Václav Havel

Řešitelnost rovnice $x + x = a$ v kartézských grupách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 4, 473

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117325`

ŘEŠITELNOST ROVNICE $x + x = a$ V KARTÉZSKÝCH GRUPÁCH

(Referát V. HAVLA o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 20. dubna 1959)

Kartézská grupa G je množina s binárním sčítáním a násobením, přičemž $(G, +)$ je aditivní grupa, $(G - \{0\}, .)$ je lupa (z angl. loop) a platí podmínky:

(1) $x0 = 0x = 0$ pro každé $x \in G$;

(2_1) pro $a, b, c \in G$; $a \neq b$ existuje právě jedno $x \in G$ tak, že $xa - xb = c$;

(2_2) pro $a, b, c \in G$; $a \neq b$ existuje právě jedno $y \in G$ tak, že $-ay + by = c$.

Je-li G kartézská grupa, pak množinu $G \times G$ lze geometrisovat tak, že její prvky se prohlásí za „body" a podmnožiny $((x, y) | y = ax + b)$, $((x, y) | x = c)$ při $a, b, c \in G$ za „přímky". Množina $G \times G$ je pak $Y - n$ transitivní rovina,[1]) kde $OXYJ$ je souřadnicový reper[2]) a n je nevlastní přímka. Naopak lze ke každé $Y - n$ transitivní rovině přiřadit kartézskou grupu G tak, že rovina je isomorfní s $G \times G$.

Vyšetřování byly podrobeny tyto podmínky pro kartézskou grupu G:

(3) je-li $a \in G$, pak existuje právě jedno $x \in G$ tak, že $x + x = a$;

(4_1) pro každé $x \in G$ jest $(-1)\, x = -x$;

(4_2) pro každé $x \in G$ jest $x(-1) = -x$;

(5) pro každé $x, y \in G$ jest $x + y = y + x$;

(6_1) pro každé $x, y, z \in G$ jest $(x + y)\, z = xz + yz$;

(6_2) pro každé $x, y, z \in G$ jest $x(y + z) = xy + xz$.

Platí tyto implikace: $(4_i) \Rightarrow (3)$; $(6_i) \Rightarrow (5)$; $(6_i) \Rightarrow (3)$; $i = 1, 2$.

V afinní rovině, splňující Fanovu podmínku o různoběžnosti úhlopříček kteréhokoliv rovnoběžníka, lze formulovat axiom o středu úsečky (tj. uspořádané dvojice bodů $A \neq B$): Je-li P libovolný bod mimo přímku AB, pak existuje bod $Q \neq P$ tak, že $AB \parallel PQ$ a přímka jdoucí bodem P rovnoběžně s BQ protíná přímku jdoucí bodem Q rovnoběžně s AP v bodě S_{AB} přímky AB, který nezávisí na volbě bodu P.

V $Y - n$ transitivní rovině platí axiom o středu pro všecky úsečky na rovnoběžkách s osou x právě tehdy, když příslušná kartézská grupa G splňuje podmínku (3).

V $n - n$ transitivní rovině platí axiom o středu pro všecky úsečky. Platí-li pro všecky úsečky afinní roviny axiom o středu, pak rovina je $n - n$ transitivní.

Použijeme-li tzv. lichoběžníkovou, rovnoběžníkovou, obdélníkovou a čtvercovou Desarguesovu větu,[3]) pak platí tato tvrzení:

V kartézské grupě G platí (4_1) právě tehdy, platí-li v $G \times G$ čtvercová Desarguesova věta podél osy y. V $Y - Y$ transitivní rovině platí podél každé rovnoběžky s osou y lichoběžníková Desarguesova věta a pro všecky úsečky na rovnoběžkách s osou y axiom o středu. Existuje $Y - n$ transitivní rovina a v ní rovnoběžník $ABCD$ s body A, C na ose y tak, že bod $AC \cap BD$ není středem úsečky AC. Platí-li v $Y - n$ transitivní rovině pro všecky kartézské grupy odpovídající reperům $OXYJ$ při pevných X, Y, $n \cap OJ$ podmínka (4_1), pak všecky tyto kartézské grupy mají komutativní sčítání. Platí-li pro všecky kartézské grupy $n - n$ transitivní roviny podmínka (7_1), pak rovina je alternativní (tj. $p - p$ transitivní pro každou přímku p).

Václav Havel, Brno

---

[1]) *R. Baer*: Am. Journ. Math. *64* (1942) 137—152, § 3.

[2]) O je počátek, X nevlastní bod osy x, Y nevlastní bod osy y a J bod o souřadnicích 1,1.

[3]) *H. G. Zimmer*: Math. Ann. *135* (1958), 274—278, úvod; obdélníková specialisace vznikne z rovnoběžníkové Desarguesovy věty, když PA, PB (viz obr. 1 na str. 274 citovaného článku) jsou souřadnicové osy, kdežto čtvercová specialisace vznikne z obdélníkové, když PC je přímka o rovnici $y = x$.