

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 470

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117213>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÚLOHY A PROBLÉMY

7. Rozhodněte, zda existuje funkce f v intervalu $(0, 1)$, která má tuto vlastnost: Pro každé $x \in (0, 1)$ existuje vlastní derivace $f'(x)$ a množina bodů nespojitosti funkce f' má míru 1.

Ilja Černý, Praha.

8. Na kulové nadploše o středu S a poloměru 1 v eukleidovském n -rozměrném prostoru budiž dáno $n + 1$ lineárně nezávislých bodů tak, že S je vnitřním bodem simplexu vytvořeného těmito body. Rozhodněte, zda platí: Rozdělíme-li množinu daných bodů libovolně na disjunktní neprázdné části M, N , pak existuje bod $A \in M$ a $B \in N$ tak, že vzdálenost A od B je větší než $\sqrt{2}$.

Miroslav Fiedler, Praha.

9. Nechť $A = [0, -1]$, $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$, $D = [1, 0]$. Nechť lomená čára L^1 (resp. M) spojuje body A, B (resp. C, D) a nechť L (resp. M) leží v pásu $E[[x, y]; -1 < x < 1]$ (resp. $E[[x, y]; -1 < y < 1]$). Dokažte, pokud možno elementárními prostředky, že se čáry L, M protínají.

Jan Mařík, Praha.

10. Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď f spojitá funkce na množině G , která je otevřená v m -rozměrném kartézském prostoru E_m . Nechť ke každému $s \in G$ existuje uzavřená koule K o středu s tak, že $K \subset G$ a že

$$\int_K f(x) dx = \int_K f(s) dx \quad (*)$$

(= $f(s) \cdot V$, kde V je objem koule K). Potom je funkce f harmonická na množině G .

Poznámka. Jestliže spojitá funkce f na otevřené množině G má tu vlastnost, že ke každému $s \in G$ a ke každému $\delta > 0$ existuje koule K o středu s a poloměru menším než δ tak, že platí (*), je funkce f harmonická (to snadno plyne ze základních vět o harmonických funkcích).

Jan Mařík, Praha.

¹⁾ L je tedy sjednocením konečného počtu orientovaných (uzavřených) úseček U_1, \dots, U_n , při čemž A je počátečním bodem U_1 , koncový bod U_j je počátečním bodem U_{j+1} ($j = 1, \dots, n - 1$) a B je koncovým bodem U_n . Řekneme-li však v úloze na př. „hladká křivka“ místo „lomená čára“, dostaneme, jak se zdá, úlohu jen nepodstatně odlišnou.