Jaroslav Kurzweil

Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 3, 357--358

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117339`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ЗАМЕТКА ПО КОЛЕБЛЮЩИМСЯ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЯ $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛ (Jaroslav Kurzweil), Прага

(Поступило в редакцию 7. 3. 1960 г.)

В заметке доказывается, что в теореме из статьи [1] М. Ясного второе условие может выть отброшено, так как оно по существу является следствием первого условия.

М. Ясны в [1] доказал следующую теорему:

Эсли функция $f(x)$ положительна и абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке $\langle x_1, x_2 \rangle$, $x_1 \geqq a$ и если, кроме того, удовлетворяст условиям

$$(1) \qquad (n+1)\, f(x) + x f'(x) \geqq 0 \quad \textit{для} \quad x \geqq x_0\,,$$

$$(2) \qquad \sqrt{x}\, I(x) \leqq M \quad \textit{для} \quad x \geqq x_0\,, \quad M > 0\,,$$

где

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}\,,$$

то существуют колеблющиеся решения уравнения

$$(3) \qquad y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)\,.$$

Покажем, что в этой теореме условие (2) можно отбросить. Если $\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \int_t^\infty (\sigma - t)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ расходится, то по теореме Ф. В. Аткинсона [2] все решения уравнения (3)—колеблющиеся. Пусть теперь условие (1) выполнено и интеграл $\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ сходится. Из (1) следует, что

$$(4) \qquad f(t) \geqq f(r) \left(\frac{x}{t}\right)^{n+1}, \qquad x_0 \leqq x \leqq t\,,$$

$$\int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \geqq f(u)\, u^{n+1} \int_u^\infty \sigma^{-n-1}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n} f(u) u\,,$$

$$\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \geqq \frac{1}{n} \int_t^\infty u f(u)\, \mathrm{d}u \geqq \frac{1}{n} f(t)\, t^{n+1} \int_t^\infty u^{-n}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{n(n-1)} f(t)\,.\, t^2\,.$$

Оттуда и из (4) следует, что

$$I(x) \leqq c \int_x^\infty [f(x)]^{-\frac{1}{2n+2}} t^{-2-\frac{1}{n-1}} \,\mathrm{d}t = c \int_x^\infty [f(t) \,.\, t^{n+1}]^{-\frac{1}{2n-2}} t^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq c\, [f(x_0)\, x_0^{n+1}]^{-\frac{1}{2n-2}} \int_x^\infty t^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}t = \bar{c} x^{-\frac{1}{2}}, \qquad \bar{c} > 0\,.$$

Итак, условие (2) выполнено.

Заметим, что (1) равносильно тому, что $x^{n+1}f(x)$—не убывающая функция. В теореме М. Ясного требование, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке можно заменить требованием, что функция $f(x)$ обладает конечным изменением в каждом конечном промежутке. Итак *уравнение* (3) *обладает колеблющимся решением, если* $x^{n+1}f(x)$ *положительная неубывающая функция.*

Литература

[1] *М. Ясны:* О существовании колеблющегося решения нелинейного дифференциалного уравнения второго порядка $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$, Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 1, 78—83.

[2] *F. V. Atkinson*: On second-order non-linear oscillations. Pacif. Journ. Math. *5*, (1955), 643—648.

Výtah

POZNÁMKA O OSCILATORICKÝCH ŘEŠENÍCH ROVNICE $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

Je dokázáno, že ve větě M. JASNÉHO [1] jednu z podmínek lze vynechat. Zmíněná věta dostává tak tento tvar:

Nechť $f(x)$ je kladná funkce a nechť $x^{n+1} f(x)$ neklesá. Potom rovnice (3) *má oscilatorické řešení.*

Summary

A NOTE ON OSCILLATORY SOLUTION OF EQUATION $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

It is proved, that one of the conditions in the Theorem of M. JASNÝ [1] may be omitted. The Theorem mentioned above may be formulated as follows:

Let $x^{n+1}f(x)$ be positive and nondecreasing. Then there exists an oscillatory solution of equation (3).