ZOBECNĚNÍ VĚTY J. KOROUSE

(Vlastní referát T. FREYE, kandidáta matematických věd Matematické a technické university v Budapešti, o přednášce konané dne 29. dubna 1959 na Matematicko-fysikální fakultě Karlovy university v Praze)

Uvažujme důležitou větu J. KOROUSE (viz [1]), kterou můžeme takto krátce formulovat:

Buďte $p(x) \in L[-1, 1]$ a $q(x) \in L[-1, 1]$ dvě nezáporné váhové funkce, pro které platí

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda(x) \equiv \frac{q(x)}{p(x)} \leqq \lambda_2 , \quad -1 \leqq x \leqq 1 , \tag{1}$$

a že pro pevný bod $x_0 \in [-1, 1]$ platí

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqq C_1 |x - x_0| . \tag{2}$$

Potom můžeme odhadnout v bodě x_0 vzhledem k p resp. q ortonormální polynomy $p_n(x)$ resp. $q_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ v následujícím tvaru:

$$|p_n(x_0)| \leqq C_2 \sum_{\nu=0}^{1} |q_{n-\nu}(x_0)| , \quad |q_n(x_0)| \leqq C_3 \sum_{\nu=0}^{1} |p_{n-\nu}(x_0)| . \tag{3}$$

Pomocí této věty se mohou při zkoumání stejnoměrné omezenosti posloupnosti ortonormálních polynomů diskutovati lokální a globální předpoklady vzájemně nezávisle vzhledem k odpovídajícím váhovým funkcím. Může se to ještě lehčeji udělat ve smyslu globálních předpokladů v případě, že platí (1), ve smyslu lokálních předpokladů, pokud se (2) zeslabí.

Uvažujme nyní nejprve požadavek (1). Protože je asymptotické vyjádření $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ortonormálních Jakobiových polynomů s vahou $(1 + x)^\alpha (1 - x)^\beta$ dobře známo, je pomocí tohoto vyjádření a pomocí věty Korousovy hned vidět, že pro ortonormální polynomy s vahou

$$w(x) = (1 + x)^\alpha (1 - x)^\beta \, \psi(x) \tag{4}$$

platí nerovnost

$$\int_{-1}^{1} w_n^2(x) \frac{w(x) \, \mathrm{d}x}{(1 + x)^\gamma \, (1 - x)^\delta} \leqq C_4 , \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

v případě, že $\psi(x)$ splňuje v $[-1, -1 + \delta]$ a $[1 - \delta, 1]$ Lipschitzovu podmínku s exponentem 1, dále platí

$$\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \gamma > -1, \beta + \vartheta > -1, \gamma < \frac{1}{2}, \delta < \frac{1}{2} .$$

Odtud ale hned plyne, že se může (1) nahradit předpoklady

$$\begin{aligned} C_5(1 + x)^{A_1} (1 - x)^{B_1} &\leqq p(x) \leqq C_6(1 + x)^{a_1}(1 - x)^{b_1} , \\ C_7(1 + x)^{A_2} (1 - x)^{B_2} &\leqq q(x) \leqq C_8(1 + x)^{a_2} (1 - x)^{b_2} , \end{aligned} \tag{1*}$$

kde

$$-1 < a_i \leqq A_i < a_i + \tfrac{1}{2} , \quad -1 < b_i \leqq B_i < b_i + \tfrac{1}{2} , \quad (i = 1, 2) .$$

Sumace v (3) jde však potom ne do $\nu = 1$, nýbrž do nějakého celého čísla $\nu = s$ na exponentu v (1*) nezávislého.

Tak se ale umožní, že můžeme na základě transformace $x = \cos \vartheta$ problémy uvažovat na jednotkové kružnici. Protože na jednotkové kružnici je jednoduše umožněno posunutí a odpovídající Jakobiovy polynomy pro řešení okrajového vlivu mají na jednotkové kružnici lepší asymptotiku, můžeme (1*) rozšířit tak, že $p(x)$ a $q(x)$ mají konečný počet nulových bodů a singularit (majorisovatelných a minorisovatelných mocninnými funkcemi), a aby rozdíl odpovídajících exponentů byl nejen menší než $\frac{1}{2}$, nýbrž menší než 1.

Předpokládejme nyní dále, že $\log p \in L[-1, 1]$ a $\log q \in L[-1, 1]$. Potom můžeme (1) také nahradit následujícími podmínkami:

$$\text{buď je} \quad \sqrt[4]{p(x)} \, . \, \sqrt[4]{1 - x^2} |p_n(x)| \leqq C_9, \text{ nebo } \sqrt[4]{q(x)} \sqrt[4]{1 - x^2} |q_n(x)| \leqq C_{10} \tag{1**}$$

a dále $\lambda(x_0) > 0$, $\lambda(x) \in L_{2\pi}$, $\frac{1}{\lambda(x)} \in L_{2\pi}$. Důkaz je obdobný důkazu Korousovu aplikovanému na jednotkovou kružnici.

Abychom nyní dále oslabili (1), potřebujeme důležitou nerovnost Szegöho, resp. zobecnění této nerovnosti. G. Szegö nalezl, že (viz [2])

$$\max_{\varrho(z) \in H_n^*(\varphi)} |\lambda \varrho(0) + \mu \varrho(a)|^2 = M_n(\varphi; a; \lambda; \mu)$$

(kde λ, μ a a jsou libovolná komplexní čísla, $H_n^*(\varphi)$ označuje třídu polynomů nejvýše n-tého řádu, pro které platí

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{it})|^2 \, \varphi(t) \, dt = 1 \, , \quad 0 \leqq \varphi(t) \in L_{2\pi} \, , \quad \log \varphi \in L_{2\pi})$$

závisí monotonně na funkci φ, tj. že

$$M_n(\varphi; a; \lambda; \mu) \leqq M_n(\psi; a; \lambda; \mu) \, ,$$

pokud $\varphi \geqq \psi$. Odtud ale hned plyne odhad, který používá Szegö vícekrát, tj. odhad

$$\begin{gathered} |s_n(\psi; 0; a) - s_n(\varphi; 0; a)|^2 \leqq \\ \leqq [s_n(\psi; 0; 0) - s_n(\varphi; 0; 0)] \, . \, [s_n(\psi; a; a) - s_n(\varphi; a; a)] \, , \end{gathered} \tag{6}$$

kde $\{\Phi_n(z)\}$ resp. $\{\Psi_n(z)\}$ jsou vzhledem k φ resp. k ψ na jednotkové kružnici posloupnosti ortonormálních polynomů, a dále je

$$s_n(\varphi; t; z) = \sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu(t) \, \overline{\Phi_\nu(z)} \, .$$

Tato Szegöho nerovnost se může v jistém ohledu oprostit od podmínky monotonie: Označme $\pi_m(t)$ nezáporný trigonometrický polynom, $h_m(z)$ tzv. „normalisovanou representaci" polynomu π_m (viz [2]):

$$h_m(z) \in H_m \, ; \quad |h_m(e^{it})|^2 = \pi_m(t) \, , \quad |h_m(re^{it})| > 0 \, ,$$

pro $0 \leqq r < 1$, $h_m(0) > 0$. Pak platí pro $\varphi(t) \in L_{2\pi}$, $\log \varphi \in L_{2\pi}$ a $\eta(t) = \varphi(t) \, . \, \pi_m(t)$ následující nerovnost:

$$\begin{gathered} |s_{n+m}(\varphi; 0; a) - h_m(0) \, h_m(a) \, s_n(\eta; 0; a)|^2 \leqq \\ \leqq |s_{n+m}(\varphi; 0; 0) - h_m^2(0) \, s_n(\eta; 0; 0)| \, . \, |s_{n+m}(\varphi; a; a) - |h_m(a)|^2 \, s_n(\eta; a; a)| \, . \end{gathered} \tag{7}$$

Pomocí (6) a (7) se může snadno dokázat, že (1) může být také nahrazeno následujícím požadavkem:

$$\lambda(x) \equiv \lambda_1(x) \, . \, \lambda_2(x) \, ; \quad \lambda(x_0) > 0 \, , \tag{1***}$$

$$0 \leqq C_{11} \prod_{j=1}^{N_1} |x - x_j|^{a_j} \leqq \lambda_1(x) \in L_{2\pi} \leqq 2 \, ; \quad C_{12} / \prod_{j=N+1}^{N+M} |x - x_j|^{b_j} \geqq \lambda_2(x) \in R_{2\pi} \geqq \tfrac{1}{2} \, , \tag{1***}$$

kde $x_j \neq x_0$, $(j = 1, 2, \ldots, N + M)$ jsou libovolné body a $0 \leqq a_j$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$, $0 \leqq b_j < 1$, $(j = N + 1, N + 2, \ldots, N + M)$ libovolné konstanty. Není také těžké si ověřit, že (1**) a (1***) se mohou též kombinovat na místě požadavku (1).

Tak se velmi rozšíří použitelnost Korousovy věty ve smyslu globálních požadavků na váhu.

Není také těžké nahlédnout, že se (2) může nahradit buď pomocí

$$\sqrt{p(x)}\sqrt[4]{1 - x^2}|p_n(x)| \leqq C_9 ,$$

nebo

$$\sqrt{q(x)}\sqrt[4]{1 - x^2}|q_n(x)| \leqq C_{10} , \tag{2*}$$

a

$$|k(x) - k(x_0)| \leqq |x - x_0|^{\frac{1}{2}} . \omega(|x - x_0|) ,$$

kde $\omega(t)$ značí monotonně k nule se blížící funkci, pro kterou existuje $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{\omega^2(t)}{t} dt$.

Dále se může (2) také nahradit tvrzením, že $\lambda(x)$ splňuje na $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap [-1; 1]$ Dini-Lipschitzovu podmínku.

Aplikujeme-li nyní Korousovu úvahu a nerovnost (7), dále některé lehké pomocné teoretické věty o aproximaci a nahradíme-li (2) nerovností

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqq C_{13}|x - x_0|^2 , \quad \lambda(x_0) > 0 , \tag{8*}$$

resp. buď $\sqrt{p(x)}\sqrt[4]{1 - x^2}\,|p_n(x)| \leqq C_9$, nebo $\sqrt{q(x)}\sqrt[4]{1 - x^2}\,|q(x)| \leqq C_{10}$, a kromě toho předpokládáme-li, že

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqq C_{14}|x - x_0| . \omega(|x - x_0|) ,$$

a dále zachováme-li jednu z podmínek (1), (1*), (1**), (1***), pak dostaneme asymptotické **analogon Korousovy věty:**

Posloupnost $\{q_n(x_0)\}$ *má právě tehdy asymptotické vyjádření, jestliže je má* $\{p_n(x_0)\}$ *a naopak.*

Buď ještě konečně poznamenáno, že ve speciálním případě (např. $p(x) \equiv \text{const}$) můžeme (8*) ještě velmi zostřit. Nerovnost (8*) je totiž v tomto speciálním případě také nahraditelná pomocí (2*) nebo pomocí

$$\sqrt{q(x)}\sqrt[4]{1 - x^2}\,|q_n(x)| \leqq C_{10} , \quad |k(x) - k(x_0)| \leqq \omega(|x - x_0|) . \tag{8***}$$

Poznamenejme pak ještě dále, že (8***) není dále už zostřitelné, pokud platí Stěklovova domněnka.

Literatura

[1] *Korous M.*: O rozvoji funkce jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů, Rozpr. České ak. *48*, 1938.

[2] *Szegö G.*: Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll, Publ. *23*, New York, 1939.

Přeložil *Miroslav Šisler*, Praha