

Recense

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 1, 105--116

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117230>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RECENZE

*Ivo Babuška, Karel Rektorys, František Vyčichlo: Matematická teorie rovinné pružnosti.* Vydalo nakladatelství ČSAV, Praha 1955, 528 stran, cena 39 Kčs.

Tato kniha má splnit několik úkolů zároveň. Podává výklad o jedné z disciplin mechaniky, rovinné elasticitě, a to takový, že jsou v ní rozřešeny otázky existence a unicity základních problémů rovinné pružnosti, jakož i nalezeny numerické metody pro výpočet řešení těchto problémů, a to za předpokladů, které dobře vyhovují technické praxi. To vše nemá být na úkor srozumitelnosti a upotřebitelnosti pro techniky. Je možno říci, že tento úkol se podařilo autorům zvládnout. Pokud zbývají ještě některé závažné otázky rovinné elasticity, které nejsou v této knize řešeny, pak je to tím, že methodou N. I. Muschelišviliho, o níž možno bez nadsázky říci, že je dnes nejpracovanějším a nejefektivnějším nástrojem rovinné elasticity, se zatím ani autorům ani komukoliv jinému tyto otázky nepodařilo uspokojivě rozřešit.

Knihu je možno hodnotit kladně ještě s jiného hlediska. Řešení problémů rovinné elasticity je prakticky totožné s řešením biharmonického problému v rovině. A tu s hlediska čistě matematického je kniha významným krokem vpřed v theorii parciálních diferenciálních rovnic.

Látka celé knihy je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole jsou definovány základní pojmy rovinné pružnosti, která je speciálním případem prostorové pružnosti, za předpokladu rovinné deformace nebo rovinné napjatosti; je to tensor deformace a tensor napětí. Jsou zde dále odvozeny základní diferenciální vztahy mezi těmito veličinami. Pozoruhodné na této kapitole je jednak to, že už zde jakož i nadále všechny definice, tvrzení a jejich důkazy jsou prováděny řečí matematickou, velmi jasně a promyšleně, jednak to, že jsou zde zavedeny základní pojmy elasticity přímo pro rovinný případ. To je cesta s hlediska matematického daleko schůdnější, než rigorosní zavedení těchto pojmů pro prostorovou pružnost. Přesné zavedení základních pojmů prostorové pružnosti je přibližně o tolik složitější ve srovnání s jejich zavedením v rovinné pružnosti, oč je těžší vyšetřování ploch ve srovnání s rovinnými křivkami.

Vůdčí idejí kapitoly druhé, jež je základním kamenem celého spisu, je vyjádření známé Airyho funkce napjatosti pomocí dvou analytických funkcí  $\chi(z)$  a  $\varphi(z)$  Gourstatorvým vzorcem  $\operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z))$  a vyjádření prvků napětí resp. deformace vzorcem N. I. Muschelišviliho resp. G. V. Kolosova. Podstatným přínosem autorů ve srovnání se známou knihou N. I. MUSCHELIŠVILIO „Некоторые основные задачи математической теории упругости“ je zobecnění prvního problému pružnosti (na hranici tělesa je dáno zatížení) a druhého problému pružnosti (na hranici tělesa je dáno posunutí) co do okrajových podmínek a vyšetřování nekonečných těles. První problém pružnosti, který v podstatě spočívá v nalezení tensoru napětí uvnitř tělesa, když na hranici je dáno zatížení, je dán tak dv. funkcí hlavního vektoru  $f(s)$ , jež je funkcí oblouku hranice oblasti. Funkce  $f(s)$  má dvě spojité derivace až na konečný počet bodů. Ve výjimečných bodech  $s_k$  platí:

$$|f(s)| \leq \left| \frac{1}{s - s_k} \right|^{\frac{1}{2} - \alpha}, \quad |f'(s)| \leq \left| \frac{1}{s - s_k} \right|^{\frac{3}{2} - \alpha}, \quad \text{kde } \alpha > 0. \text{ Na př. osamělé břemeno na hranici}$$

se projeví konečným skokem této funkce. O hranici oblasti se předpokládá, že její křivost má spojitou derivaci.

Uveďme zde definici prvního problému pružnosti pro konečná tělesa v plném znění: Budiž  $T$  konečné  $m + 1$  násobně souvislé těleso ohraničené dostatečně hladkými křivkami  $c_0, c_1, \dots, c_m$ . Budiž na hranici definována funkce hlavního vektoru  $f(s)$  po částech dostatečně hladká. (Viz předchozí poznámky o chování funkce hlavního vektoru.) Pak prvním problémem teorie pružnosti nazýváme úlohu určit holomorfní funkce  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  definované na  $T$  a takové, že:

1. funkce  $\varphi(z)$ ,  $\varphi'(z)$ ,  $\psi(z)$  a  $F(z)$ , [ $F(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ ] jsou spojitě prodloužitelné na hranici s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), v jejichž

okolí se funkce  $\varphi(z)$  a  $F(z)$  chovají tak, že  $|\varphi(z)| \leq \left| \frac{1}{z - t_k} \right|^{\frac{1}{2} - \beta}$ ,  $|F(z)| \leq \left| \frac{1}{z - t_k} \right|^{\frac{1}{2} - \beta}$ ,  $\beta > 0$ ;

2. spojitě prodloužení funkce  $F(z)$  je všude (s výjimkou bodů  $t_k$ ) na  $c_0$  rovno funkci  $f(s)$  a na  $c_k$  rovno  $f(s) + \beta_k$ , kde  $\beta_k$  jsou neurčené komplexní konstanty.

Analogicky zobecněna a formulována je definice druhého problému pružnosti. Zajímavé na těchto definicích jsou podmínky růstu funkcí  $\varphi(z)$  a  $F(z)$  v okolí výjimečných bodů. Ty jsou postačitelny k tomu, aby existovalo právě jediné řešení, jak je dokázáno v kapitole třetí, a aby nalezené řešení bylo limitou řešení jistých problémů pružnosti, jichž fyzikální smysl je zřejmý. Nedbání podmínky růstu by mohlo vésti k naprosto falešným výsledkům. Tak na př. funkce  $1 + \cos 2\theta$  je Airyho funkce v polovině  $\text{Re } z > 0$  „odpovídající“ zatížení rovnému nule na její hranici.

Další náplní kapitoly druhé je zavedení typů nekonečných těles jakož i definice problémů pružnosti pro tato tělesa.

Kapitola třetí řeší existenční otázky a dává definitivní řešení otázek unicity. To se děje převedením problémů na integrální rovnici Muschelišviliho a Lauricelli-Šermanovu. Při tom hraje podstatnou roli ta okolnost, že křivost hraničních křivek má spojitou derivaci. V této kapitole však nejsou řešeny pouze otázky existence a unicity. Významným a novým je zde důkaz Saint-Venantova principu a vypracování numerických method. Jedna z nich je založena na dokázaném faktu, že řešení příslušné hraniční funkci  $f_1(s)$  a řešení příslušné hraniční funkci  $f_2(s)$  se od sebe libovolně málo liší, pokud integrál  $\int_0^l |f_1(s) - f_2(s)| ds$  je dostatečně malý. Zde  $l$  je délka hranice. Jiná metoda je tak zv. Schwarzův algoritmus, který fyzikálně je založen v podstatě na Saint-Venantově principu. Matematicky je to vhodně upravená metoda postupných aproximací. K ilustraci numerických method jsou zde uvedeny příklady.

Kapitola čtvrtá je věnována užití konformního zobrazení na řešení dříve definovaných problémů. Ve srovnání s výše připomenutou prací N. I. Muschelišviliho nepřináší tato kapitola celkem nic nového. Tato metoda má do jisté míry soběstačný charakter, neboť za poněkud silnějších předpokladů o hraničních funkcích se pomocí ní dají rozřešit otázky existence. To je mimo jiné také náplní kapitoly čtvrté. S hlediska vývoje teorie biharmonického problému je tato metoda jednou z nejstarších a byla s úspěchem užita N. I. Muschelišvilim již v roce 1931–1932.

Dále je ukázáno, že jestliže konformní zobrazení vyšetřované jednoduše souvislé oblasti na jednotkový kruh je dáno racionální funkcí, potom lze nalézt řešení definovaných problémů v konečném tvaru.

Kapitolou pátou vycházejí autoři vstřícně především čtenářům technikům a vykládají v ní potřebné partie z teorie funkcí komplexní proměnné a integrálních rovnic.

Za nedostatek této knihy považují, že v ní nebyly řešeny problémy pružnosti v oblastech s úhlovými body. Jediná práce, která je mi známa a jež pojednává o tomto problému, je práce L. G. MAGNARADZEHO „Основныe задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками (Труды Тбилисского математического института IV, 1938, 43—76). Ta se opírá o práce J. RADONA a T. CARLEMANA, které jsou staršího data. Moderní přístup k tomuto problému by byl nejdříve užitečný.

V knize je dosti tiskových chyb, které při pozorném čtení je možno velmi lehce objevit. Tak na příklad na str. 277 je místo  $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f_n(t) t^{p-1} dt$  nesprávně  $\int_{r_n}^{\beta_n} f_n(t) t^{p-1} dt$ .

Závěrem je možno konstatovat: Kniha je podstatným doplněním výsledků školy N. I. Muschelišviliho a dává efektivní metody numerické, pomocí nichž možno vypočítat technicky důležité případy až do konce. Tyto metody nejsou bohužel vždy jednoduché. Nemůžeme však očekávat jednoduché výpočty tam, kde popisované fyzikální jevy jsou kvalitativně složité. O úspěchu knihy svědčí nejlépe to, že je překládána do němčiny a vyjde v NDR.

*Jindřich Nečas, Praha.*

**Karel Havlíček: Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1956, stran 216, obrázků 203, náklad 2700, cena Kčs 32,20.

Podle autorovy předmluvy je knížka určena především studentům vysokých škol technického směru a dále pracovníkům v technických kancelářích. Autor se vypořádal s úkolem daným tímto účelem knihy velmi dobře. Kniha má proto formu učebnice pro samouky a celý výklad je přizpůsoben potřebám techniků.

Projednávaná látka je rozvržena do pěti kapitol. Kapitola I, „Úvahy přípravné“, obsahuje populární úvod, což vzhledem k tomu, že se na našich jedenáctiletkách v nedávné době kuželosečky téměř vůbec neprobíraly (a deskriptivní geometrie se začíná teprve nyní postupně zavádět), je z důvodů metodických docela na místě. Je proto čtenář napřed seznámen i s některými elementárními vlastnostmi kuželoseček, které jsou pak v pozdějším výkladu ukázány v projektivním pojetí. Tato kapitola obsahuje dále odstavec o průmětu kružnice, o incidenci, o dělicím poměru a dvojpoměru, zavádějí se tu nevlastní elementy, dokazuje se věta Pappova a uvádějí se její důsledky, vykládá se princip duality v projektivní rovině; je ukončena výkladem vlastností úplného čtyřrohu a úplného čtyřstranu.

V kapitole II, „Projektivnost útvarů jednoparametrických“, zavádějí se jednoparametrické lineární útvary, útvary perspektivní a projektivní, ukazuje se doplňování projektivních útvarů, existence samodružných prvků soumístných útvarů a pojednává se o involuci, úběžnicích, řadách podobných a shodných a o shodných svazcích; je ukončena pojmem pravoúhlé involuce.

Projektivní theorie kuželoseček vyvrcholuje v kapitole III, kde zejména výklad polarity poskytuje čtenáři jednoduchý prostředek k zvládnutí theorie i praxe kuželoseček. Polarita je odvozena z vlastností involuce. V této kapitole je čtenář také seznámen s užitečností důležité složky projektivní geometrie, s principem duality. Dualisaci příslušných úvah provádí však autor podrobně jen na některých místech (na př. v článku 23 a 24), jinak uvádí pouze výsledky a důkazy přenechává čtenáři. Pro studujícího to znamená většinou snadné cvičení a autor tak současně ušetří značně na rozsahu knihy. Tato kapitola obsahuje dále projektivní vytvoření kuželosečky (bodové a tečnové), zavádějí se tu jednoparametrické kvadratické útvary, provádí se konstrukce samodružných prvků a doplňování projektivnosti soumístných útvarů, konstrukce průsečíků

přímky s kuželosečkou a konstrukce tečen z bodů ke kuželosečce; dokazuje se věta Pascalova a Brianchonova a ukazuje se aplikace těchto vět, zavádí se involuce na kuželosečce, probírají se polární vlastnosti kuželoseček a uvádějí se konstrukce založené na polaritě; kapitola je ukončena úvahami o svazku a řadě kuželoseček s příslušnými aplikacemi v konstrukcích.

Ve výkladu této kapitoly byly vynechány takové konstrukce kuželoseček, které se prakticky málo vyskytují, a u jednotlivých konstrukcí nejsou dále většinou uváděny podmínky určenosti kuželosečky. Autor tak učinil úmyslně, jak říká v doslovu k této kapitole, neboť se domnívá, že by příslušnou diskusí v tomto směru jednak vzrostl příliš rozsah knihy, jednak by se příliš zkomplikoval výklad. Vzhledem k účelu knihy je tento názor autora zcela správný, neboť čtenář si může ve většině případů provést příslušnou diskusí sám.

Kapitola IV, „Konstrukce kuželoseček“, obsahuje odstavce jednající o rozdělení kuželoseček, o asymptotách a středu kuželosečky, o průměrech kuželosečky, o dalších vlastnostech involuce, o osách kuželoseček, o ohnisku kuželosečky a hovoří se tu o dalších vlastnostech polárního trojúhelníku a uvádějí se elementární konstrukce kuželoseček. Kapitola je ukončena články jednajícími o kuželosečce Apolloniově (souvisící s problémem normál), o parabole Steinerově-Pelzově a o konstrukci kružnic křivosti.

V poslední V. kapitole, „Kolineace a afinita“, se autor zabývá v podstatě konstrukcemi kuželoseček na základě jejich kolineárního vztahu ke kružnici a konstrukcemi elipsy vyplývajícími z jejího afinního vztahu ke kružnici. Jsou tu články jednající o středové kolineaci, o kolineaci kružnice a kuželosečky, o užití kolineace k řešení úloh o kuželosečkách, o afinitě kružnice a elipsy. Kapitola je zakončena článkem o kuželosečkách homothetických.

Autorovy výklady se opírají o vrozenou geometrickou představivost studujícího a nevsímají si logických základů projektivní geometrie. Toto autorovo pojetí vyplývá z jeho názoru na nejvýhodnější vyučování geometrie, je-li čtenářem nebo studujícím technik. Autor má mnohaleté pedagogické zkušenosti, pracoval dlouho s různými studenty a proto může plným právem tvrdit, že není výhodné učit technika projektivní geometrii budováním projektivní geometrie na základě soustavy axiomů, protože se fakticky žádný začátečník ještě nenaučil geometrii pouhými logickými dedukcemi z axiomů. Protože bez samostatného provedení konstruktivních úloh by učebnice geometrie pro technika mnoho neznamenal, je kniha téměř za každým článkem doplněna řadou úloh a cvičení velmi pečlivě vybraných, aby po jejich vypracování zvládl čtenář dokonale předcházející látku nebo si tuto látku dokonce doplnil. Z toho důvodu je kniha i velmi dobrým doplňkem theoretického vzdělání studentů matematiky na vysokých školách jiného směru než technického, neboť poskytuje procvičení na praktických konstrukcích.

Způsob podání celé látky vyrůstá z naší geometrické tradice. Při důkazech pouček se snažil autor omezit abstraktní pojmy na minimum, aby tak technikovi ulehčil studium co nejvíce. Pro zájemce jsou však uváděny odkazy na příslušnou literaturu, která je souhrnně uvedena na konci knihy. Důkazy jsou vedeny většinou metodami synthetické geometrie. Při důkazech, jež nelze podat syntheticky, je čtenář odkazován na geometrii analytickou. Celá knížka se zabývá pouze vlastnostmi reálných kuželoseček. Je doplněna řadou pečlivě provedených a názorných obrázků.

V době, kdy jsou již dávno rozebrány učebnice projektivní geometrie jako na př. WEYROVA, JAROLÍMKOVA, PROCHÁZKOVA, učebnice KADEŘÁVKA-KLÍMY-KOUNOVSKÉHO, a kdy se tato disciplína geometrie uvádí v menších nebo větších částech v nejrůznějších učebních textech vysokých škol, přichází Havlíčkova kniha velmi vhod. Je napsána

velmi srozumitelně, podává ucelený výklad nejdůležitějších vlastností kuželoseček a obsahuje hlavně řešení praktických úloh a popis typických konstrukcí. Přinese jistě velký užitek studentům našich technik, studentům matematiky, i technikům.

*Bořivoj Kepř, Praha.*

**N. A. Killevskij: Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1956, náklad 3500, 1. vydání, stran 148, obrázků 16, cena brož. Kčs 12,45.

Knížka je rozdělena do čtyř kapitol, z nichž první dvě jsou věnovány theoretické přípravě pro třetí a čtvrtou kapitolu, které obsahují příklady z mechaniky soustav hmotných bodů a mechaniky kontinua.

V první kapitole jsou vyloženy *základy vektorového počtu*. V první části po definici pojmu skaláru a vektoru je uvedeno sčítání (a odčítání) vektorů a oba důležité součiny vektorů, skalární a vektorový. Pro tyto součiny jsou odvozeny jejich základní vlastnosti (zvláště z nich plynoucí kolmost, příp. kolineárnost vektorů), dále vzorce pro smíšený součin a dvojný vektorový součin. Velmi instruktivně je objasněna okolnost, že ve vektorové algebře neexistuje inverzní operace ke skalárnímu, příp. vektorovému násobení. Použití pravoúhlé kartézské souřadnicové soustavy umožňuje složkové vyjádření každého vektoru, příp. průvodiče bodu. V tomto vyjádření je uveden součet  $n$  vektorů, skalární a vektorový součin. Druhá část této kapitoly je věnována vektorové analýze, a to pouze derivaci vektoru, derivaci vektorového součinu a velmi stručně integrování vektorové funkce a integrálu vektorového součinu.

Druhá kapitola vykládající základy tensorového počtu je rozdělena do tří částí. V první části je zaveden pojem *tensoru*. Nejdříve jsou definovány kontravariantní a kovariantní složky vektoru a vztahy mezi složkami téhož vektoru ve dvou různých kartézských souřadnicových soustavách, což umožňuje podání úplné analytické definice vektorové veličiny. Je podstatné, že je ukázáno, že geometrická definice vektoru je ekvivalentní s definicí analytickou. Důležité je zavedení (první) základní kvadratické formy, jejíž koeficienty  $g_{ik}$  určují metriku uvažovaného prostoru, určení koeficientů  $g^{ik}$  a jejich vztahu ke koeficientům základní formy. Tyto koeficienty jsou použity při stanovení závislosti mezi kontravariantními a kovariantními složkami téhož vektoru. Pomocí kontravariantních a kovariantních složek vektorů jsou definovány nejjednodušší tensor, t. zv. multivektory. Z výkladu proto plyne, že také absolutní skaláry a vektory patří k tensorům. Tím je dána možnost zavést obecnou definici tensorů, jejichž složky jsou podřízeny danému zákonu transformace při přechodu z jedné souřadnicové soustavy do druhé, při čemž tento zákon je týž pro všechny tensor. Koeficienty  $g_{ik}$  základní formy, příp. z nich odvozené veličiny  $g^{ik}$ ,  $g^i_k$  tvoří složky nejdůležitějšího kvadratického tensoru (t. zv. metrického tensoru). Dále je ukázána invariantnost symetrie, příp. antisymetrie tensoru druhého řádu a důležitá věta o ekvivalenci takového antisymetrického tensoru s vektorem (příp. pseudovektorem). V druhé části zabývající se tensorovou algebrou je nejprve pojednáno o základních operacích s tensor (sčítání a násobení), o permutaci indexů a o t. zv. úžení tensorů. Pak je proveden rozklad obecného tensoru druhého řádu na symetrickou a antisymetrickou část, je zaveden pojem symetrisace a alternace a ukázáno, že každý tensor lze vyjádřit jako součet multivektorů. Další operace, t. zv. snižování a zvyšování indexů, je prováděna pomocí metrického tensoru. Po důležité poznámce o vztahu mezi tensor a algebraickými plochami je uvedena další analytická definice tensoru a proveden výklad rovnic  $x'^i = A^i_j x^j$  (příp.  $x'_k = A^j_k x^j$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ ), které definují buď bodové transformace souřadnic nebo (afinní) transformaci (pohyb) prostoru. Jako příklad je uveden operátor otočení (versor), který jednak

určuje ortogonální transformaci, jednak pohyb, který zachovává délky a jimi sevřené úhly; pak je provedena jeho konstrukce, je-li dán pohyb tuhého tělesa. Závěrem této části je pojednáno o křivočarách souřadnicích v trojrozměrném prostoru a určeny koeficienty v transformačních rovnicích. Krátce jsou uvedeny základní pojmy pro prostor  $n$ -rozměrný.

Třetí část, která je v podstatě nejdůležitější částí celé této kapitoly, a lze říci, že i celé knížky, pojednává o tensorové analýze. Po definici absolutního diferenciálu vektoru jsou odvozeny Christoffelovy symboly druhého druhu a z nich pak symboly prvního druhu a je ukázáno, že tyto symboly nejsou tensorové veličiny. Po vyšetřování absolutního diferenciálu tensoru libovolného řádu a struktury je zaveden t. zv. paralelní přenos tensoru v křivočarách souřadnicích a podán důkaz, že v zobecněném smyslu je metrický tensor konstantní. Při hledání takové podmínky pro složky metrického tensoru  $g_{ik}$ , aby metrika byla eukleidovská, je odvozen Riemann-Christoffelův tensor křivosti. Anulování tohoto tensoru  $R_{\lambda\nu\mu}^j$  čtvrtého řádu je nutná a postačující podmínka pro existenci eukleidovské metriky v prostoru. Při vyšetřování tensorových polí je určena kovariantní (absolutní) derivace vektoru, příp. tensoru řádu  $r$  a uvedeny její základní vlastnosti. Nyní lze už zavést další, pro aplikace důležité pojmy: gradient skalární funkce, divergence a rotace vektoru a t. zv. Hamiltonův operátor  $\nabla$  a Laplaceův operátor  $\nabla^2$ . Užitím integrálních vět jsou definovány nezávisle na volbě souřadnicové soustavy pojmy: gradient, divergence a rotace vektoru a stanoveny další pojmy, a to tok vektoru danou plochou a cirkulace vektoru. Tato část končí poznámkou o ortogonálních křivočarách souřadnicích, kde se zjednodušují vztahy pro metrický tensor a Christoffelovy symboly.

Třetí kapitola obsahuje užití vyložené látky na *mechaniku bodových soustav*. Úvodem jsou stanoveny pohybové rovnice volného hmotného bodu v křivočarách souřadnicích, které jsou pak zvláště studovány v cylindrických a sférických souřadnicích. Pak je vyšetřena reakce při pohybu vázaného hmotného bodu po dané ploše a jeho setrvačný pohyb. Protože trajektorie bodu má vlastnost, že jednotkové vektory tečen k trajektorii v různých jejích bodech jsou rovnoběžné v zobecněném smyslu, je tato trajektorie t. zv. geodetická křivka. Úvahy jsou pak rozšířeny na určení pohybových rovnic vázané soustavy hmotných bodů v křivočaré souřadnicové soustavě za předpokladu stacionárních ideálních geometrických vazeb a ukázáno, že pohybové rovnice jsou totožné s Lagrangeovými diferenciálními rovnicemi druhého druhu. Provedení počtu ukazuje, že danou úlohu lze rozdělit na dvě, na úlohu určení pohybového zákona a úlohu určující reakce vazeb. Především úvahy jsou užity na stanovení pohybových rovnic fyzického kyvadla. Po zavedení t. zv. anholomních souřadnic jsou studovány pohybové rovnice anholonomních soustav, t. j. soustav bodů, které jsou podrobeny lineárním neintegrovatelným vazbám. Závěr kapitoly tvoří zcela jednoduché aplikace dynamiky tuhého tělesa, kde jsou odvozeny smíšené složky tensoru setrvačnosti s jeho vlastnostmi, dále elipsoid setrvačnosti (s hlavními osami setrvačnosti) a napsány Eulerovy dynamické rovnice v kosoúhlé kartézské souřadnicové soustavě.

Čtvrtá kapitola je věnována studiu mechaniky deformovatelných těles (spojitých prostředí) pomocí tensorového počtu. Nejdříve jsou uvedeny obecné rovnice rovnováhy a pohybové rovnice spjitých prostředí s odvozením tensoru kinetických napětí. Pohybové rovnice jsou stanoveny bez ohledu na fyzikální podstatu spjitého prostředí. Tyto rovnice však neurčují napětí, rychlosti a hustoty jeho prvků, jsou-li dány deformující síly; pak je totiž neznámých funkcí více než rovnic a je třeba přidat dodatečné rovnice. K tomu se určuje vektor posunutí a dva tensory; tensor malých deformací a tensor rychlosti deformace, které jsou symetrickými tensory druhého řádu. Rovněž je zaváděn tensor konečných deformací, který je pro malá posunutí roven tensoru malých defor-

mací. Při dané metrice deformovaného prostředí lze pak odvodit podmínky pro existenci funkcí, umožňující přechod do eukleidovské metriky. Tyto podmínky (šest rovnic) určují bodovou transformaci a pro malé deformace teorie pružnosti jsou známy pod pojmem Saint-Venantových podmínek kompatibility. Při vyšetřování pohybu vazké kapaliny za předpokladu, že je isotropní a homogenní, dále že symetrické tenzory druhého řádu napětí a rychlostí deformace mají totožné hlavní osy, lze napsat pohybové rovnice v invariantním tvaru (t. zv. Navier-Stokesovy rovnice). Hledáme-li základní rovnice teorie pružnosti pružného tělesa, získáme pro neisotropní těleso tenzor pružnosti čtvrtého řádu, který má maximálně 21 nezávislých složek. Pro případ isotropního a homogenního tělesa podrobeného malým deformacím jsou určeny t. zv. Laméovy rovnice. Protože funkce kinetických napětí umožňují vyjádření složek tenzoru kinetických napětí, nepůsobí-li objemové síly, je uveden algoritmus pro jejich zavedení a řešeny dva příklady (úloha statická s odvozením Maxwellových vzorců a nejjednodušší dynamická úloha se stanovením Airyho vzorců). Závěr knihy tvoří aplikace na teorii malých pružně plastických deformací a je ukázáno, že získané rovnosti lze považovat za zobecnění Hookova zákona.

Překlad Kilčevského knížky je třeba považovat za velký přínos pro pracovníky ve výzkumu i v konstrukci, protože formou velmi stručnou, avšak velmi přehlednou a názornou jsou tu vyloženy základy tensorového počtu, jehož praktické užití je velmi široké. Je dobře, že autor aplikoval tyto základy na příklady z jednoho technického oboru a nesnažil se podat užití ve všech možných disciplínách, protože mohl ve zvolené partii jít do větší hloubky a nevznikla tříšt příkladů. Výklad v knize přes zmíněnou již stručnost je veden snahou po pokud možno největší přesnosti. Je třeba poznamenat, že i ve vykládaných aplikacích se látka rozšiřuje. Překlad sám je proveden dobře, také úpravy knížky byla věnována příslušná péče a bylo by proto záhodno, aby knihu studovali všichni ti, kterým je určena, a aby také tensorového počtu ve větší míře používali.

Karel Drábek, Praha.

*Leonard J. Savage: The Foundations of Statistics.* John Wiley & Sons, New York 1954, stran XV + 294.

Knihla obsahuje autorovo osobní (není zatím jiných) pojetí *základů statistiky*. Savageovo pojetí má dva základní rysy:

1. statistika je teorie rozhodovacích funkcí a 2. pravděpodobnost se interpretuje subjektivisticky. Podrobněji můžeme říci, že statistika je normativní disciplinou studující pravidla rozhodování v jistých situacích. Normy, jež statistika dává, nejsou úplné, t. j. nepředepisují obecně v dané situaci jediné řešení. Ke skutečnému výběru jednoho rozhodnutí je třeba, aby rozhodující se jedinec měl svoje vlastní pravidla. Statistika má pak uchránit od používání nevhodných pravidel; alespoň pro toho, jenž uznává vhodnost základních axiomů statistiky, je nedůsledné používati pravidel rozhodování, která nevyhovují normám z přijatých axiomů vyplývajícím. Statistikou ve vlastním slova smyslu se pak nazývá teorie zabývající se rozhodováním ne jedince, ale souhrnu více jedinců.

Je třeba již nyní připomenout, že se autor neomezuje jen na výklad svého stanoviska, avšak konfrontuje a srovnává je s jinými stanovisky, zejména pak s objektivistickým. Zajímavé je, že autor v diskusních částech své knihy podal podrobnější a přesnější výklad objektivistického stanoviska, než jsem doposud našel u statistiků, kteří jsou přesvědčenými objektivisty.

Přistoupíme k podrobnějšímu popisu knihy. V autorově pojetí formálním objektem statistiky jsou: Množina  $S$ , jejíž elementy jsou nazývány *stavy* (stavy přírody); *jevy*,



což jsou části množiny  $S$ ; množina *důsledků*  $F$ ; funkce definované na  $S$  s hodnotami v  $F$ , které se nazývají *rozhodnutí* (autor používá slova *acts*; je-li  $f$  rozhodnutí, pak  $f(s)$  pro  $s \in S$  má význam důsledku rozhodnutí  $f$  v případě, že stav přírody je  $s$ ). Množina všech rozhodnutí je uspořádána relací  $\leq$ . Od  $S, F, \leq$  se vyžadují některé další vlastnosti zformulované do sedmi postulátů, z nichž prvý požaduje, aby  $\leq$  bylo prosté uspořádání. Interpretace množin  $S$  a  $F$  je zřejmá. Pokud se týče pojmu rozhodnutí, jedná se o abstrakci: V reálném modelu mimo jiné určuje každé rozhodnutí pro každý stav přírody důsledek; v abstraktním modelu toto přiřazení se ztotožňuje s rozhodnutím. Relace  $f \leq g$  se interpretuje takto: Rozhodnutí  $f$  není dávana přednost před rozhodnutím  $g$ .

Subjektivismus autorův je dán samozřejmě nikoliv matematickým modelem, ale jeho interpretací. Subjektivismus autorovy interpretace spočívá v tom, že relace  $\leq$  se interpretuje jako subjektivní pravidlo jednotlivce pro výběr rozhodnutí. Model připouští ovšem i jiné, nesubjektivistické interpretace, podobně, jako je tomu u axiomatiky Kolmogorovovy. Tak na příklad mohou být prospěšné snaze podat objektivistickou interpretaci pojmu pravděpodobnosti tyto autorovy úvahy: Z relace  $\leq$  mezi rozhodnutími se odvozuje relace  $\leq$  mezi jevy, při čemž  $A \leq B$  se čte:  $A$  není pravděpodobnější než  $B$ . Relace  $\leq$  se nazývá *kvalitativní pravděpodobnost*. Ukazuje se, že za jistých předpokladů existuje *pravděpodobnostní míra* (aditivní), definovaná na všech jevech tak, že  $P(A) \leq P(B)$  platí tehdy a jen tehdy, když  $A \leq B$ . Obdobně se dále dokáže, že existuje (až na lineární transformaci) právě jedna reálná funkce  $U$  definovaná na množině všech důsledků  $F$  taková, že pro libovolná dvě rozhodnutí  $f, g$  je  $f \leq g$ , když a jen když  $EU(f) \leq EU(g)$ .<sup>1)</sup>

Vzhledem k tomuto tvrzení je možno v knize dále předpokládat, že  $U(f) = f$ , takže pak rozhodnutí jsou reálné funkce na  $S$  a  $f \leq g \Leftrightarrow Ef \leq Eg$  (kap. 1–5).

V dalších dvou kapitolách je studován důležitý speciální případ rozhodovacího problému, v němž jsou rozhodnutí volena na základě *pozorování* náhodných proměnných. Různé běžné statistické pojmy jako *sufficience*, *podíly věrohodností*, *sekvenční testy* jsou zde studovány s jednotného hlediska maximálního očekávaného užítku.

V kapitole 8 počíná se autor zabývat t. zv. *multipersonálním problémem*, v němž rozhodnutí má učinit skupina lidí, z nichž každý má případně jinou subjektivní pravděpodobnost. Z kontextu pak vyplývá, že za nejdůležitější a typickou situaci se považuje ta, v níž různé subjektivní pravděpodobnosti se liší pouze tím, co bývá obvykle nazýváno *apriorní pravděpodobností*. V multipersonálním problému není již volba rozhodnutí tak jednoduchá; jedno z možných řešení je *minimax*.

Minimaxové teorii jsou pak věnovány tři kapitoly. Nelze zde podat podrobný popis těchto kapitol; všimneme si pouze autorovy diskuse pojmu ztráty. Autor se staví proti pojetí ztráty jako záporného zisku a navrhuje definovat (zhruba řečeno) ztrátu při rozhodnutí  $a$  a stavu přírody  $s$  jako rozdíl mezi maximálním možným ziskem za stavu  $s$  a ziskem plynoucím z rozhodnutí  $d$  za stavu  $s$ . Velmi zdařilou a užitečnou je kapitola 11, jež vymezuje paralelismus mezi rozhodovacími problémy na jedné a teorii her na druhé straně; správně je zde ukázáno, že důvody pro užití *minimaxu* v teorii her nemohou být použity ve statistice.

V kapitole 12 jsou uvedeny některé důležité matematické věty *minimaxové* teorie a v kapitole 13 jsou diskutovány výtky proti teorii *minimaxu*.

Kapitola 14 souvisí úzce s kap. 6 a všimá si principu *minimaxu* aplikovaného na problémy, v nichž je volba rozhodnutí založena na pozorování.

V posledních třech kapitolách se studují a konfrontují běžná a navrhovaná kritéria týkající se bodových odhadů, testů a intervalových odhadů s aspekty rozhodovací teorie

<sup>1)</sup>  $E$  značí očekávanou hodnotu.

v knize vybudované. Celá kniha je prostoupena odstavci, případně i kapitolami, kde se uvažuje vztah stanoviska autorova k jiným, zejména objektivistickým stanoviskům. Jsou diskutovány námitky proti oběma pojetím.

Tím jsem skončil stručný výklad o obsahu knihy; obávám se však, že obraz, jež je možno si z tohoto výkladu učinit, je velmi nedokonalý. Pokusím se doplnit jej několika poznámkami, které budou však již silně ovlivněny mými vlastními stanovisky.

Zdá se, že mnozí čtenáři budou nakloněni uvažovat asi takto: „Tato kniha je založena na subjektivistickém pojetí pojmu pravděpodobnosti. Protože takové pojetí je pro mne zásadně nepřijatelné (nebo je pokládám za zásadně neschopné zakládat vědeckou disciplínu), nemohu použít ani důsledků, jež autor obdržel, a celý výklad knihy je pro mne bezcenný.“ Domnívám se, že takovýto názor by nebyl správný. V diskusních částech je velmi často podrobně uvedeno stanovisko objektivistické; při výkladu minimaxové teorie je tento výklad vůbec nejprve podán s hlediska objektivistického a teprve později je přikročeno k subjektivistické reinterpretaci. Podobně mnohé úvahy (ne ovšem všechny) pronesené autorem subjektivistickým jazykem lze reinterpretovat objektivisticky. Autorův subjektivism je v podstatě, myslím, různý od striktního subjektivismu, o němž je pouze zmínka na straně 51.

Pokud však mluvíme o subjektivistickém pojetí, tak jak je vyjádřeno sedmi autorovými postuláty a autorovou interpretací těchto postulátů, pak jediný postulát, jenž bude (ne vždy) odporovat pojetí objektivistickému, je předpoklad  $P_1$  existence relace na širším souboru, než připouštějí objektivisté. Z tohoto předpokladu pak plyne jednoduchost řešení rozhodovacího problému pro jednu osobu (to je dáno právě relací  $\leq$ ), kdy je situace analogická jako při znalosti „apriorní pravděpodobnosti“.

Při studiu multipersonálního problému se analogie mezi subjektivistickým a objektivistickým pojetím zvětšuje; jistý rozdíl ovšem je patrný a projevuje se, myslím, i v Savageově pojetí ztráty. Tato ztráta je závislá na skupině uvažovaných rozhodnutí; ta je přirozeným způsobem definována v subjektivistickém multipersonálním problému, zatím co v případě objektivistického rozhodovacího problému tomu tak není.

V objektivistickém rozhodování problému Savageovo pojetí ztráty odstraňuje některé možné nepřijemnosti, jiné však s sebou přináší. (Viz články *Roy Radner* and *Jacob Marschak*: Note on some proposed decision criteria, 61—68; *J. Milnor*: Games against Nature, 49—59; obě práce ve sborníku *Thrall, Coombs, Davis*: Decision processes, John Wiley, New York 1954.)

Konečně bych si chtěl povšimnout zamítavého stanoviska, které autor zaujímá k intervalovým odhadům. Souhlasím, že tam, kde jde o rozhodování v užším, praktickém slova smyslu, bude velmi zřídka vhodné použití intervalového odhadu. Na druhé straně se domnívám, že tyto odhady mohou být velmi užitečné pro shrnutí experimentálních výsledků při teoretických výzkumech a pod. Autor si této druhé možnosti též všímá, avšak říká, že v tomto případě je lépe uvést místo odhadů prostě nějakou sufficientní statistiku; to by ovšem mohlo být dobré, kdyby každý čtenář byl schopen konstruovat pro svůj problém vhodnou rozhodovací funkci. Tomu tak zatím není; zde zřejmě vede k absurdnosti kvonce inžde užitečná, abstrahovat při hodnocení rozhodovacích funkcí od potíží a nákladů spojených s jejich konstrukcí.

Shrneme-li, je Savageova kniha patrně zatím nejpodrobnější studií základů statistiky chápané jako teorie rozhodování. Základním pojetím autora je subjektivismus, avšak jiná pojetí jsou diskutována podrobněji, než zatím učinili jejich zastánci.

Zbývá dodat, že sloh knihy je vtipný a vyznačuje se elegancí v publikacích přírodovědeckých nezvyklou. Okruh čtenářů však nebude patrně moci být tak široký, jak si

autor představuje v předmluvě, neboť přes úspěšnou snahu autorovu o srozumitelnost nejsou věci autorem vykládané jednoduché.

Václav Fabian, Praha.

A. I. Fetisov: **O důkazu v geometrii.** Z ruštiny přeložil ing. Milan Ullrich. Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1956, nákladem 2200 výtisků; 84 stran, 31 obrázků, cena Kčs 2,38. Předmluvu k českému vydání napsal doc. Jan Vyšín.

Fetisovova knížka, která vyšla jako 14. svazek „Populárních přednášek o matematice“, je určena především žákům jedenáctiletých, jimž má pomoci odstranit obtíže spojené s důkazovými úlohami v geometrii. Po krátkém úvodu následují čtyři kapitoly, napsané postupně otázkami, na něž autor odpovídá: Co je to důkaz, k čemu je třeba důkazu, jaký musí být důkaz, které věty lze v geometrii přijmout bez důkazu. Dát na tyto otázky odpověď věcně správnou a současně srozumitelnou úplnému začátečníkovi je při malém rozsahu knížky velmi těžké. Knížka je psána jasně a čtenář v ní najde na mnoha místech vtípné myšlenky a příklady pronikavého rozboru důkazů; je ovšem pochopitelné, že nebylo možno dát všude podrobnou odpověď. — Na autorovu adresu je třeba poznamenat, že výklad o požadavcích kladených na axiomatické soustavy je dostatečně jasný a není nutno uvádět vzdálenou analogii s vlastnostmi soustav lineárních rovnic. Symbolů, zavedených na str. 66, se v knížce používá tak málo, že se jejich užitečnost nemůže projevit a je tedy zbytečné je zavádět.

Při překladu došlo k několika nedopatřením. Na str. 27, 1. a 2. ř. shora, je nesprávně řečeno „Všechny čtyřúhelníky, v nichž součet protějších úhlů je různý od  $180^\circ$ , nelze vepsat do kružnice“ místo „Žádný čtyřúhelník, v němž součet protějších úhlů je různý od  $180^\circ$ , nelze vepsat do kružnice“. Na str. 44, 1. ř. shora, má být „součty protějších stran“ místo „protější strany“. Ve formulaci Cantorova axiomu by bylo dobře (ve shodě s originálem) říci „libovolně daná úsečka“, nikoliv jen „daná úsečka“ (str. 73, ř. 5 shora); mimo to je nesprávně psáno jméno velkého matematika, po němž je tento axiom nazván. Tiskové chyby jsou většinou opraveny v seznamu oprav, který je do knížky vložen; na str. 49, ř. 17 shora, má být „průměty“ místo „průmětu“.

Lze očekávat, že Fetisovova knížka splní velkou část svého poslání, i když její hodnota je snížena vadami překladu.

Ladislav Kosmák, Brno.

V. G. Šervatov: **Hyperbolické funkce.** Z ruštiny přeložil ing. M. Ullrich. Vyšlo jako 15. svazek knižnice „Populární přednášky o matematice“ v SNTL, Praha, 1956, nákladem 2200 výtisků, 80 stran, 39 obrázků. Cena 2,32 Kčs.

Hyperbolické funkce se obvykle zavádějí pomocí nekonečných řad; souvislost s goniometrickými funkcemi se pak jeví jen formální a důvod jejich pojmenování zůstává neobjasněn. Elementární výklad, jak je podán v Šervatovově knížce, je prost tohoto nedostatku, i když je méně přesný; opírá se o názorný pojem hyperbolického úhlu a hyperbolického otočení a umožňuje plně vystihnout analogii s goniometrickými funkcemi.

V první kapitole se studuje pojem hyperbolického otočení. Ve druhé se zavádějí hyperbolické funkce a odvozují se pro ně základní vztahy a součtové vzorce; text je v této kapitole většinou rozdělen do dvou sloupců, v nichž se souběžně dokazují obdobné vztahy pro goniometrické a hyperbolické funkce. Třetí kapitola pojednává o souvislosti s logaritmy, jsou v ní nalezeny analytické výrazy pro hyperbolické funkce a dokázány Eulerovy vzorce pro goniometrické funkce. — K českému vydání napsal předmluvu doc. dr. Karel Hruša.

Knížka je opatřena seznamem oprav, který je třeba doplnit upozorněním na tyto tiskové chyby: Na str. 24, ř. 10 zdola, má být  $\left[ \frac{x}{k}, yk \right]$  místo  $\left[ \frac{x}{k}, yx \right]$ ; na str. 48 v levém sloupci vztah IX má znít  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ; na začátku 6. ř. zdola na str. 53 má být za písmenem  $z$  čárka.

Čtenáře, který již učinil několik prvních kroků ve studiu matematiky, Šervatovova knížka upoutá zajímavým obsahem i svěžím stylem výkladu; těmito vlastnostmi pokračuje v dobré tradici předcházejících svazků „Populárních přednášek o matematice“.

*Ladislav Kosmál, Brno.*

*E. Kraemer, F. Hradecký a V. Jozífek: Sběrka řešených úloh z matematiky (6. až 8. postupný ročník). Vydalo státní pedagogické nakladatelství ve sbírce „Na pomoc učitelů“ (Knížnice pro další vzdělávání učitelstva), Praha 1956. Stran 245. Obrázků 75. Cena Kčs 7,53.*

Při posuzování této knihy je nutno stále mít na paměti, že je určena učitelům, třebaže ji mohou s úspěchem studovat i žáci.

Úlohy jsou tu rozděleny do tří částí (aritmetika, algebra, geometrie) a přimykají se většinou k látce 6.—8. třídy našich všeobecně vzdělávacích škol; přesahují tuto látku jen na některých místech. Autoři vybrali hlavně úlohy obtížnější, než jaké se probírají ve škole. To je jistě velmi účelné.

Jednotlivé úlohy z aritmetiky (autor V. JOZÍFEK) a algebry (autor F. HRADECKÝ) jsou seřazeny systematicky v tomto pořadí: číselné soustavy, dělitelnost čísel, zlomky, slovní úlohy, rozklad mnohočlenů, úprava algebraických výrazů, lineární rovnice o jedné neznámé, nerovnosti a slovní rovnice. Naproti tomu úlohy z geometrie jsou seřazeny s hlediska methodického. Jsou rozděleny do tří kapitol; v první jsou úlohy důkazové, ve druhé úlohy o množinách bodů dané vlastnosti a ve třetí úlohy konstruktivní. Přitom ve všech kapitolách jsou úlohy týkající se různých geometrických útvarů, ať už trojúhelníků, čtyřúhelníků, kružnic a pod. Geometrická část, jejímž autorem je E. KRAEMER, je vůbec zpracována odlišně od ostatních částí. Stručný výklad před každou kapitolou je zde výstižnější než podobné výklady u části aritmetické a algebraické a dává učitelům také velmi dobré praktické rady (na příklad zdůraznění pochopení základní myšlenky důkazu na str. 128). Kraemer tu neuvádí jen vzorná řešení, ale upozorňuje i na chyby, jichž jsme se hlavně dříve při vyučování dopouštěli (viz str. 127). Jeho příkré zavržení některých našich starších sbírek (viz str. 187), v nichž konstruktivní úlohy bývaly řešeny neúplně, je však snad poněkud přehnané, neboť i tyto sbírky, třebaže zdaleka nedosahovaly podání Kraemerova, měly svého času svůj význam a pomohly nám vychovat řadu dobrých matematiků.

Hlavním rysem celé této nové sbírky je přesná logická stavba řešení jednotlivých úloh a podrobná diskuse každé úlohy a jejího řešení. Také po methodické stránce může kniha přinést učitelům značný užitek. Složitější úlohy jsou velmi přehledně rozloženy na řadu jednodušších úloh. Důležitým kladem je, že u mnohých úloh je udáno několik různých způsobů řešení. Na příklad u slovních úloh je obyčejně uvedeno jak řešení úsudkem tak i řešení rovnicí a užívá se i mnemotechnických a heuristických pomůcek, jako jsou různé náčrtky a schemata, jež řešení usnadňují. Přitom jsou přísně rozlišeny tyto pomocné prostředky od vědecky správných úvah a důkazů. To všechno je pro naše školy velmi užitečné. Učitel si zde na příklad jasně uvědomí, že nestačí, aby se omezil při řešení úloh ve škole jen na svoji vyježděnou šablonu a že musí při nejmenším vzít v úvahu i samostatná řešení, jež přinášejí žáci. Autoři vzali ohled i na to, že se v matematice nevystačí

jenom s pouhou logikou. Pro školskou práci přichází v úvahu hlavně uplatnění početní praxe a rutiny, jež je na našich školách dnes částečně zanedbávána. Autoři zdůrazňují její význam na několika místech (nejvýstižněji na str. 58).

Pozorný čtenář může prostudováním této sbírky rozšířit i svoje vědomosti. To se týká hlavně těch učitelů, kteří neprodělali důkladné matematické školení. Mám na mysli na př. úlohy týkající se rozkladu mnohočlenů v množině celých čísel. U každého mnohočlenu, který už rozložit nejde, je odůvodněno, proč to nejde. I když tyto důkazy nejsou pojaty do učebnic, přece pro učitelovu práci jsou důležité.

Všechny tyto klady nové naší sbírky jistě přispějí podstatně ke zlepšení práce na našich školách a můžeme jen vyslovit přání, aby podobné sbírky byly sestaveny i z látky probírané v 9. až 11. třídě.

Ale vedle všech těchto předností má sbírka i některé nedostatky. Týká se to jen první části, kde úlohy o dělitelnosti se řeší v oboru čísel přirozených, ačkoli jsou formulovány v oboru čísel celých. Autor byl k tomu pravděpodobně sveden tím, že se na školách dělitelnost probírá dříve než čísla záporná, ale chtěl-li už to tak provést, měl na to aspoň upozornit. Tak na př. úloha čís. 9 (str. 9—11) obsahuje tvrzení platná pro kterákoli dvě lichá čísla, ale autor je dokazuje jen pro kladná lichá čísla navzájem různá. Při tom i v tomto důkaze je mezera na str. 10 (řádek 6 zdola), kde je třeba místo ostré nerovnosti  $u > v$  vzít v úvahu nerovnost  $u \geq v$ . Dále v úloze 18 na str. 14 autor vysvětluje, že zlomek v základním tvaru je takový, jehož číselník i jmenovatel jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla; pak by ovšem jeho úloha se omezovala jen na případ  $a < b$ , neboť je tam řeč o zlomku  $\frac{b-a}{b}$  v základním tvaru, ale hned na začátku textu řešení připouští ne-

soudělná čísla taková, jejichž jediný společný dělitel je  $-1$ , což budí u čtenáře dojem, že přec jen při dělitelnosti připouští i čísla záporná. Celou tuto nejasnost stupňuje konečně kolise s úlohami o rozkladu mnohočlenů v množině celých čísel, kde se nutně užívá dělitelnost čísel celých a ne jen přirozených. Při tomto rozkladu mnohočlenů se ovšem záporným číslům vyhnout nemůžeme a proto úlohy o dělitelnosti v první části bylo dobře tomu přizpůsobit, aby výklad všech pojmů byl v celé knize jednotný.

Jiné nedopatření je na str. 13 v druhé části řešení úlohy 15. Jde o vyvrácení věty, že přirozené číslo dělitelné pěti má na svém základním místě číslici 0. Každého učitele totiž ihned napadne, že na příklad existence čísla 35 stačí k důkazu. To je jistě správné. Ale autor nejdřív zbytečně probere všechna čísla končící nulou, pak zjistí, že je nepotřebuje, a na to teprve zkonstruuje důkaz. Je nebezpečí, že takový učitel, který nemá dosti sebe-důvěry, bude všechny zbytečnosti v důkaze uvedené pokládat za nutnou část důkazu.

Přes tyto nedostatky se domnívám, že tato nová sbírka splní výborně své poslání a že přispěje ke zlepšení vyučování matematice na našich školách, jak už jsem výše konstatoval.

Karel Havlíček, Praha.