Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Hájek

Nerovnosti pro zobecněné Studentovo rozdělení a jejich použití

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 2, 182--194

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117253`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

NEROVNOSTI PRO ZOBECNĚNÉ STUDENTOVO ROZDĚLENÍ A JEJICH POUŽITÍ

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 20. března 1956.) DT:519.271

Zobecnění spočívá v tom, že odhad rozptylu nemá obvyklou strukturu (1), ale složitější strukturu (2). Tak tomu bývá při zpracování k nezávislých výběrů, jejichž rozptyly se neznámým způsobem liší. V tomto článku jsou nalezeny nerovnosti uvádějící takto zobecněné Studentovo rozdělení ve vztah s obyčejnými Studentovými rozděleními. Použití se týká obvyklého testování nulové hypothesy a sestrojování intervalu spolehlivosti.

1. Úvod a shrnutí. Víme-li, že určitá statistika (náhodná veličina) x se řídí normálním rozdělením, pak k posouzení odchylky $x - \mu$ od její střední hodnoty μ stačí znát buď její rozptyl σ^2, nebo alespoň některý jeho odhad s^2. STUDENT ve své klasické práci nalezl rozdělení poměru $(x - \mu)/s$ pro případ, kdy s^2 má strukturu

$$s^2 = \sigma^2 \frac{1}{m} \chi^2(m) , \tag{1}$$

kde $\chi^2(m)$ značí náhodnou veličinu nezávislou na x a řídící se chí-kvadrát rozdělením s m stupni volnosti. Je to známé Studentovo rozdělení s m stupni volnosti. Od těch dob se statistikové nejednou zabývali problémem jak se $(x - \mu)/s$ chová za předpokladů, které — jak tomu v praxi často bývá — se poněkud liší od těch, z nichž vyšel Student. Zjistilo se ku příkladu, že rozdělení Studentova poměru $(x - \mu)/s$ není příliš citlivé na eventuální odchylky výchozího zákona rozdělení od normálního. V tomto článku se budeme zabývat jinou odchylkou od Studentových předpokladů, spočívající v tom, že s^2 má poněkud složitější strukturu, a to

$$s^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{m_j} \chi_j^2(m_j) , \quad \lambda_j \geqq 0 , \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 , \tag{2}$$

kde λ_j jsou neznámé konstanty a $\chi_j^2(m_j)$ jsou nezávislé jak mezi sebou tak i na x. V důsledku aditivnosti nezávislých χ^2-veličin, (2) je totožné s (1), jakmile $m_1 + \ldots + m_k = m$ a $\lambda_j/m_j = 1/m$.

K odhadu (2) docházíme při zpracování k nezávislých výběrů, jejichž rozptyly se neznámým způsobem liší. V některých případech totiž postupujeme tak, že nejprve pro každý výběr vypočteme určitou statistiku x_j a odhad s_j^2 pro její rozptyl σ_j^2; potom položíme $x = x_1 + \ldots + x_k$ a v souhlase s tím

$$s^2 = s_1^2 + \ldots + s_k^2 \,. \tag{3}$$

Má-li každé s_j^2 strukturu (1) s m_j stupni, volnosti t. j. $s_j^2 = \sigma_j^2 \frac{1}{m_j} \chi_j^2(m_j)$, pak s^2 má strukturu (2), přičemž $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$.[1])

Klasickým příkladem tohoto druhu je rozdíl $\bar{x} - \bar{y}$ dvou výběrových průměrů, jestliže x-ová pozorování mají jiný rozptyl než y-ová. Tímto problémem se zabýval R. A. FISHER v práci [1], kde podal fiduciální řešení, které vyvolalo dosud neukončenou polemiku. Fisherovo a pozdější Welchovo řešení [2] je založeno na zjištění, že pravděpodobnost nerovnosti $x - \mu < t\, s$, kde s má strukturu (2), lze učinit nezávislou na číslech λ_j tím způsobem, že i číslo t je náhodnou veličinou — určitou funkcí podílů $s_j^2/(s_1^2 + \ldots + s_k^2)$, kde s_j^2 jsou známé složky odhadu (3). U Fishera ovšem běží o fiduciální pravděpodobnost, kdežto u L. B. WELCHE o pravděpodobnost v obyčejném slova smyslu. Numericky se obě řešení příliš neliší; příslušné tabulky vypracované v [3] a [4] pro $k = 2$ mají tři vchody — pro m_1, m_2 a $s_1^2/(s_1^2 + s_2^2)$. Již pro $k = 3$ by muselo být vchodů pět, což není prakticky uskutečnitelné. Proto Welch navrhl přibližné řešení, při němž t se vyhledává ze Studentova rozdělení s náhodným počtem stupňů volnosti[2])

$$m' = \frac{(s_1^2 + \ldots + s_k^2)^2}{\sum_{j=1}^{k} s_j^4 / (m_j + 2)} - 2 \,, \tag{5}$$

který nazývá *efektivním* počtem stupňů volnosti. Welch v [5] numericky ukázal, že použití efektivního počtu stupňů volnosti dává dobré výsledky i při malých počtech stupňů volnosti.

V tomto článku se předpokládá struktura (2) a dokazuje se, že pravděpodobnost toho, že $(x - \mu)/s$ padne do určitého intervalu obsahujícího nulu,

---

[1]) Odhadu $s^2_1 + \ldots + s^2_k$ však používáme jenom tehdy, jestliže poměry λ_j skutečně neznáme. Známe-li je, pak lepší je odhad

$$s^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{s^2_j m_j}{\lambda_j m} = (\sigma^2_1 + \ldots + \sigma^2_k) \sum_{j=1}^{k} m_j \frac{s^2_j}{\sigma^2_j} \,, \tag{4}$$

který má strukturu (1) s $m = m_1 + \ldots + m_k$ stupni volnosti. Na druhé straně, jakmile poměry $\sigma^2_j/(\sigma^2_1 + \ldots + \sigma^2_k)$ patřičně neznáme, odhad (4) se může stát klamným, protože potom nemusí být ani nestranný.

[2]) *Welch* váhá mezi vzorcem (5) a jednodušším vzorcem $(s^2_1 + \ldots + s^2_k)^2/(\sum_{j=1}^{k} s^4_j/m_j)$. Pro nepříliš malá m_j, jak tomu bývá při biologických experimentech, jsou oba vzorce rovnocenné. Mám však na mysli také aplikace při oblastních variantách výběrových šetření, kde v případě, že v každé oblasti vybíráme jen 2 jednotky, dostáváme $m_j = 1$, a potom je patrně lepší (5). Odůvodnění vzorce (5) bude podáno v odstavci 4.

je při jakýchkoliv číslech λ_j menší, než obdobná pravděpodobnost pro Studentovo rozdělení s $m = m_1 + \ldots + m_k$ stupni volnosti,[3]) že však je vždy větší než pro Studentovo rozdělení s počtem stupňů volnosti nepřesahujícím žádné z čísel m_j/λ_j, na př. rovným nejmenšímu z čísel m_j. Tento výsledek je použitelný při testování nulové hypothesy, neboť v souhlase s ním tuto hypothesu je nutno zamítnout, je-li zamítána při počtu stupňů volnosti rovném nejmenšímu z čísel m_j, a není ji nutno zamítnout, není-li zamítána při $m = m_1 + \ldots$ $\ldots + m_k$ stupních volnosti; podobně se ho dá užít při sestrojování intervalů spolehlivosti. Je to také další argument pro používání efektivního počtu stupňů volnosti.

2. Sestrojení pomocných náhodných veličin α_j. V příštím odstavci budeme potřebovat náhodné veličiny α_j, které mají předepsané střední hodnoty

$$M\alpha_j = \lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \lambda_j > 0\,, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \tag{6}$$

a současně splňují podmínku, že při každé konkretní realisaci

$$\nu \text{ z veličin } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \text{ je rovno } \frac{1}{\nu} \text{ a ostatních } m - \nu \text{ je rovno } 0\,. \tag{7}$$

Jinak řečeno, náhodné veličiny α_j musí být náhodnou permutací m čísel, mezi nimiž ν je rovno $1/\nu$ a ostatních $m - \nu$ je rovno 0, při čemž pravděpodobnosti musí být jednotlivým permutacím přiřazeny tak, aby platilo (6). To zřejmě není možno učinit pro každá čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ a ν. Na př. z podmínky (7) bezprostředně vyplývá, že maximální hodnota každé veličiny α_j je rovna $1/\nu$, a ta nemůže být menší než její střední hodnota, t. j. musí platit

$$\lambda_j \leqq \frac{1}{\nu}\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,. \tag{8}$$

Jak si však nyní ukážeme, podmínka (8) je nejen nutná, ale i postačující k tomu, aby hledané náhodné veličiny α_j existovaly.

Rozdělme si zprava otevřený interval $\langle 0, 1)$ na m zprava otevřených intervalů s délkami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, na př. na intervaly

$$\Delta_j = \langle \lambda_1 + \ldots + \lambda_{j-1}, \lambda_1 + \ldots + \lambda_j)\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{9}$$

Potom každému bodu $\omega \in \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ přiřaďme hodnoty veličin $\alpha_j = \alpha_j(\omega)$ tak, že

$$\alpha_j = \frac{1}{\nu}\,, \text{ když některý z bodů } \omega, \omega + \frac{1}{\nu}, \ldots, \omega + \frac{\nu - 1}{\nu} \text{ padne do intervalu } \Delta_j, \text{ a}$$
$$\alpha_j = 0 \text{ v opačném případě.} \tag{10}$$

[3]) Odtud plyne, že v případě, kdy λ_j známe, je odhad (4) skutečně vždy lepší než odhad (3).

Každý z ν bodů $\omega, \omega + \frac{1}{\nu}, \ldots, \omega + \frac{\nu - 1}{\nu}$ padne do j i n é h o intervalu Δ_j, protože v souhlase s předpokladem (8) jsou vzdálenosti těchto bodů větší nebo nanejvýš rovny délkám λ_j intervalů Δ_j. To však právě znamená, že pro každý bod $\omega \in \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ je splněna podmínka (7).

Zbývá tedy ukázat, že bodům $\omega \in \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ lze dát takové rozdělení pravděpodobností, aby platilo (6). Tomuto požadavku však zřejmě vyhovuje rovnoměrné rozdělení, při kterém pravděpodobnost jevu $\omega \in \Delta$ pro $\Delta \subset \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ je rovna $\nu\, d(\Delta)$, kde $d(\Delta)$ značí délku intervalu Δ. Skutečně, potom pravděpodobnost toho, že u r č i t ý z bodů $\omega + \frac{h-1}{\nu}$ padne do daného intervalu Δ_j, bude rovna ν-násobku délky společné části tohoto intervalu s oborem náhodné veličiny $\omega + \frac{h-1}{\nu}$, t. j. s intervalem $\left\langle \frac{h-1}{\nu}, \frac{h}{\nu}\right)$; symbolicky

$$P\left(\omega + \frac{h-1}{\nu} \in \Delta_j\right) = \nu d \left\{\Delta_j \cap \left\langle \frac{h-1}{\nu}, \frac{h}{\nu}\right)\right\}.$$

Jevy $\omega + \frac{h-1}{\nu} \in \Delta_j$, $h = 1, 2, \ldots, \nu$, jak již bylo výše zjištěno, se vzájemně vylučují, a proto pravděpodobnost nastoupení aspoň jednoho z nich, t. pravděpodobnost jevu $\alpha_j = \frac{1}{\nu}$, je rovna

$$P\left(\alpha_j = \frac{1}{\nu}\right) = \nu \sum_{h=1}^{\nu} d\left\{\Delta_j \cap \left\langle \frac{h-1}{\nu}, \frac{h}{\nu}\right)\right\} =$$

$$= \nu d\{\Delta_j \cap \langle 0, 1)\} = \nu d\{\Delta_j\} = \nu\lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Odtud plyne, že $M\alpha_j = \frac{1}{\nu} P\left(\alpha_j = \frac{1}{\nu}\right) = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, což bylo třeba dokázat.

3. Hlavní výsledek. Důkaz hlavní věty se bude opírat o Jensenovu nerovnost, kterou lze vyslovit takto: Je-li funkce reálné proměnné f k o n k á v n í v oboru hodnot, jichž může nabývat náhodná veličina y, a značí-li M střední hodnotu, pak[4])

$$Mf(y) \leqq f(My)\,. \tag{11}$$

[4]) Viz: *Littelwood, Hardy, Pólya*: „Inequalities", str. 111. Pro konvexní funkce platí nerovnost opačná.

V našem případě půjde o funkci

$$\Phi(t\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \,. \tag{12}$$

Jelikož její derivace $\frac{\partial}{\partial y} \Phi(t\sqrt{y}) = \frac{te^{-\frac{1}{2}t^2 y}}{2\sqrt{2\pi y}}$ je pro libovolné $t > 0$ klesající funkcí y v oboru $0 < y < \infty$, je tato funkce konkávní v oboru $0 < y < \infty$. K tomuto oboru můžeme zřejmě přidat i bod $y = 0$, neboť $\Phi(t\sqrt{y})$ je v bodě $y = 0$ spojitá. V souhlase s Jensenovou nerovností lze tedy pro každou nezápornou náhodnou veličinu y psát

$$M\Phi(t\sqrt{y}) \leqq \Phi(t\sqrt{My}) \,. \tag{13}$$

Nyní dokažme hlavní výsledek:

Nechť x je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Pro rozptyl σ^2 mějme odhad s^2, který je nezávislý na x a má strukturu (2); *zvolme libovolné hranice $t' \leqq 0 \leqq t''$. Potom pravděpodobnost jevu*

$$t' < \frac{x - \mu}{s} < t'' \,, \quad t' \leqq 0 \leqq t'' \tag{14}$$

leží v mezích

$$P_\nu \leqq P \leqq P_m \,, \tag{15}$$

kde P_m resp. P_ν je pravděpodobnost jevu (14) *za předpokladu, že $(x - \mu)/s$ má Studentovo rozdělení s m resp. s ν stupni volnosti, při čemž*

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k \,, \tag{16}$$

a za ν lze vzít libovolné celé číslo

$$\nu \leqq \min_{1 \leqq j \leqq k} \frac{m_j}{\lambda_j} \,, \tag{17}$$

na př.

$$\nu = \min_{1 \leqq j \leqq k} m_j \,. \tag{18}$$

Dříve než přikročíme k vlastnímu důkazu, všimněme si následujících dvou zjednodušujících okolností. Za prvé, každou náhodnou veličinu $\chi_j^2(m_j)$ můžeme rozložit na součet m_j nezávislých chí-kvadrát veličin s jedním stupněm volnosti, a v souhlase s tím strukturu (2) přepsat do tvaru

$$s^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_j^2(1) \,, \quad m = m_1 + \ldots + m_k \,, \quad \lambda_j \geqq 0 \,, \ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \,. \tag{19}$$

Tento tvar nám umožňuje pustit se zřetele čísla m_j a mít na paměti jen to, že konstantám λ_j v (19) odpovídají konstanty λ_j/m_j v (2). Za druhé, jelikož rozdělení poměru $(x - \mu)/s$ ať už s obyčejným či se zobecněným s^2 je symetrické kolem nuly,[5]) stačí nerovnosti (15) dokázat jen pro pravděpodobnosti jevu

$$0 < \frac{x - \mu}{s} < t \tag{20}$$

při libovolně zvoleném $t > 0$.

Podmíněné rozdělení $(x - \mu)/s$ při pevně zvoleném s^2 je normální $(0, s^2/\sigma^2)$, takže, používajíce definice (12), můžeme podmíněnou pravděpodobnost jevu (20) napsat ve tvaru $\Phi(t\sqrt{s^2/\sigma^2})$. To však znamená, že nepodmíněná pravděpodobnost jevu (20) je rovna

$$P\left(0 < \frac{x - \mu}{s} < t\right) = E\Phi(t\sqrt{s^2/\sigma^2})\,, \tag{21}$$

kde E značí střední hodnotu přes s^2. Hodnota pravděpodobnosti (21) závisí na tom či onom tvaru odhadu s^2. Má-li odhad s^2 strukturu (1), pak dostaneme pravděpodobnost

$$P_m = E\Phi\left(t\sqrt{\frac{1}{m}\chi^2(m)}\right) \tag{22}$$

odpovídající Studentovu rozdělení s m stupni volnosti, kdežto obecné struktuře (19) odpovídá pravděpodobnost

$$P = E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\chi_j^2(1)}\right). \tag{23}$$

Jelikož náhodné veličiny $\chi_j^2(1)$ jsou nezávislé a mají totožný zákon rozdělení, hodnota P se nezmění, nahradíme-li konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ libovolnou jejich permutací $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$:

$$P = E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \beta_j\chi_j^2(1)}\right) \text{ pro libovolnou permutaci } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \text{ čísel } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m.$$

Platí-li tato identita pro libovolnou permutaci, platí (ve smyslu střední hodnoty) i pro náhodně vybranou permutaci $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Necháme-li pravděpodobnosti jednotlivých permutací $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ zatím blíže neurčeny a vynahradíme-li si symbol E pro střední hodnotu přes $\chi_j^2(1)$ a symbol M pro střední hodnotu přes β_j, můžeme P napsat ve tvaru následujících iterovaných středních hodnot:

$$P = ME\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_j^2(1)}\right) = EM\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_j^2(1)}\right).$$

Použijeme-li na vnitřní střední hodnotu v posledním výraze Jensenovu nerovnost (13), dostáváme, že

$$P \leqq E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(M\beta_j)\,\chi_j^2(1)}\right). \tag{24}$$

[5]) K symetrii kolem nuly stačí jen to, aby s^2 bylo nezávislé na x.

Nyní stačí dát každé permutaci $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ stejnou pravděpodobnost $1/m!$.

Pak zřejmě je $M\beta_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \frac{1}{m}$, což dosazeno do (24) dává

$$P \leqq E\Phi\left(t \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \chi_j^2(1)}\right) = E\Phi\left(t \sqrt{\frac{1}{m} \chi^2(m)}\right) = P_m .$$

Tím je dokázána nerovnost $P \leqq P_m$. Nerovnost $P_\nu \leqq P$ dokážeme obdobně pomocí náhodných veličin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sestrojených v předešlém odstavci. V souhlase s (7) vždy ν z těchto veličin je rovno $1/\nu$ a $m - \nu$ je rovno 0, takže vždy $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j^2(1) = \frac{1}{\nu} \chi^2(\nu)$, a v důsledku toho pro každou realisaci náhodných veličin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ je $P_\nu = E\Phi\left(t \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j^2(1)}\right)$, kde P_ν označuje pravděpodobnost jevu (20) za předpokladu, že $(x - \mu)/s$ má Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti. Provedeme-li znovu tentýž řetěz úvah jako prve, a vezmeme-li v patrnost, že v souhlase s (6) platí $M\alpha_j = \lambda_j$, dostáváme, že

$$P_\nu = ME\Phi\left(t \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j^2(1)}\right) = EM\Phi\left(t \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_j^2(1)}\right) \leqq$$

$$\leqq E\Phi\left(t \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (M\alpha_j)\, \chi_j^2(1)}\right) = E\Phi\left(t \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_j^2(1)}\right) = P .$$

Jedinou podmínkou pro existenci náhodných veličin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ s právě použitými vlastnostmi (6) a (7) bylo splnění nerovností (8). Tyto nerovnosti jsou však totožné s nerovností (17) neboť, jak již bylo řečeno, za λ_j ve vzorci (19) je nutno vzít λ_j/m_j ze vzorce (2). Tím je důkaz skončen.

Dokázanou větu by bylo možno vyslovit také tak, že zobecněné Studentovo rozdělení je méně koncentrováno kolem nuly než obyčejné Studentovo rozdělení s $m = m_1 + \ldots + m_k$ stupni volnosti, avšak na druhé straně, že je koncentrovanější než obyčejné Studentovo rozdělení s $\min_{1 \leqq j \leqq k} \{m_j\}$ stupni volnosti. Obecně lze také říci, že rozdělení odpovídající konstantám $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ve struktuře (19) je koncentrovanější kolem nuly než rozdělení odpovídající jiným konstantám $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m$, jakmile čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ lze vyjádřit jako střední hodnoty permutace čísel $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m$, znáhodněné pomocí vhodných pravděpodobností.

4. Použití. Ukažme si nejdříve na několika příkladech, jak lze odvozený výsledek použít k testování nulové hypotesy. Přesněji řečeno, půjde o to, pomocí t-testu prověřit hypotesu, že určitá statistika, pro jejíž rozptyl máme odhad se strukturou (2), má danou (řekněme nulovou) střední hodnotu.

Příklad 1. Pomocí obvyklého t-testu byly porovnány dva nezávislé výběrové průměry, každý z 12-ti pozorování, a vyšlo

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = 2{,}52 .$$

(Nulová hypotesa: $\bar{x} - \bar{y}$ má střední hodnotu 0; s_1^2 a s_2^2 jsou odhady rozptylů $\bar{x}$ a $\bar{y}$.) Jelikož se pracovalo na 5% hladině významnosti a s $12 + 12 - 2 = 22$ stupni volnosti, byla tato hodnota uznána za významnou, neboť je větší než příslušná kritická hodnota $t = 2{,}09$. Později se však vyskytla námitka, že rozptyly ve obou výběrech se nezdají být stejné. Jinými slovy, vzniklo podezření, že t se řídí nikoliv obyčejným, ale zobecněným Studentovým rozdělením. Jelikož však nejmenší z čísel $m_1 = m_2 = 11$ je rovno 11 a kritická hodnota pro 11 stupňů volnosti je rovna $t = 2{,}20$, což je stále menší než 2,52, musí být $t = 2{,}52$ uznáno významným bez ohledu na stejnost či nestejnost rozptylů.

Příklad 2. Mějme stejný případ jako v příkladu 1, jen s tím rozdílem, že vyšlo $t = 2{,}16$. Tato hodnota je sice významná při 22 stupních volnosti, avšak není významná při 11 stupních volnosti. Připusťme však, že se dá předpokládat, že žádný z rozptylů σ_1^2 a σ_2^2 není víc jak třikrát tak velký než druhý, t. j. že maximální z čísel $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, $j = 1, 2$, není větší než $\frac{3}{4}$. Potom však

$$\min_{j=1,2} \frac{m_j}{\lambda_j} \geqq 11 \frac{4}{3} > 14 ,$$

a proto v souhlase s podmínkou (17) můžeme použít kritickou hodnotu pro 14 stupňů volnosti $t = 2{,}14$, vzhledem k níž napozorovaná hodnota $t = 2{,}16$ zůstává významnou.

V předešlých dvou příkladech jsme se zabývali nejjednodušším případem, kdy $k = 2$, $m_1 = m_2$ a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ a tedy i $\lambda_1 = \lambda_2$. Tento případ je pozoruhodný tím, že odhady (3) a (4) jsou totožné, takže případná mýlka v předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ($\lambda_1 = \lambda_2$) nemá vliv na nestrannost s^2, ale pouze na to, že struktura (1) přejde ve strukturu (2). Použijeme-li však odhadu (4) v situaci, kde σ_j^2 resp. m_j se navzájem liší, pak mýlka v poměrech $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$ má komplikovanější následky. Odhad (4), jsou-li v něm čísla λ_j zvolena libovolně, lze napsat ve tvaru

$$s^2 = (\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2) \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j^0}{m_j} \chi_j^2(m_j) , \quad \text{kde}$$

$$\lambda_j^0 = \frac{\sigma_j^2 m_j}{\lambda_j(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)\, m} , \quad j = 1, 2, \ldots, m .$$

Neplatí-li $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$, pak nemusí platit ani $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 = 1$, t. j. odhad

(4) nejenže nemá strukturu (1), ale není ani nestranný. Jestliže $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 < 1$, pak střední hodnota s^2 je posunuta směrem k nule, a tudíž nejen počet stupňů volnosti, ale i sama hodnota t je nadceněna. Zde je tedy nebezpečí ukvapeného zamítnutí nulové hypotesy největší. Jestliže $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 > 1$, pak střední hodnota s^2 je posunuta vzhůru, a tedy zatím co počet stupňů volnosti je nadceněn, hodnoty t jsou podceněny. Z těchto důvodů, jakmile vzniknou pochybnosti o (alespoň přibližně) správné volbě čísel λ_j, je lépe od odhadu (4) upustit a použít odhadu (3).

Příklad 3. Z dvou nezávislých výběrů o 10 a 15 pozorováních byly vypočteny průměry $\bar{x} = 213$ a $\bar{y} = 155$ a odhady jejich rozptylů $s_1^2 = 526$ a $s_2^2 = 94$. Bylo předpokládáno, že jednotlivá pozorování v obou výběrech mají stejný rozptyl, takže rozptyly výběrových průměrů jsou nepřímo úměrné počtu pozorování, z nichž byly vypočteny, t. j. $\sigma_1^2 : \sigma_2^2 = 15 : 10$ a tedy $\lambda_1 = \frac{3}{5}$ a $\lambda_2 = \frac{2}{5}$. Podle vzorce (4) byl vypočten odhad rozptylu $s^2 = \frac{s_1^2 m_1}{\lambda_1 m} + \frac{s_2^2 m_2}{\lambda_2 m} = \frac{526 \,.\, 9}{\frac{3}{5} \,.\, 23} + \frac{94 \,.\, 14}{\frac{2}{5} \,.\, 23} = 486$ a potom

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} = \frac{213 - 155}{\sqrt{486}} = 2{,}63\,.$$

Tato hodnota je na 5%-ní hladině a při 23 stupních volnosti jasně významná. Avšak přílišná rozdílnost s_1^2 a s_2^2 vyvolala pochybnosti o správnosti domněnky, že $\sigma_1^2 : \sigma_2^2 = 15 : 10$, a proto bylo rozhodnuto odhadnout rozptyl podle (3), t. j. vzít $s^2 = s_1^2 + s_2^2 = 526 + 94 = 620$ a $t = \frac{213 - 155}{\sqrt{620}} \doteq 2{,}33$. Tato hodnota je na 5%-ní hladině významná i tehdy, použijeme-li $9 = \min\,[9, 14]$ stupňů volnosti, neboť příslušný kritický bod je $t = 2{,}26$. Lze tedy rozdíl $\bar{x} - \bar{y}$ považovat za významně velký bez ohledu na případnou nestejnost rozptylů.

Příklad 4. Mějme tentýž případ jako v příkladu 3, jen s tím rozdílem, že $\bar{y} = 165$, takže prvně vypočtená hodnota $t = \frac{48}{\sqrt{486}} \doteq 2{,}18$, což je při 23 stupních volnosti stále ještě významné. Opravená hodnota však bude $t = \frac{48}{\sqrt{620}} \doteq 1{,}93$, což při 23 stupních volnosti významné není, a proto nelze nulovou hypotesu na 5%-ní hladině zamítnout.

Nalezené nerovnosti vnukají myšlenku aproximovat zobecněné Studentovo rozdělení obyčejným Studentovým rozdělením s vhodně zvoleným počtem stupňů volnosti. Volíme-li tento počet stupňů volnosti m' tak, že s^2 se strukturou (1) a s m' stupni volnosti má stejný rozptyl jako s^2 se strukturou (2), vyjde nám po snadném výpočtu, že

$$m' = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2/m_j}. \tag{25}$$

Avšak čísla λ_j, jak již bylo řečeno, neznáme, protože jinak bychom použili vzorce (4) a celý problém by zmizel. Nezbývá tedy než odhadnout λ_j z výběru. Jestliže s^2 je dáno jako součet (3), pak odhadem pro (25) je právě (5). Není to sice odhad nestranný, ale je jednoduchou funkcí dvou nestranných odhadů, což má prakticky stejný účinek jako nestrannost sama:

$$\frac{E(s_1^2 + \ldots + s_k^2)^2}{E\sum_{j=1}^{k} s_j^4/(m_j+2)} - 2 = \frac{(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)^2 + 2\sum \sigma_j^4/m_j}{\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^4/m_j} - 2 = \frac{(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)^2}{\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^4/m_j},$$

což je rovno právě (25), neboť $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$.

Příklad 5. Tři nezávislé výběry nám daly následující statistiky, odhady jejich rozptylů a příslušné stupně volnosti:

$$\begin{aligned} x_1 &= 11{,}8\,, & s_1^2 &= 1{,}02\,, & m_1 &= 10\,,\\ x_2 &= 16{,}4\,, & s_2^2 &= 0{,}94\,, & m_2 &= 10\,,\\ x_3 &= 14{,}1\,, & s_3^2 &= 0{,}52\,, & m_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

Úkolem je najít 5%-ní interval spolehlivosti kolem statistiky

$$x = 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = 13{,}41\,.$$

Dosadíme-li do (5) rozptyly jednotlivých sčítanců a příslušné stupně volnosti, dostáváme

$$m' = \frac{[(0{,}5)^2\,1{,}02 + (0{,}2)^2\,0{,}94 + (0{,}3)^2\,0{,}52]^2}{\frac{[(0{,}5)^2\,1{,}02]^2}{10+2} + \frac{[(0{,}2)^2\,0{,}94]^2}{10+2} + \frac{[(0{,}3)^2\,0{,}52]^2}{4+2}} - 2 = \frac{(0{,}3394)^2}{0{,}0059} - 2 \doteq 17{,}5\,.$$

Zaokrouhlíme-li směrem dolů, efektivní počet stupňů volnosti je roven $m' = 17$ a příslušné $t = 2{,}11$. Odhad rozptylu x jsme nalezli při výpočtu m', a to $s^2 = 0{,}3394$, takže interval spolehlivosti $x \pm ts$ je roven $13{,}41 \pm 1{,}23$.

Poznámka. Jestliže minimální m_j není příliš malé, můžeme ho vzít za počet stupňů volnosti a být si vědomi toho, že dostaneme interval spolehlivosti, který pokryje neznámý parametr s poněkud větší pravděpodobností než je ta, kterou jsme požadovali.

LITERATURA

[1] *Fisher, R. A.:* The fiducial argument in statistical inference. Ann. Eug. Lond. *6* (1935), str. 391.

[2] *Welch, L. B.:* The generalisation of Student's problem when several different population variances are involved. Biometrika *XXXIV* (1947), str. 28—35.

[3] *Sukhatme, P. V.:* On Fisher and Behrens'test of significance for the difference in means of two normal samples. Sankhya *4* (1938), str. 39.

[4] *Aspin, A. A.:* Tables for use in comparisons, whose accuracy involves two variances. Biometrika *XXXVI* (1949), str. 290—292.

[5] *Welch, L. B.:* Further note on Mrs Aspin's tables and on certain aproximations to the tabulated function. Biometrika *XXXVI* (1949), str. 293—296.

Резюме

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

ЯРОСЛАВ ГАЕК (Jaroslav Hájek), Прага.

(Поступило в редакцию 20/III 1956 г.)

В этой работе доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть x — нормально распределенная (μ, σ^2) случайная величина и пусть s^2 — оценка для σ^2, обладающая структурой*

$$s^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{m_j} \chi_j^2(m_j)\,, \quad \lambda_j \geqq 0\,, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1\,, \tag{2}$$

где λ_j — неизвестные постоянные, а случайные величины $\chi_j^2(m_j)$ обладают распределением хи-квадрат и независимы как друг от друга, так и от x; возьмем произвольные пределы $t' \leqq 0 \leqq t''$.

При этих условиях вероятность P события

$$t' < \frac{x-\mu}{s} < t''\,, \quad t' \leqq 0 \leqq t'' \tag{14}$$

лежит в пределах $P_\nu \leqq P \leqq P_m$, где P_m, соотв. P_ν, есть вероятность события (14) при условии, что $(x-\mu)/s$ обладает распределением Стьюдента с m, соотв. ν, степенями свободы, причем $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ и ν — любое целое число $\leqq \min\limits_{1 \leqq j \leqq k} \frac{m_j}{\lambda_j}$, напр. $\nu = \min\limits_{1 \leqq j \leqq k} m_j$.

Этот результат можно использовать для проверки нулевой гипотезы, что некоторая статистика x имеет предписанное среднее значение μ_0, а именно в случаях, когда оценка s^2 дисперсии статистики x обладает структурой (2). Действительно, наблюдаемое значение $t = \dfrac{x-\mu_0}{s}$ не является (независимо от чисел λ_j) значимым, поскольку оно не является значимым относительно распределения Стьюдента с $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ степенями свободы; наоборот, значение t будет (независимо от постоянных λ_j) значимым, если оно значимо относительно распределения Стьюдента с числом степеней свободы $\min\limits_{1 \leqq j \leqq k} m_j$. Такое положение наступает, напр. тогда, если x является линейной комбинацией k статистик, вычисленных из k независимых выборок, дисперсии которых отличаются друг от друга неизвестным образом. Самым известным случаем является разность двух независимых выборочных средних $\bar{x} - \bar{y}$.

Из теоремы следует между прочим и то, что доверительный интервал $x \pm ts$, где s^2 имеет структуру (2) и t взято из распределения Стьюдента с числом степеней свободы $\min\limits_{1 \leqq j \leqq k} m_j$, покроет среднее значение μ с вероятностью, большей чем та, которой соответствует использованное значение t.

Summary

INEQUALITIES FOR THE GENERALISED STUDENT'S DISTRIBUTION AND THEIR APPLICATIONS

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Received March 20, 1956.)

In this paper the following theorem is proved:

Theorem. *Let x be a normally (μ, σ^2) distributed random variable, and let s^2 be an estimate of σ^2 with the structure*

$$s^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{m_j} \chi_j^2(m_j) , \quad \lambda_j \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 , \tag{2}$$

where the λ_j's are unknown constants and the random variables $\chi_j^2(m_j)$ have chi-square distributions with m_j degrees of freedom and are independent of one another and of x; let us choose arbitrary bounds $t' \leqq 0 \leqq t''$.

Under these conditions the probability P of the event

$$t' \leqq \frac{x - \mu}{s} < t'' , \qquad t' \leqq 0 \leqq t'' \tag{14}$$

lies between the limits $P_\nu \leqq P \leqq P_m$, where P_m, P_ν denote the probability of the event (14) *under the condition that $(x - \mu)/s$ has Student's distribution with m, ν degrees of freedom, respectively, $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ and ν may be any arbitrary integer $\nu \leqq \min\limits_{1 \leqq j \leqq k} \frac{m_j}{\lambda_j}$, for example, $\nu = \min\limits_{1 \leqq j \leqq k} m_j$.*

This result may be applied to the testing of the null hypothesis that a statistic x has a prescribed mean value μ_0 provided that the estimate s^2 of the

variance of x has the structure (2). Indeed, the observed value $t = \frac{x - \mu_0}{s}$ is (independently of the λ_j's) not significant, if it is not significant with respect to the Student's distribution with $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ degrees of freedom; conversely, t is (independently of the λ_j's) significant if it is significant with respect to the Student's distribution with $\min_{1 \leqq j \leqq k} m_j$ degrees of freedom. Such a situation arises, for example, if x is a linear combination of k statistics evaluated from k independent samples, whose variances differ in an unknown manner. The most famous case is the difference of two independent sample means $\bar{x} - \bar{y}$.

From the theorem it also follows, that the confidence interval $x \pm ts$, where s^2 has the structure (2) and t is taken from the Student's distribution with $\min_{1 \leqq j \leqq k} m_j$ degrees of freedom, will contain the mean value μ with a probability greater than that which corresponds to the used t.