Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Z teorie konečných pravidelných grafov tretieho a štvrtého stupňa

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 1, 76--92

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117236

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

Z TEORIE KONEČNÝCH PRAVIDELNÝCH GRAFOV TRETIEHO A ŠTVRTÉHO STUPŇA

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Došlo dne 21. února 1956.) DT: 513.34.001

V článku pojednáva sa o systémoch uhlov konečného grafu a o ich vzťahu k systému všetkých eulerovských čiastočných grafov daného grafu. Zo získaných poznatkov o grafoch všeobecnejších odvodzujú sa dôsledky pre pravidelné grafy tretieho stupňa všeobecne a zvlášť pre také, ktoré majú aspoň jeden lineárny faktor, resp. ktoré sa dajú rozložiť na tri lineárne faktory. Na základe týchto poznatkov vyvodzujú sa vety o existencii lineárnych faktorov a hamiltonovských čiar v istých pravidelných grafoch štvrtého stupňa.

1. Definície a pomocné vety

V tomto príspevku používam termínov obvyklých v teorii grafov. Definície základných pojmov v tejto práci používaných sú uvedené napr. aj v mojej práci „O istých rozkladoch konečných grafov" (Matematicko fyzikálny časopis SAV, *V*, 1955, č. 3). Uvádzam preto na doplnenie len tieto definície:

Definícia 1. Hovoríme, že graf je orientovaný, ak pre každú hranu grafu je ustálený smer a to tak, že z dvoch uzlov u, v, s ktorými je ľubovoľná hrana incidentná, jeden ustalujeme ako počiatočný, druhý ako konečný uzol hrany. Ak u je počiatočný, v konečný uzol hrany h, vyjadrujeme sa tiež tak, že hrana h smeruje z uzla u do uzla v.

Definícia 2. Trojici prvkov grafu $\{u, h_1, h_2\}$ pozostávajúcej z uzla u a hrán $h_1 \neq h_2$ hovoríme uhol grafu s vrcholom v uzle u a s ramenami h_1, h_2, ak obe hrany h_1, h_2 sú incidentné s uzlom u.

Definícia 3. Kružnici K ľubovoľného konečného grafu hovoríme hamiltonovská čiara grafu, ak K obsahuje všetky uzly grafu.

Vzhľadom na to, že predmetom skúmania budú len konečné grafy, budeme v celej práci pod grafom rozumeť vždy konečný graf.

Prv než prikročíme ku skúmaniu pravidelných grafov, odvoďme si niektoré pomocné vety, ktoré majú všeobecnejšiu platnosť:

Veta 1. *Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný orientovaný hraf o q hranách. O počte n tých uzlov grafu $\vec{G}$, do ktorých smeruje nepárny počet hrán, platí $n \equiv q \pmod 2$.*

Dôkaz. Označme znakom $\xi(i)$ počet tých uzlov grafu $\vec{G}$, do ktorých smeruje práve i hrán. Pretože každá hrana orientovaného grafu smeruje práve do jednoho uzla platí: $q = \sum_{i=0}^{\infty} i\xi(i)$ z čoho ihneď vyplýva: $n = q - 2[\xi(2) + \xi(3) + 2\xi(4) + 2\xi(5) + \ldots]$ čiže $n \equiv q \pmod 2$.

Veta 2. *Nech $\vec{G}_1$ je ľubovoľný orientovaný súvislý graf, $u \neq v$ nech sú ľubovoľné dva jeho uzly a nech $\vec{C}$ je ľubovoľná cesta spojujúca uzly u, v v grafe $\vec{G}_1$ (pritom orientácia hrán cesty nemusí súhlasiť so smerom, v ktorom prichádzame z uzla u do uzla v). Ak zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty $\vec{C}$ v orientáciu opačnú a u ostatných hrán grafu $\vec{G}_1$ zachováme orientáciu bez zmeny, vznikne tak istý graf $\vec{G}_2$, o ktorom platí:*

1. *Do uzla u (resp. v) smeruje v grafe $\vec{G}_2$ párny resp. nepárny počet hrán práve vtedy, keď do tohoto uzla smeruje v grafe $\vec{G}_1$ nepárny resp. párny počet hrán.*

2. *Do ľubovoľného uzla w rôzneho od u a rôzneho od v smeruje v grafe $\vec{G}_2$ párny resp. nepárny počet hrán práve vtedy, keď do w v grafe $\vec{G}_1$ smeruje párny resp. nepárny počet hrán.*

Dôkaz. Uzol u (resp. v) je incidentný práve s jednou hranou cesty $\vec{C}$, teda zmena v orientácii hrán pri vzniku grafu $\vec{G}_2$ nastane práve u jednej hrany incidentnej s uzlom u (resp. v), z čoho hneď vyplýva tvrdenie 1.

Ak w je ľubovoľný iný uzol než u a iný ako v, potom buď w nie je uzlom cesty (čiže nenastane žiadna zmena v orientácii hrán incidentných s w pri vzniku grafu $\vec{G}_2$), alebo w je uzol cesty taký, že zmena v orientácii pri vzniku $\vec{G}_2$ nastala práve u dvoch hrán, s ktorými je uzol w incidentný, z čoho ihneď vyplýva tvrdenie 2.

Veta 3. *Nech G je ľubovoľný neorientovaný súvislý graf, ktorý má párny počet hrán, potom hrany grafu G možno orientovať tak, že vznikne orientovaný graf $\vec{G}$, v ktorom do každého uzla smeruje párny počet hrán.*

Dôkaz. Nech $\vec{G}_0$ je orientovaný graf, ktorý vznikne z G, ak orientujeme každú jeho hranu. Ak by už pri tejto orientácii hrán do každého uzla smeroval párny počet hrán, nebolo by treba nič dokazovať. Predpokladajme preto, že v $\vec{G}_0$ existujú také uzly, do ktorých smeruje nepárny počet hrán. Počet takýchto uzlov je podľa vety 1. párny, lebo počet hrán grafu G (resp. $\vec{G}_0$) je párny. Nech $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ sú tie uzly grafu G, do ktorých smeruje v $\vec{G}_0$ nepárny počet hrán. Pretože G a teda aj G_0 je podľa predpokladu súvislý graf, existujú v grafe G cesty $C_1, C_2, \ldots, C_n$ také, že cesta C_i spojuje uzly u_{2i-1}, u_{2i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ak zmeníme v grafe $\vec{G}_0$ orientáciu všetkých hrán cesty C_1 a zachováme orientáciu všetkých ostatných hrán grafu $\vec{G}_0$, vznikne tak istý graf $\vec{G}_1$. Ak v grafe $\vec{G}_1$ zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty C_2 a u ostatných hrán ponecháme orientáciu bez zmeny, vznikne tak istý graf $\vec{G}_2$ atď. až: ak zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty C_n v grafe $\vec{G}_{n-1}$ a zachováme orientáciu jeho ostatných hrán, dostaneme tak istý graf $\vec{G}_n$, v ktorom podľa vety 2. do všetkých uzlov bude smerovať párny počet hrán. $\vec{G} = \vec{G}_n$ je orientovaný graf požadovaných vlastností. Tým je veta 3. dokázaná.

Označme znakom $\mathfrak{A}(G) \neq \emptyset$ systém všetkých orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán istého neorientovaného grafu G a ktoré majú túto vlastnosť: do každého uzla ľubovoľného grafu $\vec{G} \in \mathfrak{A}(G)$ smeruje párny počet hrán. Označme znakom $\mathfrak{P}(G)$ systém všetkých tých čiastočných grafov grafu G, ktoré sú eulerovskými grafmi (t. j. grafmi, u ktorých každý uzol je párneho stupňa), pričom prvkom systému $\mathfrak{P}(G)$ nech je tiež nulový graf N (t. j. graf, ktorý nemá žiadnej hrany a žiadneho uzla).

Dokážme, že platí: *Systémy $\mathfrak{A}(G)$, $\mathfrak{P}(G)$ pre ľubovoľný konečný graf G s párnym počtom hrán sú ekvivalentné, t. j. existuje vždy prosté zobrazenie ω systému $\mathfrak{A}(G)$ na systém $\mathfrak{P}(G)$.*

Nech $\mathfrak{P}(G) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (kde $P_1 = N$) a nech $\vec{G}_1$ je orientovaný graf $\in \mathfrak{A}(G)$. Označme znakom $\vec{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ orientovaný graf, ktorý vznikne z grafu $\vec{G}_1$ tak, že zmeníme orientáciu všetkých hrán grafu P_i na orientáciu opačnú a u ostatných hrán ponecháme orientáciu bez zmeny. Je zrejme $\vec{G}_i \in \mathfrak{A}(G)$, pretože do ľubovoľného uzla $u \in G$ smeruje v grafe $\vec{G}_1$ podľa predpokladu párny počet hrán a pri vzniku grafu $\vec{G}_i$ dojde ku zmene orientácie hrany u párneho počtu hrán, s ktorými je uzol u incidentný (pretože P_i je eulerovský graf).

Nech ďalej $\vec{G}_x$ je ľubovoľný graf $\in \mathfrak{A}(G)$. Označme znakom $H_{1,x}$ množinu tých hrán grafu G, ktoré majú inú orientáciu v grafe $\vec{G}_1$ než v grafe $\vec{G}_x$ a znakom P_x čiastočný graf grafu G, ktorý pozostáva z hrán množiny $H_{1,x}$ a z tých uzlov grafu G, s ktorými je incidentná aspoň jedna hrana $\in H_{1,x}$. Tvrdím: P_x je eulerovský graf. Nech totiž u je ľubovoľný uzol $\in P_x$. Podľa predpokladu do uzla u smeruje ako v grafe $\vec{G}_1$ tak aj v grafe $\vec{G}_x$ párny počet hrán, preto je potrebné zmeniť orientáciu u párneho počtu hrán incidentných s uzlom u v grafe $\vec{G}_1$, aby všetky hrany incidentné s u mali takú istú orientáciu ako v $\vec{G}_x$, čiže každý uzol grafu P_x je párneho stupňa t. j. $P_x \in \mathfrak{P}(G)$.

Uvážme ešte toto: nech $P_i, P_j \in \mathfrak{P}(G)$ sú dva rôzne eulerovské grafy. U grafov $\vec{G}_i$, $\vec{G}_j$, ktoré vzniknú s grafu $\vec{G}_1$ popísaným spôsobom, bude mať aspoň jedna hrana odlišnú orientáciu. Teda $\vec{G}_i$, $\vec{G}_j$ sú rôzne grafy. Je preto $\mathfrak{A}(G) =$

$= \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_n\}$ a ak položíme $\omega(\vec{G}_i) = P_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ je tým definované prosté zobrazenie ω systému $\mathfrak{A}(G)$ na systém $\mathfrak{P}(G)$, teda systémy $\mathfrak{A}(G)$, $\mathfrak{P}(G)$ sú ekvivalentné. Z toho vyplýva napr., že strom S s párnym počtom hrán možno práve jedným spôsobom orientovať tak, aby do každého uzla smeroval párny počet hrán (stromom nazývame súvislý graf, ktorý neobsahuje žiadnu kružnicu a teda ani žiadny nenulový eulerovský graf), pretože systém $\mathfrak{P}(S)$ obsahuje jediný prvok: graf N.

Poznámka 1. Je známe, že o počte x eulerovských čiastočných grafov súvislého konečného grafu o m uzloch a n hranách platí: $x = 2^{n-m+1}$. Uvedený poznatok dáva nám preto možnosť ľahko vypočítať počet prvkov systému $\mathfrak{A}(G)$.

Veta 4. *Nech G je ľubovoľný súvislý graf s párnym počtom hrán, potom existuje systém $\mathfrak{W}$ uhlov grafu G taký, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla systému $\mathfrak{W}$ a systém uhlov s touto vlastnosťou existuje len vtedy, keď graf G má párny počet hrán.*

Dôkaz. I. Podľa vety 3. možno orientovať hrany grafu G tak, že vznikne orientovaný graf $\vec{G}$, v ktorom do každého uzla smeruje párny počet hrán. Nech $\bar{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ je množina tých uzlov grafu G (teda aj grafu $\vec{G}$), do ktorých smeruje v grafe $\vec{G}$ aspoň jedna hrana. Označme znakom $H(u_i)$ množinu tých hrán, ktoré v grafe $\vec{G}$ smerujú do uzla u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Pretože každá hrana orientovaného grafu smeruje práve do jednoho uzla grafu, je každá hrana grafu G hranou práve jednej množiny systému $\mathfrak{S} = \{H(u_1), H(u_2), \ldots, H(u_m)\}$. Nech $2n_i$ je počet hrán množiny $H(u_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Rozložme ľubovoľným spôsobom množinu $H(u_i)$ na n_i tried R_{i_1}, $R_{i_2}, \ldots, R_{i n_i}$ po dvoch prvkoch a nech W_{i_x} $(x = 1, 2, \ldots, n_i)$ je uhol grafu G, ktorého vrcholom je uzol u_i a jeho ramenami hrany triedy R_{i_x}.

Nech $\mathfrak{W}_i = \{W_{i_1}, W_{i_2}, \ldots, W_{i n_i}\}$ je systém uhlov takto konštruovaných, ktorých vrcholom je uzol u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Súčet systémov $\mathfrak{W} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{W}_i$ je systém požadovaných vlastností, lebo každá hrana grafu G je hranou práve jednej množiny $H(u_i) \in \mathfrak{S}$ a je prvkom práve jednej z tried R_{i_x} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ x = 1, 2, \ldots, n_i)$ a teda aj ramenom práve jednoho uhla $\in \mathfrak{W}$.

II. Že systém $\mathfrak{W}$ môže existovať len v grafe s párnym počtom hrán, je zrejmé z toho, že každý uhol má práve dve ramená.

2. Systémy uhlov v pravidelných grafoch tretieho stupňa

Priamym dôsledkom vety 4 je táto veta o pravidelných grafoch tretieho stupňa:

Veta 5. *V ľubovoľnom súvislom pravidelnom grafe tretieho stupňa s párnym počtom $2p > 0$ hrán existuje taký systém uhlov, že každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla systému.*

Poznámka 2. V dôkaze vety 4. popísali sme postup ako najsť v grafe taký systém uhlov $\mathfrak{W}$, že každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla systému, keď je daná orientácia hrán grafu, pri ktorej do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán. V popísanom postupe je ponechána ľubovôľa v tom, ako rozložíme množinu $H(u_i)$ obsahujúcu $2n_i$ hrán na n_i tried po dvoch prvkoch, keď $n_i > 1$. Pretože v pravidelných grafoch tretieho stupňa nemôže byť $n_i > 1$, odpadá tu spomenutá ľubovôľa a každej orientácii hrán grafu, pri ktorej do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán, odpovedá (pri zachovaní popísaného postupu) práve jeden systém uhlov $\mathfrak{W}$.

Odvoďme si teraz ďalšie vety o pravidelných grafoch tretieho stupňa.

Veta 6. *Ak súvislý pravidelný graf tretieho stupňa G s párnym počtom hrán má lineárny faktor, potom existujú také dva systémy uhlov $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ grafu, že platí:*

1. *Každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla $\in \mathfrak{W}_1$ a každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla $\in \mathfrak{W}_2$.*
2. *Systémy $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ sú disjunktné.*

Dôkaz. Nech G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa s párnym počtom hrán, L lineárny faktor a F kvadratický faktor tohoto grafu. Nech ďalej $\vec{G}_1$ je graf G orientovaný tak, že do každého uzla smeruje párny počet hrán, $\mathfrak{W}_1$ systém uhlov, ktorý odpovedá orientovanému grafu $\vec{G}_1$. Nech $\vec{G}_2$ je opäť orientovaný graf G, pričom nech hrany lineárneho faktora L majú rovnakú orientáciu v grafoch $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ a hrany kvadratického faktora F nech v grafe $\vec{G}_2$ majú opačnú orientáciu než v $\vec{G}_1$. Pretože každý uzol grafu je incidentný práve s dvoma hranami kvadratického faktora, bude sa orientácia hrán incidentných a ľubovoľným uzlom u grafu $\vec{G}_1$ líšiť práve u dvoch hrán voči orientácii týchto hrán v grafe $\vec{G}_2$. To však znamená, že aj v grafe $\vec{G}_2$ bude do každého uzla smerovať párny počet hrán. Podľa dôkazu vety 4. existuje potom systém uhlov $\mathfrak{W}_2$ (odpovedajúci jednoznačne orientovanému grafu $\vec{G}_2$) taký, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla z $\mathfrak{W}_2$.

Treba ešte dokázať, že systémy $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ sú disjunktné. Nech h_1 je ľubovoľná hrana grafu G a nech h_2 je taká hrana grafu G, ktorá s hranou h_1 tvorí ramená uhla z $\mathfrak{W}_1$, vrcholom tohoto uhla nech je uzol u. Označme znakom v druhý uzol, s ktorým je hrana h_1 incidentná ($u \neq v$) a znakom h_3 hranu rôznu od h_0 a rôznu od h_2, ktorá je incidentná s uzlom u.

A. Ak hrana h_1 je hranou lineárneho faktora, potom bude mať tú istú orientáciu v $\vec{G}_2$, akú mala v $\vec{G}_1$, ale hrany h_2, h_3 budú mať inú orientáciu v $\vec{G}_2$

než v $\vec{G}_1$. Teda uhol z $\mathfrak{W}_2$, ktorého ramenom je hrana h_1, bude mať tieto prvky u, h_1, h_3.

B. Ak hrana h_1 je hranou kvadratického faktora, potom h_1 bude mať inú orientáciu v $\vec{G}_2$ než v $\vec{G}_1$. To znamená, že vrcholom uhla z $\mathfrak{W}_2$, ktorého ramenom je h_1, nebude uzol u, ale uzol v.

V oboch prípadoch uhol z $\mathfrak{W}_1$ a uhol z $\mathfrak{W}_2$, ktorých ramenom je hrana h_1, sú dva rôzne uhly. Hrana h_1 bola však ľubovoľná hrana grafu G. Teda systémy $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ nemôžu mať spoločného prvku. Tým je veta 6. dokázaná.

Veta 7. *Nech súvislý pravidelný graf tretieho stupňa G s párnym počtom hrán dá sa rozložiť na tri lineárne faktory L_1, L_2, L_3, potom existujú systémy uhlov $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{W}_3$, $\mathfrak{W}_4$, ktoré majú tieto vlastnosti:*

1. *Pre každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí: každá hrana grafu je ramenom práve jednoho uhla systému $\mathfrak{W}_i$.*

2. *Ak $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, potom platí: $\mathfrak{W}_i, \mathfrak{W}_j = \emptyset$.*

Dôkaz. Označme znakom $\vec{G}_4$ orientovaný graf G, ktorého hrany sú orientované tak, že do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán. Nech $\mathfrak{W}_4$ je systém uhlov, ktorý odpovedá grafu $\vec{G}_4$. Označme ďalej znakom $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ orientované grafy, ktoré z grafu $\vec{G}_4$ vzniknú zmenou orientácie hrán takto: orientácia hrán v grafoch $\vec{G}_4$ a $\vec{G}_i$ je rovnaká u hrán lineárneho faktora L_i, ostatné hrany nech majú inú (opačnú) orientáciu v $\vec{G}_i$ než v $\vec{G}_4$ ($i = 1, 2, 3$).

Z dôkazu vety 6. je zrejmé, že grafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ budú mať opäť tú vlastnosť, že do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán a že teda existujú týmto grafom odpovedajúce systémy uhlov $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{W}_3$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla z $\mathfrak{W}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Vieme už (z dôkazu vety 6.), že platí $\mathfrak{W}_i\mathfrak{W}_4 = \emptyset$ pre všetky $i = 1, 2, 3$. Treba ešte dokázať, že platí $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2 = \emptyset$; $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3 = \emptyset$; $\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3 = \emptyset$; platnosť týchto tvrdení je však zrejmá z toho, že graf $\vec{G}_i$ dostaneme z grafu $\vec{G}_j$, ak zmeníme orientáciu u hrán kvadratického faktora, ktorý pozostáva z hrán aj lineárneho faktora L_i aj lineárneho faktora L_j ($i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$). Preto $\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_j = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, čo bolo treba dokázať.

3. ϑ-obrazy grafov tretieho stupňa

Nech $G = U + H$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa. Označme znakom $\mathfrak{W}$ systém všetkých uhlov grafu G. Nech počet uzlov grafu G je $2n$ (je známe, že počet uzlov nepárneho stupňa ľubovoľného grafu je párny), $3n$ je potom počet jeho hrán. Počet rôznych uhlov v grafe G je $6n$, lebo každý uzol grafu je vrcholom troch rôznych uhlov. Nech teda $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{3n}\}$;

$\mathfrak{W} = \{W_1, W_2, \ldots, W_{6n}\}$. Skonštruujme graf $G^* = U^* + H^*$ podľa grafu G takto:

1. $U^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{3n}^*\}$, 2. $H^* = \{h_1^*, h_2^*, \ldots, h_{6n}^*\}$, 3. Hrana h_i^* je incidentná s uzlom u_j^* práve vtedy, keď hrana h_j je ramenom uhla W_i.

Pretože každý uhol v G má dve ramená, bude skutočne každá hrana h_i^* incidentná práve s dvoma uzlami z U^*; teda množina $G^* = U^* + H^*$ pri definovanej incidencii je grafom. Ukážme ešte, že ak G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, potom G^* je súvislý pravidelný graf štvrtého stupňa. Ukážme najprv, že každá hrana z G je ramenom štyroch rôznych uhlov z G. Nech totiž h_0 je ľubovoľná hrana z G, u, u' uzly, s ktorými je táto hrana incidentná v grafe G. Označme znakom h_1, h_2, h_0 hrany, s ktorými je incidentný uzol u a znakom h_1', h_2', h_0 hrany, ktorými je incidentný uzol u'. Hrana h_0 je ramenom týchto uhlov $\{u, h_0, h_1\}$, $\{u, h_0, h_2\}$, $\{u', h_0, h_1'\}$, $\{u', h_0, h_2'\}$. Pretože za prvé: $h_1 \neq h_2$; $h_1' \neq h_2'$ (ináč by uzly u, u' neboli tretieho stupňa) a za druhé: $u \neq u'$ ide nutne o štyri rôzne uhly. Že h_0 nemôže byť ramenom ďalších uhlov grafu je zrejmé. Preto každý uzol $u^* \in U^*$ je nutne uzlom štvrtého stupňa v G^*, čiže G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa.

Dokážme ešte, že G^* je súvislý graf, keď G je súvislý graf. Stačí dokázať toto: keď G je súvislý graf a u_i^*, u_j^* sú ľubovoľné dva uzly z G^*, potom u_i^* súvisí s u_j^*.

Nech hrana h_i z G je incidentná s uzlami u, u', hrana h_j z G incidentná s uzlami v, v' v G. Ak by hrany h_i, h_j boli incidentné s tým istým uzlom u_0 v grafe G, znamenalo by to, že existuje v grafe G uhol $W_k = \{u_0, h_i, h_j\}$ a teda v grafe G^* by hrana h_k^* bola incidentná s uzlami u_i^*, u_j^*, čiže uzly u_i^*, u_j^* by súviseli v grafe G^*. Predpokladajme preto, že u, u', v, v' sú štyri rôzne uzly grafu G. Pretože G je podľa predpokladu súvislý graf, existuje v grafe G cesta u_1, $h_{1,2}$, u_2, $\ldots$ $h_{n-1,n}$, u_n (kde $u_1 = u$, $u_n = v$) spojujúca uzly u, v. Je buď $h_{1,2} = h_i$, alebo je $h_{1,2}$ taká hrana, ktorá s hranou h_i a uzlom u tvorí uhol grafu G. Je ďalej buď $h_{n-1,n} = h_j$, alebo hrana $h_{n-1,n}$ s hranou h_j a uzlom v tvorí uhol grafu G. Okrem toho, ak $n > 2$, platí pre všetky $x = 1, 2, \ldots, n-2$ toto: hrana $h_{x,x+1}$ s hranou $h_{x+1,x+2}$ a uzlom u_{x+1} tvorí uhol grafu G.

Označme znakom $u_{\alpha_x}^*$ ten uzol z G^*, ktorý odpovedá hrane $h_{x,x+1}$ z G. Z uvedeného vyplýva, že uzol $u_{\alpha_x}^*$ súvisí s uzlom $u_{\alpha_{x+1}}^*$ ($x = 1, 2, \ldots, n-2$), pretože existuje hrana v G^*, ktorá je incidentná s oboma uzlami. Pretože ďalej uzol u_i^* buď je totožný, alebo súvisí s uzlom $u_{\alpha_1}^*$ a práve tak uzol u_j^* buď je totožný, alebo súvisí s uzlom $u_{\alpha_{n-1}}^*$, platí nutne u_i^* súvisí s u_j^*. Teda ľubovoľné dva uzly grafu G^* súvisia. Preto G^* je súvislý graf, ak G je súvislý graf.

O pravidelnom grafe štvrtého stupňa G^* budeme hovoriť, že je ϑ-obrazom pravidelného grafu tretieho stupňa G (písané $G^* = \vartheta(G)$) ak:

1. existuje prosté zobrazenie α množiny hrán H grafu G na množinu uzlov U^* grafu G^*,

2. existuje prosté zobrazenie β systému uhlov $\mathfrak{W}$ grafu G na množinu hrán H^* grafu G^*,

3. pre ľubovoľnú dvojicu pozostávajúcu z uzlu u^* a hrany h^* grafu G^*; kde $u^* = \alpha(h_i)$; $h^* = \beta(W_j)$; $h_i \in H$; $W_j \in \mathfrak{W}$ platí: Uzol u^* je incidentný v grafe G^* s hranou h^* práve vtedy, keď hrana h_i je ramenom uhlu W_j v grafe G.

Poznámka 3. Špeciálnym prípadom pravidelných grafov tretieho stupňa sú grafy, u ktorých uzlami sú vrcholy a hranami sú hrany takého mnohostenu, v ktorom každý vrchol je incidentný s troma hranami. Nech napr. G_1 je graf pravidelného štvorstenu, potom $\vartheta(G_1)$ je napr. graf pravidelného osmistenu; alebo nech G_2 je graf krychle, potom $\vartheta(G_2)$ je graf známého štrnásťstenu, u ktorého 6 stien sú štvoruholníky a 8 stien sú trojuholníky. Dá sa dokázať, že platí toto: ak pravidelný graf tretieho stupňa G dá sa realizovať na orientovanej ploche rodu g, potom pravidelný graf štvrtého stupňa $\vartheta(G)$ dá sa tiež realizovať na tejto ploche. Táto problematika vymyká sa však z rámca našho príspevku.

Poznámka 4. Existujú tiež grafy štvrtého stupňa, ktoré nie sú ϑ-obrazom žiadneho pravidelného grafu tretieho stupňa.

O pravidelných grafoch štvrtého stupňa, ktoré sú ϑ-obrazom pravidelného grafu tretieho stupňa, platia tieto vety:

Veta 8. *Každý pravidelný graf štvrtého stupňa, ktorý má párny počet uzlov a je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa, má lineárny faktor.*

Dôkaz. Množinou hrán lineárneho faktora grafu $G^* = \vartheta(G)$ je množina obrazov systému $\mathfrak{W}_1$ uhlov grafu G (v zobrazení β), ktorého existencia vyplýva z vety 5.

Poznámka 5. Existujú tiež pravidelné grafy štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktoré nemajú lineárneho faktora.

Veta 9. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktorý je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa G a nech G má lineárny faktor, potom graf G^* má kvadratický faktor, ktorý se dá rozložiť na dva lineárne faktory.*

Dôkaz. Podľa vety 6. existujú v G systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla z $\mathfrak{W}_1$ a práve jednoho uhla z $\mathfrak{W}_2$, pričom $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2 = \emptyset$. To znamená, že ľubovoľný uzol u^* u G^* je incidentný práve s jednou hranou množiny $H_1^* = \beta(\mathfrak{W}_1)$ a práve s jednou hranou množiny $H_2^* = \beta(\mathfrak{W}_2)$ a platí $H_1^* . H_2^* = \emptyset$. Teda množina H_1^* je množinou hrán istého lineárneho faktoru L_1^* a taktiež množina H_2^* množinou hrán istého lineárneho faktoru L_2^*, pričom L_1^* a L_2^* nemajú spoločnej hrany.

Ich kompozícia je kvadratický faktor, ktorý sa dá rozložiť na dva lineárne faktory.

Veta 10. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stpňa s párnym počtom uzlov, ktorý je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa G a nech G dá sa rozložiť na tri lineárne faktory, potom G^* dá se rozložiť na štyri lineárne faktory.*

Poznámka 6. Ako je známe, existuje pravidelný graf tretieho stupňa s párnym počtom hrán, ktorý sa nedá rozložiť na tri lineárne faktory.

Dôkaz vety 10.: Podľa vety 7. existujú v G systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla systému $\mathfrak{W}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a pre $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí: $\mathfrak{W}_i\mathfrak{W}_j = \emptyset$. Označme znakom H_i^* množinu obrazov prvkov systému $\mathfrak{W}_i$ v zobrazení β. Ľubovoľný uzol u^* grafu G^* je incidentný práve s jednou hranou množiny H_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$). Teda H_i^* je množinou hrán istého lineárneho faktora L_i^* grafu G^*. Pretože $H_i^*H_j^* = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ možno graf G^* rozložiť na lineárne faktory $L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*$, čo bolo treba dokázať.

Ukážeme, že platí aj táto veta:

Veta 11. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa, ktorý sa dá rozložiť na štyri lineárne faktory $L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*$ a nech G^* je ϑ-obrazom istého pravidelného grafu tretieho stupňa G, potom G dá sa rozložiť na tri lineárne faktory.*

Dôkaz. Nech $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ je množina uzlov grafu G. Označme znakom $H(u_i)$ množinu tých troch hrán grafu G, ktoré sú incidentné s uzlom u_i ($i = 1, 2, \ldots, p$). V zobrazení α obrazom množiny $H(u_i)$ je istá trojica uzlov grafu G^*, označme ju znakom T_i^*. Pretože ľubovoľná dvojica hrán množiny $U(u_i)$ spolu s uzlom u_i tvorí uhol grafu G existuje nevyhnutne taká hrana v G^*, ktorá je incidentná s ľubovoľnou dvojicou uzlov z trojice T_i^*. Trojica hrán grafu G^*, ktorá je v zobrazení β obrazom trojice uhlov s vrcholem v uzle u_i v grafe G, spolu s uzlami trojice T_i^* tvorí istú kružnicu K_i^* grafu G^*. Uzol u_i bol ľubovoľný uzol grafu G. Ak teda najdeme takéto kružnice pre všetky uzly u_i ($i = 1, 2, \ldots, p$), dostaneme tak systém kružníc $C^* = \{K_i^*, K_2^*, \ldots, \ldots, K_p^*\}$, ktorý má tieto vlastnosti:

1. Každá hrana grafu G^* je hranou práve jednej kružnice z C^*, pretože každý uhol má práve jeden vrchol a je podľa predpokladu $h^* \in K_1^*$ práve vtedy, keď vrcholem uhla, ktorý je vzorom hrany h^* v zobrazení β, je uzol u_i.

2. Každý uzol u^* grafu G^* je uzlom práve dvoch kružníc systému C^*, lebo vzor uzla u^* v zobrazení α t. j. hrana $h = \alpha^{-1}(u^*)$, je ramenom jednak uhlov s vrcholom v jednom, jednak uhlov s vrcholom v druhom uzle, s ktorým je hrana h incidentná.

Teda zo štyroch hrán, ktoré sú incidentné s ľubovoľným uzlom u^* grafu G^* dve patria do jednej z kružníc $\in C^*$ a dve do inej kružnice $\in C^*$. Pri danom rozklade grafu G^* na štyri lineárne faktory (ktorý podľa predpokladu existuje), patrí každá z týchto štyroch hrán k inému lineárnemu faktoru L_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$). Teda o hranách incidentných s uzlom u^* platí:

buď A. hrany z lineárných faktorov L_1^* a L_4^* (resp. L_2^* a L_3^*) sú v tej istej kružnici systému C^*,
alebo: B. hrany z lineárnych faktorov L_2^* a L_4^* (resp. L_1^* a L_3^*) sú v tej istej kružnici systému C^*,
alebo: C. hrany z lineárnych faktorov L_3^* a L_4^* (resp. L_1^* a L_2^*) sú v tej istej kružnici systému C^*.

Ak platí tvrdenie A. (resp. B., resp. C.) zaraďme uzol u^* do triedy uzlov U_1^* (resp. U_2^*, resp. U_3^*). Keď prevedieme uvedeným spôsobom zatriedenie všetkých uzlov grafu G^* do tried dostaneme tak istý rozklad $\mathfrak{R}^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ množiny uzlov grafu G^*.

O rozklade $\mathfrak{R}^*$ platí: nech T_i^* je ľubovoľná trojica uzlov grafu G^*, ktorá je obrazom trojice hrán incidentných s uzlom u_i grafu G v zobrazení α, potom každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy uzlov U_x^*.

Dokážeme správnosť uvedeného tvrdenia.

Každá z hrán kružnice K_i^* musí patriť k inému lineárnemu faktoru, pretože ináč by uzol kružnice bol incidentný s dvoma hranami toho istého lineárneho faktora, čo nie je možné. Z toho však vyplýva, vzhľadom na to akým spôsobom sme zatrieďovali uzly grafu G^* do tried U_x^*, že každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy rozkladu $\mathfrak{R}^*$.

Každý uzol grafu G^* má práve jeden vzor v zobrazení α, jeho vzorom je istá hrana grafu G. Vzormi uzlov triedy U_x^* sú hrany istej triedy hrán H_x grafu G ($x = 1, 2, 3$).

Z troch hrán, s ktorými je incidentný ľubovoľný uzol z G jedna je z H_1, jedna z H_2, jedna z H_3. Dokázali jsme už totiž, že každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy rozkladu $\mathfrak{R}^*$. Z toho vyplýva, že každá hrana trojice hrán $H(u_i)$ (kde u_i je ľubovoľný uzol grafu G) incidentných s uzlom u_i patrí do inej z množín H_x ($x = 1, 2, 3$).

Graf G možno preto rozložiť na tri lineárne faktory takto: lineárny faktor L_x bude pozostávať z hrán a len z hrán množiny H_x ($x = 1, 2, 3$). Pretože $H_xH_y = \emptyset$ pre $x \neq y$, je tým skutočne daný rozklad grafu G na tri lineárne faktory. To bolo treba dokázať.

4. O rozkladoch pravidelných grafov štvrtého stupňa $\vartheta(G)$ na hamiltonovské čiary

Odvoďme si niektoré vety, ktoré poukazujú na úzky vzťah medzi hamiltonovskými čiarami v pravidelných grafoch tretieho stupňa a rozkladmi ϑ-obrazov týchto grafov na dve hamiltonovské čiary.

Veta 12. *Nech G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa. Ak v grafe G existuje hamiltonovská čiara, potom graf $\vartheta(G)$ možno rozložiť na dve hamiltonovské čiary.*

Veta 13. *Ak graf $\vartheta(G)$ dá sa rozložiť na dve hamiltonovské čiary, potom v G existuje hamiltonovská čiara.*

Veta 14. *Nech λ je počet rôznych hamiltonovských čiar v súvislom pravidelnom grafe tretieho stupňa G a nech $2n$ je počet uzlov tohoto grafu, potom o počte λ^* rôznych rozkladov grafu $G^* = \vartheta(G)$ na dve hamiltonovské čiary platí $\lambda^* = \lambda \,.\, 2^{n-1}$.*

Dôkaz vety 12: Nech $G = U + H$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ množina jeho uzlov a nech existuje v G hamiltonovská čiara K. Hamiltonovská čiara je faktorom druhého stupňa, preto hrany z G nepatriace do K sú hranami lineárneho faktora (označme ho L) grafu G.

Nech $G^* = \vartheta(G)$; $G^* = U^* + H^*$ a nech U_L^* je množina tých uzlov grafu G^*, ktoré v zobrazení α sú obrazmi hrán lineárneho faktora L, U_K^* množina tých uzlov grafu G^*, ktoré v zobrazení α sú obrazmi hrán hamiltonovskej čiary K. Zachovajme označenie $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \ldots, K_r^*\}$ pre systém kružníc grafu G^*taký, že kružnica K_i^* odpovedá uzlu $u^j \in G$ takto: uzly kružnice K_i^* sú obrazy tých hrán grafu G v zobrazení α, ktoré sú incidentné s uzlom u_i a hrany kružnice K_i sú obrazmi v zobrazení β tých uhlov grafu G, ktorých vrcholom je uzol u_i. Vieme, že každý uzol grafu G^* je uzlom práve dvoch kružníc z C^*.

Nech C_L^* je systém tých kružníc z C^*, ktoré obsahujú uzol z U_L^*; platí: $C_L^* = C^*$. Je totiž C_L^* systém všetkých tých kružníc, ktoré odpovedajú množine U_L všetkých uzlov z grafu G, ktoré sú incidentné s hranami lineárneho faktora L.

Rozdelme hrany množiny H^* do dvoch tried H_1^*, H_2^* takto: nech u_i^* je ľubovoľný uzol množiny U_L^* a nech $K_{p_i}^*$, $K_{q_i}^*$ sú tie kružnice systému C^*, ktoré obsahujú uzol u_i^*,

1. do triedy H_1^* zaraďme dve hrany kružnice $K_{p_i}^*$, ktoré sú incidentné s uzlom u_i^*, zbývajúcu (tretiu) hranu kružnice $K_{p_i}^*$ zaraďme do triedy H_2^*,

2. dve hrany kružnice $K_{q_i}^*$ a to tie, ktoré sú incidentné s u_i^* zaraďme do H_2^*, ostávajúcu (tretiu) hranu zaraďme do triedy H_1^*.

Ak takto prevedieme zatriedenie hrán všetkých dvojíc kružníc obsahujúcich uzol z $\in U_L^*$, je každá hrana grafu hranou práve jednej z tried H_1^*, H_2^*, pretože za prvé: každá hrana je hranou práve jednej kružnice z C^* (pozri dôkaz predchádzajúcej vety) a za druhé: každá kružnica z C^* obsahuje práve jeden uzol z U_L^*. Všimnime si ešte, že dve hrany ľubovoľnej kružnice $\in C^*$, s ktorými je incidentný uzol z U_L^* patria do tej istej triedy a dve kružnice, s ktorými je incidentný uzol z U_K^*, patria k rôznym triedam.

Dokážme teraz, že platí: Čiastočný graf G_1^* (resp. G_2^*) grafu G^* obsahujúci všetky hrany a len hrany triedy H_1^* (resp. H_2^*) je hamiltonovskou čiarou grafu G^*.

A. Tvrdím: G_1^* (resp. G_2^*) je faktorom druhého stupňa v G^*. Nech u_i^* je ľubovoľný uzol grafu G^*. Ak je $u_i^* \in U_L^*$, potom u_i^* je zrejme incidentný práve s dvoma hranami z H_1^* a s dvoma hranami z H_2^*. Ak je $u_i^* \in U_K^*$, potom vzhľadom na to, že každá z dvoch hrán incidentných s uzlom u_i^* v jednej kružnici (a tak isto aj v druhej kružnici) systému C^* obsahujúcej uzol u_i^* patrí do inej triedy, platí: uzol u_i^* je incidentný s dvoma hranami z H_1^* a s dvoma hranami z H_2^*. Tým je dôkaz tvrdenia A. vykonaný.

B. Tvrdím: G_1^* (resp. G_2^*) je súvislý graf. Dôkaz tvrdenia: Ak h_1, h_2 sú ľubovoľné také dve hrany hamiltonovskej čiary K, ktoré sú incidentné s tým istým uzlom u_i grafu G, potom uzly $\alpha(h_1)$, $\alpha(h_2)$ súvisia v grafe G_1^*. Nech totiž h_0 je tá hrana lineárneho faktora L, ktorá je incidentná s uzlom u_i, potom obrazy $\alpha(h_1)$, $\alpha(h_2)$, $\alpha(h_0)$ sú uzlami kružnice $K_i^* \in C^*$. Teda do triedy H_1^* patrí buď hrana incidentná v G^* s uzlami $\alpha(h_1)$, $\alpha(h_2)$ (potom uzly $\alpha(h_1)$, $\alpha(h_2)$ zrejme súvisia v G_1^*), alebo do triedy H_1^* patrí aj hrana incidentná v G^* s uzlami $\alpha(h_1)$, $\alpha(h_0)$ aj hrana incidentná s uzlami $\alpha(h_2)$, $\alpha(h_0)$. Čiže uzly $\alpha(h_1)$, $\alpha(h_2)$ súvisia v grafe G_1^*. Obdobná úvaha vedie k rovnakému uzáveru pre G_2^*.

Teda v zobrazení α obrazy dvoch „súsedných" hrán hamiltonovskej čiary K súvisia v G_1^* (resp. v G_2^*). To však znamená, že v G_1^* (resp. v G_2^*) súvisia všetky obrazy (v zobrazení α) hrán z K. Ináč povedané: ľubovoľné dva uzly množiny U_K^* súvisia v grafe G_1^* (resp. v grafe G_2^*). Pretože hrana z H_1^* (resp. z H_2^*), ktorá je incidentná v grafe G_1^* (resp. G_2^*) s istým uzlom z U_L^* je incidentná aj s jedným uzlom z U_K^*, súvisí v grafe G_1^* (resp. v grafe G_2^*) každý uzol u U_L^* so všetkými uzlami z U_K^*. Preto graf G_1^* (resp. graf G_2^*) je súvislý graf. Tým je dôkaz vety 12. vykonaný.

D ô k a z v e t y 13.: I. Nech $G^* = \vartheta(G)$; $G = U + H$; $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ a nech G_1^*, G_2^* sú dve hamiltonovské čiary grafu G^*, ktoré nemajú spoločnej hrany. Hrany hamiltonovskej čiary G_1^* (resp. G_2^*) tvoria triedu hrán H_1^* (resp. H_2^*). Nech $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \ldots, K_p^*\}$ je systém kružníc grafu G^* taký, že uzly kružnice $K_i^* \in C^*$ sú obrazmi troch hrán incidentných s uzlom $u_i \in U$ v zobrazení α a hrany kružnice K_i^* sú obrazmi troch uhlov grafu G s vrcholom v uzle u_i v zobrazení β. Ak by systém C^* obsahoval iba dve kružnice, t. j. ak by graf G pozostával iba z dvoch uzlov u_1, u_2 a z troch hrán s tymito uzlami incidentných, potom by G zrejme obsahoval hamiltonovskú čiaru a nebolo by potrebné nič dokazovať. Predpokladajme preto, že G má najmenej štyri uzly a teda najmenej šesť hrán t. j., že C^* obsahuje najmenej štyri kružnice a najmenej šesť uzlov. Platí: ľubovoľná kružnica K_i^* systému C^* obsahuje hrany z oboch tried H_1^*, H_2^*. Ak by totiž kružnica K_i^* obsahovala napr. len hrany z triedy H_1^*, potom K_i^* by bola kružnicou aj v G_1^* a uzly tejto kružnice by nesúviseli s ostatnými uzlami grafu G_1^*, čo odporuje predpokladu, že G_1^* je hamiltonovská čiara.

Teda každá kružnica z C^* buď obsahuje dve hrany z H_1^* a jednu z H_2^*, alebo obsahuje jednu hranu z H_1^* a dve z H_2^*. Tak či tak existuje práve jeden uzol (budeme mu hovoriť význačný uzol) kružnice K_i^* taký, že je incidentný s dvoma hranami kružnice, ktoré patria do tej istej triedy H_j^* ($j = 1, 2$). Každý uzol je uzlom práve dvoch kružníc systému C^*, je však zrejmé, že ak istý uzol je význačným (resp. nie je význačným) uzlom jednej kružnice, je význačným (resp. nie je význačným) uzlom aj druhej kružnice.

Označme znakom V^* množinu všetkých význačných uzlov grafu G^*. Vzory význačných uzlov v zobrazení α tvoria istú množinu hrán H_V grafu G, ktorá má túto vlastnosť: každý uzol grafu G je incidentný práve s jednou hranou z H_V, pretože obrazy hrán incidentných s uzlom grafu G v zobrazení α sú uzly kružnice z C^* a každá kružnica z C^* — ako sme práve dokázali — má práve jeden význačný uzol. Teda H_V je množinou hrán istého lineárneho faktora L grafu G. Hrany grafu G nepatriace do L sú hranami istého kvadratického faktora K grafu G. Dokážeme, že K je hamiltonovská čiara grafu G. Prv však než prikročíme k dôkazu tohoto tvrdenia, dokážeme ešte toto:

II. Nech $\overline{G}^*$ je čiastočný graf grafu G^*, ktorý pozostáva z tých hrán grafu G^*, ktoré sú incidentné s dvoma uzlami nevýznačnými, potom $\overline{G}^*$ je kružnica, ktorá obsahuje všetky nevýznačné uzly grafu G^*.

Že všetky uzly v $\overline{G}^*$ sú druhého stupňa, je zrejmé, lebo ak istá hrana je incidentná s dvoma nevýznačnými uzlami, potom každý z týchto uzlov je incidentný ešte práve s jednou takouto hranou.

Nech K_1^* je kružnica z C^* a nech v_1^* je jej význačný uzol, u_1^*, u_2^* jej uzly nevýznačné. Obiehajme po hranách hamiltonovskej čiary G_1^* a po hranách hamiltonovskej čiary G_2^* cez ich jednotlivé uzly tak, že v oboch prípadoch vyjdeme z uzla u_1^* a uzol u_2^* bude najbližší nevýznačný uzol, ktorý dostihneme. Teda u jednej hamiltonovskej čiary bude náš postup popisovať istá postupnosť uzlov $u_1^*, u_2^*, \ldots$, u druhej postupnosť uzlov $u_1^*, v_1^*, u_2^*, \ldots$. Pri ďalšom postupe z uzla u_2^* v jednej z hamiltonovských čiar prejdeme hneď do ďalšieho nevýznačného uzla $u_3^* \neq u_1^*$, u druhej najbližší uzol bude opäť istý význačný uzol (v_2^*) a potom až nasleduje uzol u_3^*. Uvážme totiž, že v každej kružnici z C^* jedna hrana patrí do jednej z tried H_1^*, H_2^*, zbývajúce obe do druhej z týchto tried a uzol kružnice incidentný s hranami tejto kružnice, ktoré patria do tej istej triedy, je význačný uzol.

Všimnime si, že poradie uzlov nevýznačných (ak neprihliadame k „umiesteniu" význačných uzlov) v akom cez tieto prechádzame obiehajúc hamiltonovské čiary G_1^*, G_2^*, musí byť v oboch hamiltonovských čiarach rovnaké, nech ako dlho pokračujeme v postupe. Avšak v takom istom poradí musíme prechádzať cez jednotlivé nevýznačné uzly, ak volíme tento postup: vyjdeme z uzla u_1^*, po hrane, ktorá je incidentná s u_2^*, ďalej z uzla u_2^* po hrane, ktorá je incidentná s u_2^* a je incidentná s ďalším nevýznačným uzlom (týmto uzlom je zrejme uzol u_3^*) bez ohľadu na to, do ktorej triedy táto hrana incidentná s dvoma nevýznačnými uzlami patrí. Obdobne z uzla u_3^* do nevýznačného uzla u_4^*

atď. Pretože pri obiehaní po hamiltonovskej čiare prejdeme po konečnom počte krokov cez všetky uzly grafu G^* (a teda aj cez všetky nevýznačné uzly tohoto grafu), musíme nutne pri obiehaní po hranách grafu $\overline{G}^*$ po konečnom počte krokov (a to v rovnakom poradí ako pri obiehaní hamiltonovských čiar) prejsť cez všetky nevýznačné uzly grafu G^*. Teda $\overline{G}^*$ je graf druhého stupňa a je grafom súvislým. $\overline{G}^*$ je kružnica a obsahuje všetky nevýznačné a len nevýznačné uzly grafu G^*. Tým je dôkaz tvrdenia II prevedený.

III. Dokážme napokon, že kvadratický faktor K (z prvej časti dôkazu) je hamiltonovskou čiarou grafu G. Stačí dokázať, že K je súvislý graf.

Nech postupnosť hrán $P^* = h_1^* h_2^*, \ldots, h_p^*, h_1^*, \ldots$ popisuje v akom poradí prechádzame cez hrany kružnice $\overline{G}^*$ pri obiehaní po nej v pevne zvolenom smere obiehania vychádzajúc z jej hrany h_1^*. Každá hrana postupnosti P^* je hranou práve jednej kružnice z C^*; označme znakom $K_{z_j}^*$ kružnicu z C^*, ktorej hranou je hrana h_j^* postupnosti P^* ($j = 1, 2, \ldots, p$). Ďalej označme znakom $u_{j,j+1}^*$ uzol kružnice $\overline{G}^*$, ktorý je incidentný s jej hranami h_j^*, h_{j+1}^* ($j = 1, 2, \ldots, p - 1$).

Platí zrejme: vzorom v zobrazení α uzla $u_{j,j+1}^*$ je istá hrana $h_{j,j+1} = \alpha^{-1}(u_{j,j+1}^*)$ ktorá je v grafe K incidentná s uzlami $u_{z_j}, u_{z_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \ldots, p - 1$). Pretože súvislosť medzi uzlami je vzťah tranzitívny, musia nutne súvisieť v K všetky uzly u_{z_j} ($j = 1, 2, \ldots, p$), ktoré odpovedajú kružniciam $K_{z_1}^*, K_{z_2}^*, \ldots, K_{z_p}^*$, z ktorých každá obsahuje po jednej hrane postupnosti P^* (kružnica $K_{z_j}^*$ obsahuje podľa predpokladu hranu h_j^*).

Nech $\overline{U} = \{u_{z_1}, u_{z_2}, \ldots, u_{z_p}\}$. Vieme, že každá kružnica z C^* obsahuje práve jednu hranu z $\overline{G}^*$ a teda podľa časti II. dôkazu aj práve jednu hranu postupnosti P^* a každá hrana postupnosti P^* je hranou práve jednej kružnice z C^*. Teda $\overline{U} = U$, čiže K je súvislý graf obsahujúci všetky uzly grafu G a každý uzol z K je uzlom druhého stupňa. Preto K je hamiltonovská čiara grafu G, čo bolo treba dokázať.

Dôkaz vety 14.: Ak je $\lambda = 0$, potom je aj $\lambda^* = 0$, lebo z $\lambda^* > 0$ vyplýva podľa vety 13. $\lambda > 0$. Nech $\lambda > 0$ a nech $K_1, K_2, \ldots, K_\lambda$ sú všetky rôzne hamiltonovské čiary v G, K_i ľubovoľná z nich. K tejto hamiltonovskej čiare K_i možno najsť rozklad množiny hrán grafu $G^* = \vartheta(G)$ na triedy hrán H_1^*, H_2^* taký, že H_1^* resp. H_2^* je množina všetkých hrán istej hamiltonovskej čiary G_1^* resp. G_2^* pričom tieto hamiltonovské čiary nemajú spoločnej hrany. Pri zatrieďovaní hrán spôsobom, ktorý sme popísali v dôkaze vety 12 pri dvojici kružníc $K_{p_i}^*, K_{q_i}^*$ (ktorých spoločným uzlom je uzol $u_i^* \in U_L^*$) do tried H_1^*, H_2^*, mali sme možnosť si vybrať, ktorú z kružníc označíme $K_{p_i}^*$ a ktorú $K_{q_i}^*$. To má pravda vplyv na zatrieďovanie. Pretože počet uzlov grafu G je podľa predpokladu $2n$, má G práve $3n$ hrán a počet hrán lineárneho faktora L je n. Teda U_L^* má n uzlov a existuje n dvojíc kružníc, ktorých spoločným uzlom je uzol $\in U_L^*$. Zmena označenia najmenej v jednej a najviac v $n - 1$ dvojiciach kružnic spôsobí zmenu v rozklade na triedy H_1^*, H_2^* (zmena u všetkých dvojíc by spôsobila iba zmenu označenia tried, nie však zmenu rozkladu). Pre rozklad na dve hamiltonovské čiary grafu G^* podľa pevne zvolenej hamiltonovskej čiary K_i grafu G máme teda vcelku 2^{n-1} rôznych možností. Pretože pri dvoch rôznych hamiltonovských čiarach K_i, K_j v G príslušné lineárne faktory (ktorých hranami sú hrany nepatriace do K_i resp. do K_j) sa líšia aspoň jednou hranou, budú rozdielne aj odpovedajúce množiny význačných uzlov v grafe G^* a budú rozdielne aj týmto odpovedajúce rozklady grafu G^* na dve hamiltonovské čiary. Teda je $\lambda^* \geqq \lambda \,.\, 2^{n-1}$. Ak by bolo $\lambda^* > \lambda \,.\, 2^{n-1}$ musela by podľa vety 13. existovať množina význačných uzlov, ktorá nie je obrazom množiny hrán grafu G nepatriacich do hamiltonovskej čiary K_i ($i = 1, 2, \ldots, \lambda$) v zobrazení α. Podľa vety 13. by potom existovala ešte aspoň jedna ďalšia hamiltonovská čiara $K_{\lambda+1}$ v grafe G. To je spor s predpokladom. Je proto $\lambda^* = \lambda \,.\, 2^{n-1}$, čo bolo treba dokázať.

LITERATURA

Steinitz E.: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934.

König D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

Kotzig A.: O istých rozkladoch konečných grafov, Matem. fyz. časopis SAV, *V*, 1955, č. 3.

Резюме

ИЗ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава.

(Поступило в редакцию 21/II 1956 г.)

В статье доказываются следующие теоремы:

1. *Пусть G — произвольный связный граф с четным числом ребер; тогда существует система $\mathfrak{W}$ углов графа G такая, что каждое ребро из G принадлежит точно одному углу системы и система углов $\mathfrak{W}$ с этим свойством существует только тогда, если G содержит четное число ребер (тройка элементов графа G: $\{u, h_1, h_2\}$, где u — вершина, $h_1 \neq h_2$ — ребра, называется углом графа G, если оба ребра h_1, h_2 инцидентны с вершиной u).*

2. *Если связный регулярный граф третьей степени G с четным числом ребер содержит линейный множитель, то в G существуют две системы углов $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, являющиеся дизъюнктными, и каждое ребро графа является элементом точно одного угла системы $\mathfrak{W}_1$ (соотв. $\mathfrak{W}_2$). Если, кроме того, G можно разложить на три линейных множителя, то существуют*

в G четыре системы углов, не имеющие попарно общего угла, причем каждое ребро графа является элементом точно одного угла каждой из этих систем.

Граф G^*, множество вершин которого есть U^*, множество ребер H^*, называется ϑ-образом графа G — где G есть связный регулярный граф третьей степени, U есть множество его вершин, H есть множество его ребер — если:

I. *Существует простое отображение α множества H на множество U^*,*

II. *существует простое отображение β системы всех углов $\mathfrak{W}$ графа G на множество ребер H^*,*

III. *вершина $u^* = \alpha(h_i)$ инцидентна с ребром $h^* = \beta(W_i)$ в графе G^* тогда и только тогда, если ребро $h_i \in H$ является элементом угла $W_j \in \mathfrak{W}$.*

3. Для графов $G^* = \vartheta(G)$ с четным числом вершин, которые являются, очевидно, связными регулярными графами четвертой степени, доказывается следующее:

Каждый граф $\vartheta(G)$ содержит линейный множитель. Если в G существует линейный множитель, то в графе $\vartheta(G)$ имеется квадратичный множитель, разложимый на два линейных множителя. Если граф G можно разложить на три линейных множителя, то граф $\vartheta(G)$ можно разложить на четыре линейных множителя и наоборот.

4. Дальнейшие доказываемые теоремы обращают внимание на тесную связь между гамильтоновыми линиями в регулярных графах третьей степени и разложениями их ϑ-образов на две гамильтоновы линии. Доказывается следующее теоремы:

а) *Если в регулярном графе третьей степени G существует гамильтонова линия, то $\vartheta(G)$ можно разложить на две гамильтоновы линии и наоборот.*

б) *Пусть λ — число различных гамильтоновых линий в регулярном графе третьей степени G и $2n$ — число его углов, тогда о числе λ^* различных разложений графа $\vartheta(G)$ на две гамильтоновы линии можно утверждать:* $\lambda^* = \lambda \, . \, 2^{n-1}$.

Zusammenfassung

AUS DER THEORIE DER ENDLICHEN REGULÄREN GRAPHEN DRITTEN UND VIERTEN GRADES

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Eingelangt am 21. Feber 1956.)

In dem Beitrag werden folgende Sätze bewiesen:

1. *Es sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph, welcher eine gerade Anzahl von Kanten enthält, dann existiert ein Winkelsystem $\mathfrak{W}$ des Graphen G so, dass jede Kante aus G genau einem Winkel aus $\mathfrak{W}$ gehört und ein Winkelsystem*

$\mathfrak{W}$ *mit dieser Eigenschaft existiert nur dann, wenn G eine gerade Anzahl von Kanten enthält. (Die drei Elemente aus G:* $\{u, h_1, h_2\}$, *wo u ein Knotenpunkt und* $h_1 \neq h_2$ *die Kanten sind, werden Winkel des Graphen G genannt, wenn beide Kanten* h_1, h_2 *mit dem Knotenpunkt u inzident sind.)*

2. *Wenn ein zusammenhängender regulärer Graph dritten Grades G mit gerader Anzahl von Kanten einen linearen Faktor enthält, dann existieren solche zwei Winkelsysteme* $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ *die elementfremd sind und jede Kante des Graphen gerade einem Winkel aus* $\mathfrak{W}_1$ *(resp. aus* $\mathfrak{W}_2$*) gehört. Wenn ausserdem G in drei lineare Faktoren zerlegbar ist, dann gibt es in G vier solche Winkelsysteme, die paarweise elementfremd sind und jede Kante genau einem Winkel aus jedem System gehört.*

Den Graph G^*, *dessen Knotenpunktmenge* U^* *und die Kantenmenge* H^* *ist, nennen wir* ϑ*-Bild des Graphen* $G = U + H$ *(wobei G ein regulärer zusammenhängender Graph dritten Grades, U resp. H seine Knotenpunktmenge, resp. Kantenmenge ist), wenn gilt:*

I. *Es gibt eine einfache Abbildung* α *der Kantenmenge H des Graphen G auf die Knotenpunktmenge* U^* *des Graphen* G^*.

II. *Es gibt eine einfache Abbildung* β *des Systems* $\mathfrak{W}$ *aller Winkel des Graphen G auf die Kantenmenge* H^* *des Graphen* G^*.

III. *Ein Knotenpunkt* u^* *ist inzident mit der Kante* h^* *des Graphen* G^*, *wo* $u^* = \alpha(h_i)$; $h_i \in H_i$ $h^* = \beta(W_j)$; $W_j \in \mathfrak{W}$; *dann und nur dann, wenn die Kante* h_i *ein Element des Winkels* W_j *im Graphen G ist.*

3. Für die Graphen $G^* = \vartheta(G)$ mit gerader Knotenanzahl, welche selbstverständlich reguläre zusammenhängende Graphen vierten Grades sind, wird Folgendes bewiesen:

Jeder Graph $\vartheta(G)$ *hat einen linearen Faktor. Wenn es im Graphen G einen linearen Faktor gibt, dann hat* $G^* = \vartheta(G)$ *einen quadratischen Faktor, der sich in zwei lineare Faktoren zerlegen lässt. Wenn der Graph G sich in drei lineare Faktoren zerlegen lässt, dann lässt sich der Graph* G^* *in vier lineare Faktoren zerlegen und umgekehrt.*

4. Weitere Sätze weisen auf den engen Zusammenhang zwischen den Hamiltonschen Linien im Graphen dritten Grades und die Zerlegung der ϑ-Bilder dieser Graphen in zwei Hamiltonsche Linien. Man beweist diese Sätze:

a) *Wenn es im regulären Graphen dritten Grades G eine Hamiltonsche Linie gibt, dann lässt sich der Graph* $G^* = \vartheta(G)$ *in zwei Hamiltonsche Linien zerlegen und umgekehrt.*

b) *Es sei* λ *die Anzahl verschiedener Hamiltonscher Linien im regulären Graphen dritten Grades G und es sei 2n die Knotenanzahl des Graphen G, dann gilt von der Anzahl* λ^* *der verschiedenen Zerlegungen des Graphen* $G^* = \vartheta(G)$ *in zwei Hamiltonsche Linien:* $\lambda^* = \lambda \, . \, 2^{n-1}$.