma)$ pour $\sigma \in \langle -\|A\|, \|A\|\rangle$. Soit $H_\lambda$ l'ensemble des $x \in H$ tels que $f(A)\,x = 0$ pourvu que $f(\sigma) = 0$ pour $\sigma \leqq \lambda$. $H_\lambda$ est un sous-espace linéaire. Soit $E_\lambda$ le projecteur sur $H_\lambda$. Aux alinéas 2—9, on démontre que $E_\lambda$ est une mesure spectrale et que l'on a $A = \int_I \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$.