Časopis pro pěstování matematiky

Josef Bílý

Markovův řetězec vedoucí ke konvoluci binomických rozložení a ke kumulovanému binomickému rozložení

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 3, 327--334

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117313

MARKOVŮV ŘETĚZEC VEDOUCÍ KE KONVOLUCI BINOMICKÝCH ROZLOŽENÍ A KE KUMULOVANÉMU BINOMICKÉMU ROZLOŽENÍ

JOSEF BÍLÝ, Praha

DT: 519.217

(Došlo 13. září 1958)

Je konstruován homogenní Markovův řetězec, ve kterém finální rozložení pravděpodobností je dáno konvolucí dvou binomických rozložení, jakož i periodický homogenní Markovův řetězec, ve kterém jsou limity pravděpodobností přeskoku dány kumulováním pravděpodobností binomického rozložení dvou sousedních tříd.

Byly konstruovány různé Markovovy řetězce, ve kterých jsou rozložení absolutních pravděpodobností dána binomickým rozložením. Viz např. L. TRUKSA [1], str. 25, př. 3, str. 82—84, str. 112 aj., W. FELLER [2], str. 327 aj. Uvedu jeden homogenní Markovův řetězec toho druhu, který bude východiskem našich úvah.

Nechť se systém (terminologie viz L. Truksa [1], str. 18, T. A. SARYMSAKOV [3], str. 9) může nacházet v jednom z $n + 1$ disjunktních stavů $E_0, E_1, \ldots, E_n$; ze stavu E_k, $0 < k < n$, je možný přechod jen do stavu E_{k-1} nebo E_{k+1} nebo systém může setrvat v E_k, ze stavu E_0 je možný jen přechod do E_1 nebo systém může setrvat v E_0, ze stavu E_n je možný jen přechod do E_{n-1} nebo systém může setrvat v E_n. Příslušné pravděpodobnosti přechodu nechť jsou

$$p_{k,k-1} = \frac{kq}{n}, \quad p_{k,k} = \frac{kp + (n-k)\,q}{n}, \quad p_{k,k+1} = \frac{(n-k)\,p}{n}, \tag{1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n$, při čemž

$$0 < p < 1\,, \quad q = 1 - p\,. \tag{1a}$$

Tento řetězec lze realisovat pomocí osudí obsahujícího n koulí, jež jsou buď bílé nebo černé barvy. Systém je ve stavu E_k, obsahuje-li osudí k bílých a $n - k$ černých koulí. Z osudí vybereme náhodovým způsobem kouli a odstraníme ji. Pak odstraněnou kouli nahradíme tak, že do osudí vložíme s pravděpodobností p kouli bílou, s pravděpodobností q kouli černou. Řetězec popsaný (1), (1a) lze interpretovat jako náhodovou procházku po celočíselných bodech číselné osy mezi body 0, n s reflektujícími bariérami v 0 a n. Platí

Věta 1. *Matice pravděpodobností $p_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, definovaných v* (1) *a* (1a) *je nerozložitelná a regulární. Existují* $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = P_j$ nezávislé na i, při čemž $p_{i,j}^{(n)}$ *značí pravděpodobnost, že systém, který je ve stavu i, bude po n krocích ve stavu j; pro P_j (finální rozložení) platí*

$$P_j = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Důkaz plyne z věty 4 v L. Truksa [1], str. 55 a z předpokladu $0 < p < 1$; existence limity $p_{i,j}^{(n)}$ plyne z věty 15, str. 89 a výpočet P_j z věty 16, str. 90 tamtéž; viz též W. Feller [2], str. 325, T. A. Sarymsakov [3], str. 49.

Zobecněme uvedený řetězec tak, že

$$p_{k,k-1} = \frac{kbq_2}{(n-k)a + kb}, \quad p_{k,k} = \frac{(n-k)aq_1 + kbp_2}{(n-k)a + kb}, \tag{3}$$

$$p_{k,k+1} = \frac{(n-k)ap_1}{(n-k)a + kb},$$

$k = 0, 1, \ldots, n$; a, b jsou přirozená čísla, při čemž budeme se zabývat dvěma případy:

$$0 < p_i < 1, \quad q_i = 1 - p_i, \quad i = 1, 2; \tag{3a}$$

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q_2 = 1. \tag{3b}$$

Tento řetězec lze realisovat pomocí osudí obsahujícího koule bílé nebo i černé. Systém je ve stavu E_k, obsahuje-li osudí kb bílých, $(n - k)\,a$ černých koulí. Z osudí vybereme náhodovým způsobem jednu kouli a odstraníme ji. Byla-li bílá, odstraníme z osudí dalších $b - 1$ bílých koulí, byla-li černá, odstraníme z osudí dalších $a - 1$ černých koulí. Pak osudí doplníme tak, že do něho vložíme, byly-li odstraněné koule bílé, s pravděpodobností p_2, po případě q_2 b koulí bílých, po případě a koulí černých, a byly-li odstraněné koule černé, vložíme s pravděpodobností p_1 po případě q_1 b koulí bílých, po případě a koulí černých. Jde o zobecnění Pólyova urnového schematu v tom, že i po zjištění barvy vytažené koule závisí způsob změny složení osudí na náhodě, kdežto v Pólyově urnovém schématu se vkládají nebo odstraňují koule téže barvy, jakou měla tažená koule. Reálný protějšek těchto urnových schemat možno spatřovat v procesech obnovy v souboru stálého rozsahu n prvků, jež mohou být dvou druhů, při čemž prvky se vyřazují s intensitami nezávislými na čase a vyřazované prvky jsou nahrazovány prvky jednoho nebo druhého druhu podle pevného pravidla, studujeme-li tento proces obnovy jako posloupnost vyřazování; o studiu těchto procesů viz L. A. Goodman [4] a — ve spojitém čase — J. Bílý [5].

Pro matice pravděpodobností (3) platí

Věta 2. *Matice P pravděpodobností $p_{i,j}$ definovaných v* (3), (3a) *je nerozložitelná a regulární, existují* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = P_j$ *nezávislé na i, pro něž platí*

$$P_j = \alpha \binom{n-1}{j-1} p^{j-1}q^{n-j} + \beta \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

při čemž

$$\alpha = \frac{p_1}{p_1 + q_2}, \quad \beta = \frac{q_2}{p_1 + q_2}, \tag{4a}$$

$$p = \frac{ap_1}{ap_1 + bq_2}, \quad q = \frac{bq_2}{ap_1 + bq_2}, \tag{4b}$$

$$\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0 .$$

Důkaz se provede stejnými prostředky jako důkaz věty 1.

Je-li $a = b$, je $\alpha = p$, $\beta = q$ a (4) přechází v (2). Je-li $p_1 = q_2$, je $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ a (4) nabývá tvaru

$$P_i = \frac{1}{2}\left[\binom{n-1}{j-1} p^{j-1}q^{n-j} + \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}\right], \tag{5}$$

$j = 0, 1, \ldots, n$, $\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0$.

Rozložení pravděpodobností (4) je konvolucí rozložení binomického $\binom{n-1}{k} p^k q^{n-k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ a rozložení alternativního $\binom{1}{k} \alpha^k \beta^{1-k}$, $k = 0, 1$.

Věta 3. *Matice* P *pravděpodobností $p_{i,j}$ definovaných v* (3), (3b) *je nerozložitelná irregulární a příslušný řetězec je cyklický o periodě* 2. *Stavy $E_0, E_1, \ldots, E_n$ se rozpadají na dvě třídy G_1, G_2, z nichž třída G_1 obsahuje stavy E_{2k}, $k = 0, 1, \ldots, \ldots, [\frac{1}{2}n]$, třída G_2 obsahuje stavy E_{2k+1}, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$.*

Existují limity: pro $E_i \in G_1$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(2n)} = P_{1,j} = \begin{cases} \binom{n-1}{j-1} p^{j-1}q^{n-j} + \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}, & j = 0, 2, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right], \\ 0, & j = 1, 3, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 ; \end{cases} \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(2n+1)} = P'_{1,j} = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right], \\ \binom{n-1}{j-1} p^{j-1}q^{n-j} + \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}, & \\ & j = 1, 3, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 , \end{cases} \tag{7}$$

při čemž $\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0$, *a pro* $E_i \in G_2$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(2n)} = P_{2,j} = \begin{cases} 0 & , \ j = 0, 2, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right], \\ \binom{n-1}{j-1} p^{j-1}q^{n-j} + \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}, & \\ & j = 1, 3, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(2n+1)} = P'_{2,j} = \begin{cases} \binom{n-1}{j-1} p^{j-1}q^{n-j} + \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}, & \\ & j = 0, 2, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right], \\ 0 & , \ j = 1, 3, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1, \end{cases} \tag{9}$$

při čemž $\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0$.

Důkaz. Jestliže $p_2 = q_1 = 0$, má matice P pravděpodobností (3) na hlavní diagonále vesměs nulové prvky, od nuly různé jsou jen prvky sousedící s prvky hlavní diagonály. Ze stavů E_{2k}, $k = 0, 1, \ldots, [\frac{1}{2}n]$ se sudým počtem kroků dospěje jen do některého stavu E_{2k}, lichým počtem kroků jen do některého stavu E_{2k+1}. Podobně ze stavů E_{2k+1} se sudým počtem kroků dojde jen do některého ze stavů E_{2k+1}, lichým počtem kroků do některého ze stavů E_{2k}. Z toho plyne rozdělení stavů do G_1 a G_2. Že rovnice $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{P}| = 0$ ($\mathbf{E}$ je jednotková matice $(n + 1) \times (n + 1)$) má též kořen $\lambda = -1$ (charakteristická rovnice mezi svými kořeny má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$), ověříme tím, že sloupce sudého pořadí v determinantu $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{P}|$ vynásobíme -1 a prvky všech sloupců sečteme — viz L. Truksa [1], str. 67, věta 15. Existence a výpočet $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ plyne z vět 19 a 20 tamtéž, str. 92 a 93; viz též W. Feller [2], str. 330, 331 a T. A. Sarymsakov [3], str. 52. Posloupnost $\{p_{i,j}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ je asymptoticko-periodická, střídá se skupina nul s positivními prvky konvergujícími k $P_{1,j}$, po případě $P_{2,j}$.

Pro $n = 4$ jde o střídající se rozložení

$$\begin{array}{lllll} q^3, & 0 & , 3q^2p + 3qp^2, & 0 & , p^3, \\ 0, & q^3 + 3q^2p, & 0 & , 3qp^2 + p^3, & 0, \end{array}$$

Rozložení (6) až (9) možno nazvat kumulovaným binomickým rozložením. Všimněme si několika vlastností rozložení (4) a kumulovaného binomického rozložení.

Zřejmá jsou tato tvrzení:

Věta 4. *Momentová vytvořující funkce rozložení pravděpodobností* (4) *je*

$$M(\Theta) = (\alpha e^{\Theta} + \beta)(pe^{\Theta} + q)^{n-1} \tag{10}$$

a průměr a variance rozložení jsou

$$\mu_1' = (n-1)\,p + \alpha\,, \quad \mu_2 = (n-1)\,pq + \alpha\beta\,. \tag{10a}$$

Snadno se přesvědčíme, že při známém n, α, poskytla-li jedna realisace náhodné veličiny rozložené podle (4) hodnotu k, je $p^* = \dfrac{k-\alpha}{n-1}$ odhad nestranný pro p a že pro $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ se metodou maximální věrohodnosti získá odhad

$$\hat{p} = \sqrt{k(k-1)}\,/\,(\sqrt{(n-k)(n-k-1)} + \sqrt{k(k-1)})\,.$$

Zajímavé jsou vlastnosti kumulovaných binomických rozložení (dále kbr). Dospíváme-li k nim jako asymptotickým rozložením popsaného Markova řetězce, odpovídají jednotlivé pravděpodobnosti celočíselným hodnotám náhodné veličiny. Dospěli-li bychom však ke kbr tak, že bychom při realisaci náhodné veličiny mající binomické rozložení $\binom{n}{k}\,p^k q^{n-k}$ nerozlišovali nulu od 1, 2 od 3 atd., po případě 1 od 2, 3 od 4 atd., přiřadili bychom kumulovaným pravděpodobnostem středy příslušných hodnot příslušných náhodných veličin, ovšem s výjimkou krajů. Tímto tvarem kbr se budeme dále zabývat, při čemž prvním kbr nazveme kbr s třídami $0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}$ až $\dfrac{2n-1}{2}$, je-li n sudé; je-li n liché, přistupuje poslední třída n; druhým kbr nazveme kbr s třídami $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \dfrac{2n-1}{2}$, je-li n liché, je-li n sudé, přistupuje třída n. Snadno se přesvědčíme výpočtem, že platí

Věta 5. *Momentová vytvořující funkce kbr je*

$$M(\Theta) = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\Theta} + e^{-\frac{1}{2}\Theta})(q + pe^{\Theta})^n \mp \tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\Theta} - e^{-\frac{1}{2}\Theta})(q - pe^{\Theta})^n + R_n\,, \tag{11}$$

při čemž znaménko záporné platí pro první, kladné pro druhé kbr, a dále značí pro první kbr $R_n = q^n(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})$ *pro n sudé*,

$$R_n = q^n(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta}) + (pe^{\Theta})^n(1 - e^{\frac{1}{2}\Theta}) \quad \text{pro } n \textit{ liché}\,; \tag{11a}$$

pro druhé kbr

$$R_n = (pe^{\Theta})^n(1 - e^{\frac{1}{2}\Theta}) \quad \textit{pro n sudé}\,,$$

$$R_n = 0 \quad \textit{pro n liché}\,.$$

Z toho plyne, že průměr kbr je

$$\mu_1' = np \mp (q-p)^n + r_n\,, \tag{11b}$$

při čemž znaménko minus platí pro první, znaménko plus pro druhé kbr a $r_n = \frac{1}{2}q^n$ pro n sudé, $\frac{1}{2}(q^n - p^n)$ pro n liché pro první kbr, $r_n = -\frac{1}{2}p^n$ pro n sudé a 0 pro n liché pro druhé kbr. Variance kbr obsahuje hlavní člen npq a členy obsahující p^n, q^n, $(q-p)^n$.

Metodou maximální věrohodnosti získáme při daném n lichém pro druhé kbr, poskytla-li jediná realisace náhodné veličiny hodnotu (jež je počítána jako střed příslušných dvou sousedních celočíselných hodnot) pro p odhad

$$\hat{p} = \sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}} \,/\, (\sqrt{(n-k)^2 - \tfrac{1}{4}} + \sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}}) ,$$

což lze při velkých k, n aproximovat výrazem

$$\frac{k}{n} - \frac{n-2k}{8kn(n-k)} .$$

Výsledky odvozené pro kbr lze zobecnit v několika směrech. Nebudeme-li rozlišovat vždy tři sousední hodnoty binomicky rozložené náhodné veličiny, obdržíme kbr ternární. Uvedu pro $n = 3k - 1$, $k > 2$ a pro rozložení kumulované pro hodnoty náhodné veličiny po skupinách 0, 1, 2; 3, 4, 5; atd. momentovou vytvořující funkci

$$M(\Theta) = e^{\Theta} \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{3}} \binom{n}{3k} q^{n-3k}(pe^{\Theta})^{3k} + \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{3}} \binom{n}{3k+1} q^{n-3k-1}(pe^{\Theta})^{3k+1} +$$
$$+ e^{-\Theta} \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{3}} \binom{n}{3k+2} q^{n-3k-2}(pe^{\Theta})^{3k+2} .$$

Součty označíme postupně A, B, C; dále $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Je tedy

$$M(\Theta) = Ae^{\Theta} + B + Ce^{-\Theta} .$$

Zřejmě platí

$$\begin{aligned}(q + pe^{\Theta})^n &= A + B + C ,\\ (q + \varepsilon pe^{\Theta})^n &= A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C ,\\ (q + \varepsilon^2 pe^{\Theta})^n &= A + \varepsilon^2 B + \varepsilon C ,\end{aligned}$$

neboť $\varepsilon^4 = \varepsilon$, ježto ε je třetí odmocnina z jedničky.

Z těchto rovnic vypočteme A, B, C a po dosazení do $M(\Theta)$ obdržíme

$$3M(\Theta) = (q + pe^{\Theta})^n(e^{\Theta} + 1 + e^{-\Theta}) + (q + p\varepsilon e^{\Theta})^n(e^{\Theta} + \varepsilon^2 + \varepsilon e^{-\Theta}) +$$
$$+ (q + p\varepsilon^2 e^{\Theta})^n(e^{\Theta} + \varepsilon + \varepsilon^2 e^{-\Theta}) . \tag{12}$$

Pro průměr uvedeného rozložení obdržíme

$$\mu_1' = np + \frac{1}{3}\left(q - \frac{p}{2} + i\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(q - \frac{p}{2} - i\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)^n$$
$$\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Poněvadž

$$\left| q - \frac{p}{2} \pm i\,\frac{p\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{1 - 3pq}\,,\ \text{je} \lim_{n \to \infty} (\mu_1' - np) = 0\,.$$

Je zřejmé, jak by se postupovalo při kumulaci do širších skupin.

Stejně jako jsme odvodili z binomického rozložení kbr, možno odvodit z rozložení multinomických kumulovaná rozložení multinomická, jež jsou popisem vícerozměrných procesů obnovy, studujeme-li je jako posloupnosti vyřazení. Podrobnosti viz v [4] a [5].

LITERATURA

[1] *L. Truksa:* Statistická dynamika, Praha, 1956 (litogr.).

[2] *W. Feller:* An Introduction to Probability Theory and its Applications, New York, 1951.

[3] *Т. А. Сарымсаков:* Основы теории процессов Маркова, Москва, 1954.

[4] *L. A. Goodman:* Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions. Journal of the American Statistical Association. Vol. *48* (1953), 503—530.

[5] *J. Bílý:* Měření životnosti věcí za provozních podmínek. Pokroky matematiky fysiky a astronomie, *1* (1957), 14—18.

Резюме

ЦЕПЬ МАРКОВА, ПРИВОДЯЩАЯ К СВЕРТКЕ БИНОМИНАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И К КУМУЛИРОВАННОМУ БИНОМИНАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

ИОЗЕФ БИЛЫ (Josef Bílý), Прага

(Поступило в редакцию 13/IX 1958 г.)

При помощи урновой схемы в статье строится однородная цепь Маркова с состояниями $E_0, E_1, \ldots, E_n$ с вероятностями перехода (1), (1a), финальное распределение которой является биноминальным распределением (2). Путем видоизменения урновой схемы указанная цепь обобщается так, что вероятности перехода даны формулами (3). Для обобщенной цепи выводятся финальные распределения, а именно, для случая (3), (3a) в виде (4) — свёртка биноминального распределения с альтернативным распределением —, для случая же (3), (3b) в виде (6)—(9) — два т. наз. кумулированные биномиальные распределения, получающиеся из биномиального распределения путем соединения двух соседних классов. Для всех этих распределений выводятся производящие функции для моментов (10), (11)

и моменты первого и второго порядков (10a), (11b). В заключение исследуется распределение, получающееся из биномиального распределения путем соединения трех соседних классов; для случая $n = 3k - 1$, $k > 2$ приводится производящая функция для моментов (12) и момент первого порядка.

Zusammenfassung

EINE MARKOFFSCHE KETTE, DIE ZU EINER FALTUNG ZWEIER BINOMISCHEN VERTEILUNGEN UND ZU KUMULIERTEN BINOMISCHEN VERTEILUNGEN FÜHRT

JOSEF BÍLÝ, Praha

(Eingelangt am 13. September 1958)

Es wird eine homogene Markoffsche Kette mit den Zuständen $E_0, E_1, \ldots, E_n$ konstruiert, für die die Übergangswahrscheinlichkeiten durch (1) und (1a) gegeben sind und für diese wird die finale Verteilung in der Form (2) abgeleitet. Diese Kette wird dann verallgemeinert, wobei ein Urnenschema zu den Übergangswahrscheinlichkeiten (3) konstruiert wird. Es wird nachgewiesen, dass die finale Verteilung für den Fall (3), (3a) durch (4), (4a), (4b) — Faltung zweier binomischen Verteilungen — für den Fall (3), (3b) durch (6) bis (9) — erste bzw. zweite kumulierte binomische Verteilung — bestimmt ist. Für die Verteilung (4) wird in (10) die Momenterzeugende Funktion, in (10a) die ersten zwei Momente angegeben; für die kumulierten binomischen Verteilungen werden entsprechende Resultate in (11), (11a), (11b) angegeben.

Schliesslich wird eine durch Zusammenlegung dreier benachbarten Klassen einer binomischen Verteilung entstehende Verteilung studiert.